CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

¿EN QUÉ SE DIFERENCIAN LOS NÚMEROS?

Encierren el / los conjuntos numéricos al / a los cual/es pertenece/n los siguientes números

- $2 \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-5 \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-\frac{7}{8} \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\sqrt{16} \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $\pi \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$
- $-7{,}53 \in \mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{I} \quad \mathbb{R}$

Se lee: –7,53 pertenece (∈) a alguno/s de los siguientes conjuntos.

Un concepto básico y elemental del lenguaje matemático es el de **número**. Para poder trabajar en matemática, es necesario comprender la noción de número, sus propiedades y sus transformaciones.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

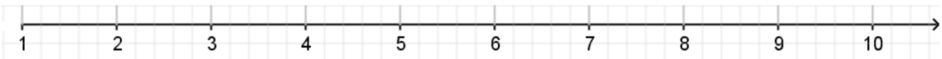
NÚMEROS NATURALES

Llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, también llamados números enteros positivos, es decir:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

La secuencia para encontrar cada número natural es sumar uno al anterior. La representación en la recta numérica es:

La aritmética es la rama de las matemáticas que estudia las operaciones de los números y sus propiedades elementales. Proviene del griego *arithmós* y *téchne*, que significan *números* y *habilidad*, respectivamente.

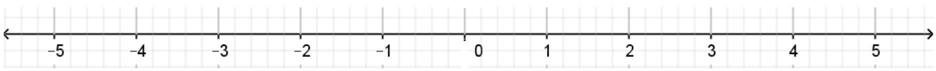


NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros, al que denominamos $\mathbb{Z}$, es el conjunto de los números naturales más el cero y los enteros negativos, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

La representación en la recta numérica es:



NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales está formado por las fracciones, es decir, por todos los números que pueden formarse a partir de la división de dos enteros. Los números racionales representan partes de un todo. Este conjunto numérico se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\ y\ b \neq 0\right\}$$

Se lee: El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ son aquellos que se pueden expresar como $\frac{a}{b}$ donde a y b pertenecen ($\in$) al conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) y b es distinto de 0.

A los números enteros que forman el cociente $\frac{a}{b}$ se los llama numerador (a) y denominador (b). Todo número racional puede ser representado con una expresión decimal finita o periódica.

¿Cómo realizarían el pasaje de fracción a decimal?

EJEMPLO

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{23}{10} = 2{,}3$

$-\frac{5}{6} = -0{,}8333333333\ldots = -0{,}8\overline{3}$

$\frac{7}{3} = 2{,}333333333\ldots = 2,\overline{3}$

EXPRESIONES DECIMALES EXACTAS Y PERIÓDICAS

¿En qué se diferencian las anteriores expresiones decimales?

Recordemos que las expresiones decimales se diferencian en EXACTAS y PERIÓDICAS.

- *Expresiones decimales exactas:* Son aquellas expresiones decimales cuya parte decimal es finita.

EJEMPLO

$\frac{3}{2} = 1{,}5$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\frac{23}{10} = 2{,}3$

Logramos el pasaje de una expresión decimal exacta a su expresión fraccionaria de la siguiente manera:
Formamos el numerador escribiendo la parte entera y la parte decimal juntas, es decir, el número “sin la coma”, y el denominador se forma por un número que comienza en 1 seguido de tantos 0 como cifras decimales se tenga.

EJEMPLO

$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $2{,}3 = \frac{23}{10}$

- *Expresiones decimales periódicas:* Son aquellas expresiones decimales cuya parte decimal está formada por cifras que se repiten indefinidamente.

EJEMPLO

$-\frac{5}{6} = -0{,}8333333333\ldots = -0{,}8\overline{3}$ $\frac{7}{3} = 2{,}333333333\ldots = 2{,}\overline{3}$

Las expresiones decimales periódicas se clasifican en:

- *Expresiones decimales periódicas puras:* su parte decimal es periódica en su totalidad. Hacemos su pasaje aplicando la siguiente regla:
  En el numerador colocamos todo el número, sin la coma, y restamos la parte entera; el denominador lo formamos con tantos 9 como cifras tenga el período.

EJEMPLO

$$2{,}333333333\ldots = 2{,}\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

- *Expresiones decimales periódicas mixtas:* su parte decimal está formada por una o más cifras no periódicas, seguidas de una cifra o varias cifras periódicas.
  Hacemos su pasaje aplicando la siguiente regla:
  En el numerador escribimos todo el número (sin la coma) menos el número formado por la parte entera y la/s cifra/s no periódica/s. En el denominador, escribimos tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras decimales no periódicas tenga.

EJEMPLO

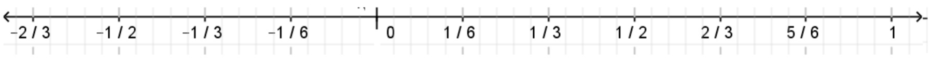
$$-0{,}8333333333\ldots = -0{,}8\overline{3} = -\frac{83-8}{90} = -\frac{75}{90} = -\frac{5}{6}$$

$$5{,}8732323232\ldots \;=\; 5{,}87\overline{32} = \frac{58732-587}{9900} = \frac{58145}{9900}$$

Para ubicar fracciones en la recta numérica dividimos la unidad (el entero) en tantos segmentos iguales como indica el denominador, y se ubica la fracción según indica el numerador:

EJEMPLOS

Si debemos ubicar números con denominador 6, dividimos la unidad en 6 partes iguales.



A los puntos de la recta que corresponden a números racionales se los llama *puntos racionales.*
En cualquier segmento AB de la recta, existe un punto racional, o lo que es equivalente, entre dos puntos A y B cualesquiera existen infinitos puntos racionales. Sin embargo, los puntos racionales, a pesar de estar tan próximos como se desee, no llenan la recta.

¿Cuál es la expresión decimal de los números $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; e?
¿Pueden clasificar su expresión decimal?

NÚMEROS IRRACIONALES

Existen números decimales que no pueden expresarse como fracción. Esos números pertenecen al conjunto de los números irracionales y dicho conjunto se denota con la letra $\mathbb{I}$.

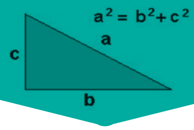
EJEMPLOS

$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; π ; e ; $\sqrt{p}$ (si p es un n° primo)

Para representar un número irracional que se exprese como raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto $\sqrt{p}$, debemos basarnos en el Teorema de Pitágoras.

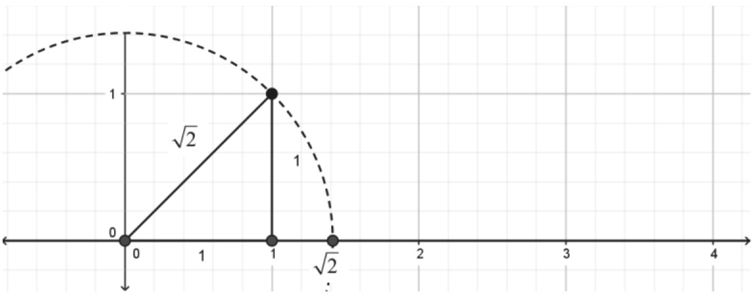
Nota: Un número se define cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es un número entero.

Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



EJEMPLO

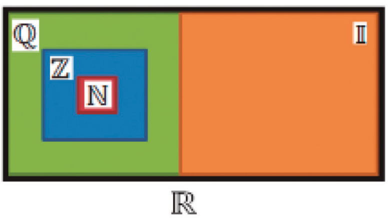
Para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica, debemos considerar dicho número como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



Te proponemos ubicar en la recta numérica $\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{13}$

La unión del conjunto de los números racionales y el de los números irracionales es el conjunto de **números reales** $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$



Se lee: La unión ($\cup$) de los conjuntos racionales ($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{I}$) es igual a todos los números reales ($\mathbb{R}$)

¿A qué distancia de 0 están los números 3 y -3?
¿Qué valores de "x" son solución de $x^2 = 4$?

VALOR ABSOLUTO DE NÚMEROS REALES

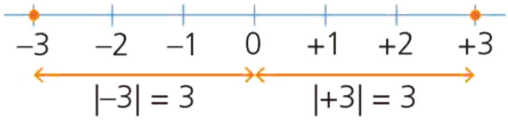
Todo número real se puede representar en la recta numérica. Definimos valor absoluto o módulo de un determinado número a la distancia que posee dicho número al cero. En símbolos:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Las barras se leen como el valor absoluto de lo que está dentro de ellas.

EJEMPLO

$|3| = 3$ $\qquad$ $|-3| = 3$



$$|15 - 20| = |-5| = 5$$

Verdadero o falso:

- $(4-3)+5 = 4-(3+5)$ V F
- $5-3 = 3-5$ V F
- $5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 5 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)\right]$ V F
- $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right) \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$ V F
- $-5+0 = -5 \cdot 0$ V F

PROPIEDADES EN $\mathbb{R}$

Al operar con números reales se presentan ciertas propiedades. Sean $a, b, c, \in \mathbb{R}$

Propiedad	Adición	Producto
Asociativa	$a + (b+c) = (a+b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	$a+0 = 0+a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento inverso	$a+(-a) = -a+a = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva del producto con respecto a la adición	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

PARA COMPLETAR

Cada uno de los enunciados siguientes es una consecuencia de alguna de las propiedades enunciadas anteriormente, indiquen en cada caso cual es aplicable:

CÁLCULO	PROPIEDAD
A. $3 + (-3) = 0$	
B. $7 \cdot (x + y) = 7 \cdot x + 7 \cdot y$	
C. $2 + (x + 3) = (x + 3) + 2$	
D. $-7+(5+1)=(-7+5)+1$	
E. $4 \cdot (x \cdot 5) = (x \cdot 4) \cdot 5$	

OPERACIONES EN $\mathbb{Q}$

ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Para poder sumar números racionales expresados en fracción, éstos deben tener un mismo denominador.

- Si los números tienen igual denominador, sumamos y restamos sus numeradores según corresponda:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

EJEMPLO

$$\frac{5}{9} + \frac{14}{9} = \frac{5+14}{9} = \frac{19}{9}$$

- Si los números tienen distinto denominador, debemos expresarlos en fracciones equivalentes, cuyos denominadores sean el *mínimo común múltiplo* entre los denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

30 = 2 x 3 x 5
45 = 3^2 x 5

m.c.m. (30, 45) = 2 x 3^2 x 5 = 90

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes distinto de cero.
Para calcularlo descomponemos los números en factores primos y el mínimo común múltiplo será igual al producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
El mínimo común múltiplo de dos números *primos entre sí* es su producto.

EJEMPLO

$$\frac{5}{8}+\frac{1}{6}=\frac{15}{24}+\frac{4}{24}=\frac{19}{24}$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Restar un número es igual a sumar su opuesto:
$a - b = a + (-b)$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La multiplicación de fracciones da como resultado una nueva fracción cuyo nuevo numerador es el producto de los numeradores y el nuevo denominador es el producto de los correspondientes denominadores. En símbolos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

$$5\cdot\frac{8}{3}=\frac{5}{1}\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{1\cdot 3}=\frac{40}{3}$$

Todo número entero es también racional ya que se puede expresar como fracción
$\frac{a}{b}$ con $b = 1$: $a = \frac{a}{1}$

¿Qué resultado tienen las siguientes operaciones:
$\frac{4}{7}:\frac{2}{5}$ =? ¿Y $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{2}$ =?

¿Qué relación tienen los números $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{2}$?

Dividir por un número es igual a multiplicar por su inverso:
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

¿Prefieren comer las tres cuartas partes de una pizza o las $\frac{9}{12}$?

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellas fracciones que representan una misma cantidad. Podemos establecer fracciones equivalentes por dos métodos:

- *Simplificación:* realizamos la división exacta del numerador y del denominador por un mismo número.

Ejemplo: $\frac{15}{90} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{6}$

Se llama **fracción irreducible** a la fracción que no puede simplificarse más.

- Amplificación: multiplicamos por un mismo número el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$

La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las doce pruebas de Hércules. La Hidra era un monstruo con una cabeza, pero si se le cortaba, le nacían dos cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿Cuántas cabezas tendría laHidra el tercer día? ¿Y al cabo de diez días intentando vencerla?

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS REALES

Dados un número real a y un número entero n, definimos la potencia a^n como el resultado de multiplicar a por sí mismo una cantidad n de veces. En símbolos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ veces}$$

En tal caso, llamamos al número a ”base” de la potencia y a n, ”exponente”.

PROPIEDADES

Sean a, b, $\in$, $\mathbb{R}$, y, n, $\in$, $\mathbb{Z}$, se cumple:

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA DIVISIÓN	$(a{:}\, b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n{:}\, b^n;\ b \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}:\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{6}\right)^2$
PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	$a^n{:}\, a^m = a^{n-m}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$
POTENCIA DE OTRA POTENCIA	$[a^n]^m = (a)^{n \cdot m}$	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$
POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

En la propiedad *potencias de exponente negativo,* ¿por qué elevar a un exponente negativo es igual a invertir la base y aplicar la potencia positiva?

EJEMPLO

$$\frac{a^{-3} \cdot a^4 : a^5}{(a^2)^{-3}} = \frac{a^{-3+4-5}}{a^{-6}} = \frac{a^{-4}}{a^{-6}} = a^{-4-(-6)} = a^2$$

$$\left(\frac{2 \cdot x^2 \cdot y}{w^3}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot (x^2)^4 \cdot y^4}{(w^3)^4} = \frac{16 \cdot x^8 \cdot y^4}{w^{12}}$$

Observación:

- Potencias de base negativa y exponente par da como resultado un valor positivo

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

- Potencias de base negativa y exponente impar da como resultado un valor negativo

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

El diámetro de un átomo de hidrógeno es aproximadamente igual a $0{,}0000000001$ metros y su masa es aproximadamente igual a $0{,}0000000000000000000000000017$ kg.
Resulta más que necesario para la ciencia poder expresar estos números de un modo más sencillo. ¿Cómo lo harían?

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros dos números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero.

$$n^\circ = C\cdot 10^p; \qquad donde \quad 1<|C|<10 \quad y \quad p\in\mathbb{Z}$$

EJEMPLO

$$23.500.000.000 = 2{,}35 \cdot 10.000.000.000 = 2{,}35 \cdot 10^{10}$$
$$0{,}000076=7{,}6 \cdot 10^{-5}$$
$$420.000.000.000 \cdot 0{,}000004 = 4{,}2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 16{,}8 \cdot 10^{5} = 1{,}68 \cdot 10^{6}$$

¿Por qué los números muy grandes se expresan en potencia de base 10 con exponente postivo y los números demasiados pequeños, con potencia de base 10 de exponente negativo?

REGLA PRÁCTICA

Para expresar un número en notación científica ($n° = C \cdot 10^p$) se obtiene:

- El primer factor colocando la coma inmediatamente después del primer dígito distinto de cero de la izquierda (C).
- El segundo factor que es una potencia de 10 (10^p). Para obtener el exponente, se cuenta el número de dígitos que tienen que saltarse para mover la coma de su nueva posición a la original. Si el movimiento es hacia la derecha, el exponente es positivo; si el movimiento es hacia la izquierda, el exponente es negativo. Verifiquen esta regla con el ejemplo antes resuelto.

¿Tiene $\sqrt{4}$ una única solución?
¿Es $\sqrt{4} = 2$ ó $\sqrt{4} = -2$?
¿O ambos son resultados posibles?

RADICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La operación de radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación. Es la operación inversa si lo que se desconoce es la base.

$$a^n = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$$

- b es el radicando
- n se denomina índice
- a es la raíz enésima
- $\sqrt{\ }$ se denomina radical

EJEMPLOS

- $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$
- $\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$
- $\sqrt{-4} = \nexists$ ya que no existe un número racional (ni real) que elevado a potencia par de negativo

Observación:

- Toda raíz de índice par y radicando positivo tiene dos soluciones: un resultado positivo (raíz principal) y uno negativo.
- Toda raíz de índice impar y radicando positivo tiene una solución (un número positivo).
- Toda raíz de índice impar y radicando negativo tiene una solución (un número negativo).

PROPIEDADES

Sean a, b, $\in$, $\mathbb{R}$, y, n, $\in$, $\mathbb{Z}$, se cumple:

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{27\cdot 125}=$ $\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=$ $3\cdot 5=15$
DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA DIVISIÓN	$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b},\quad b\neq 0$	$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$
RAIZ DE RAIZ	$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[q\cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=2$

EXPONENTE FRACCIONARIO

La radicación puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=a^{\frac{p}{n}}$$

EJEMPLO

$$16^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}\qquad 8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\qquad \sqrt[5]{\left(\sqrt[6]{\pi^5}\right)^3}=\left(\pi^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{5}}=\pi^{\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}}=\pi^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

EJEMPLO

$$(4)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{4^2}=\sqrt[4]{16}=2\qquad (-4)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{16}=2$$

EN AMBOS CASOS, 2 ES LA RAÍZ PRINCIPAL

Si p y n son iguales se cumple: $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{Si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{Si } n \text{ es par} \end{cases}$

SIMPLIFICACIÓN

Un caso particular de la simplificación de raíces es la estudiada anteriormente:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

De manera general, podemos decir que es posible simplificar el índice de la raíz y el exponente del radicando sin alterar el resultado, si ambos se pueden dividir por un mismo número.

Para simplificar un radical dividimos el índice y el exponente del radical por el máximo común divisor de los dos. Lo que obtenemos es un radical EQUIVALENTE.

$$\sqrt[n:q]{a^{p:q}} = \sqrt[n]{a^p}, \quad con\ q \neq 0$$

EJEMPLOS

$$\sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3\cdot 1]{2^{3\cdot 4}} = 2^4$$

$$\sqrt[15]{x^{10} \cdot y^5} = \sqrt[3\cdot 5]{x^{2\cdot 5} \cdot y^{1\cdot 5}} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

Observación:

Radicales equivalentes se pueden obtener al dividir por un mismo número (distinto de cero) indice y exponente, como así también multiplicar por un mismo número.

$$\sqrt[n\cdot q]{a^{p\cdot q}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Para multiplicar o dividir radicales, éstos deben ser equivalentes.

EJEMPLO

Al resolver $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{10}$, debemos establecer radicales equivalentes para poder realizar la operación, ya que poseen distintos índices. Para ello buscamos el mínimo común múltiplo entre los índices:

$$\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt[3\cdot 2]{10^2} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{10^3} = \sqrt[6]{10^2} \cdot \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{10^2 \cdot 10^3} = \sqrt[6]{10^5}$$

¿Es su mínima expresión?

EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL RADICAL

Una aplicación de la simplificación de radicales es la extracción de factores del radical.

Para simplificar radicales a su más simple expresión se descompone en sus factores primos.

Analicemos un ejemplo: Extraer factores de $\sqrt{32}$ y de $\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5}$

EJEMPLO

Factorizamos el 32

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Otra manera:

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

EJEMPLO

Les proponemos extraer factores de $\sqrt{540}$

$$\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x \cdot y^3 \cdot y^2} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y^2} =$$
$$x \cdot x\sqrt[3]{x} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt[3]{xy^2}$$

Otra manera:

$$\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x \cdot y^3 \cdot y^2} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y^2} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt[3]{xy^2}$$

OPERACIONES CON RADICALES

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar radicales se debe aplicar la propiedad distributiva de la radicación con respecto al producto. Es decir, para multiplicar dos o más radicales, se debe tener el mismo índice y multiplicar los radicandos.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{5 \cdot 75} = \sqrt[3]{375} \underbrace{=}_{\substack{extrayendo \\ factores \\ del \\ radical}} 5 \cdot \sqrt[3]{3}$$

DIVISIÓN

Para dividir radicales se debe aplicar la propiedad distributiva de la radicación con respecto al cociente. Es decir, para dividir dos radicales, se debe tener el mismo índice y dividir los radicandos.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{75}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{75:5}=\sqrt[3]{15}$$

Al resolver algunas divisiones, puede ocurrir que el resultado sea un número con denominador irracional.

RACIONALIZACIÓN

Racionalizar consiste en eliminar los radicales del denominador de una fracción. Para lograr esto, se multiplican los dos componentes del cociente por una expresión que contenga el radical por eliminar y que cumpla que, al multiplicarse, el denominador resulte una expresión racional.

Podemos encontrar diferentes casos:

- El denominador está compuesto por un solo término con raíz. Se pueden diferenciar en:
  Su radicando es un solo factor. EJEMPLO: $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

  Su radicando tiene varios factores. EJEMPLO: $\frac{3}{\sqrt[3]{a^2 \cdot b}}$

Si se tiene un radical con índice mayor que 2 de la forma $\sqrt[n]{a^p}$ $(n>p)$, se multiplica numerador y denominador por un radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, para seguir operando y simplificando hasta obtener un denominador racional.

EJEMPLOS

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}}\cdot\overbrace{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}}^{=1}\underbrace{=}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de radicales}}}\frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}\underbrace{=}_{\text{simplificando}}\frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{a^2\cdot b}}=\frac{3}{\sqrt[3]{a^2\cdot b}}\cdot\overbrace{\frac{\sqrt[3]{a\cdot b^2}}{\sqrt[3]{a\cdot b^2}}}^{=1}\underbrace{=}_{\substack{\text{multiplicación}\\ \text{de radicales}}}\frac{3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b^2}}{\sqrt[3]{a^3\cdot b^3}}\underbrace{=}_{\text{simplificando}}\frac{3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b^2}}{a\cdot b}$$

- El denominador está compuesto por dos términos, en los cuales uno o los dos están afectados por raíces cuadradas. EJEMPLO: $\frac{6}{\sqrt{7}-2}$.

Para racionalizar, en este caso, debemos aplicar el producto de conjugados.

EJEMPLO

$$\frac{6}{\sqrt{7}-2}=\frac{6}{\sqrt{7}-2}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt{7}+2}^{\text{conjugado del denominador}}}{\sqrt{7}+2}\underbrace{=}_{\text{multiplicación de radicales}}\frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2-2^2}\underbrace{=}_{\text{simplificando}}\frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{7-4}=\frac{6\cdot(\sqrt{7}+2)}{3}=2\cdot(\sqrt{7}+2)$$

Diferencia de cuadrados
Recordemos que el producto de la suma de dos números por la diferencia de esos mismos es igual a la diferencia de sus cuadrados.

En símbolos:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

SUMA Y RESTA
Radicales semejantes son aquellos que tienen igual radicando y el mismo índice, es decir, sólo difieren por el coeficiente: $\sqrt[3]{5}$ y $8\sqrt[3]{5}$ son semejantes.

Así, dos o más radicales pueden sumarse o restarse si son radicales semejantes.

EJEMPLO

$$2\cdot\sqrt{3}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}=\left(2+\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{7}{2}\cdot\sqrt{3}$$

En algunos casos, cuando los radicales no son semejantes, pueden transformarse en semejantes al aplicar el concepto de extracción de factores del radical.

EJEMPLO

$$8 \cdot \sqrt{50} - 2\sqrt{98} - 12\sqrt{2}$$

Factorizado los números 50 y 98:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot \sqrt{50} - 2 \cdot \sqrt{98} - 12 \cdot \sqrt{2} &= 8 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 2} - 2 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 2} - 12 \cdot \sqrt{2} \\ &= 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ &= 40 \cdot \sqrt{2} - 14 \cdot \sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ &= (40 - 14 - 12) \cdot \sqrt{2} \\ &= 14 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Si la Hidra de Lerna tiene 32 cabezas, ¿cuántos cortes realizó el héroe?
¿En cuántos cortes la hidra tendrá 1024 cabezas?

LOGARITMACIÓN

En matemáticas, el *logaritmo* de un número, en una base determinada, es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad \} \, Logaritmo\ por\ definición$$

El logaritmo es una de las operaciones inversas de la potenciación, si lo que se desconoce es el exponente.

La base b debe ser mayor que cero y distinta de 1. En símbolos, $b > 0$ y $b \neq 1$.
En tanto, el argumento, denotado como a, debe ser mayor a cero.
En símbolos, $a > 0$.
El resultado del logaritmo puede ser cualquier número real, por ser el valor de un exponente.

EJEMPLOS

$$log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

$$log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$$

$$log_{\frac{1}{2}} 4 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$$

LOGARITMOS DECIMALES Y NATURALES

Se llaman *logaritmos decimales* a aquellos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales, es frecuente no escribir la base.

$$log_{10} a = log\ a$$

Se llaman *logaritmos naturales* o neperianos a los logaritmos que tienen por base el número e.

$$log_e a = ln\ a$$

Los invitamos a ver en youtube los videos:

- Logaritmos explicados, de Steve Kelly
- ¿Cómo guían las matemáticas nuestros barcos en alta mar?, de George Christoph

PROPIEDADES

PROPIEDAD	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
DEL PRODUCTO	$log_b(a \cdot d) = log_b a + log_b d$	$log_2(16 \cdot 64) = log_2 16 + log_2 64 = 4 + 6 = 10$
DE LA DIVISION	$log_b(a:d) = log_b a - log_b d$	$log_3(81:3) = log_3 81 - log_3 3 = 4 - 1 = 3$
DE LA POTENCIA	$log_b a^p = p \cdot log_b a$	$log_4 16^5 = 5 \cdot log_4 16 = 5 \cdot 2 = 10$
DE LA RAIZ	$log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot log_b a$	$log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{1}{4} \cdot log_3 27 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$
NULO	$log_b 1 = 0$	
IDENTIDAD	$log_b b = 1$	
PROPIEDAD FUNDAMENTAL	$b^{log_b a} = a$	

Pero si sólo en la calculadora se pueden calcular logaritmos
De base 10 o e, ¿cómo podemos calcular logaritmos en diferentes bases?

CAMBIO DE BASE

Para lograr calcular logaritmos con base distinta de 10 o e en la calculadora, debemos aplicar un cambio de base. El cual se define de la siguiente manera:

$$log_b\, a = \frac{log\, a}{log\, b} = \frac{ln\, a}{ln\, b}$$

El cambio de base también se aplica para cualquier tipo de base:

$$log_b\, a = \frac{log_q\, a}{log_q\, b}$$

EJEMPLO

$$log_7\, 35 = \frac{log\, 35}{log\, 7} \cong \frac{1{,}544}{0{,}845} \cong 1{,}827$$

$$log_7\, 35 = \frac{ln\, 35}{ln\, 7} \cong \frac{3{,}555}{1{,}946} \cong 1{,}827$$

Las siguientes expresiones son utilizadas en la vida cotidiana:

- "Debo responder correctamente al menos 6 de 10 preguntas para aprobar".
- "Puedo faltar como máximo dos clases a la cursada"
- "Los valores normales de glóbulos rojos son 4.500.000-5.900.000/Ml en varones y 4.000.000-5.200.000/Ml en mujeres

Expresarlas en lenguaje matemático. ¿Qué concepto matemático utilizarías?

DESIGUALDAD. INTERVALOS Y RECTA NUMÉRICA

Una desigualdad se establece por cualquiera de los siguientes símbolos:

$$\begin{cases} \text{"mayor que" } (>) \\ \text{"menor que" } (<) \\ \text{"mayor o igual que" } (\geq) \\ \text{"menor o igual que" } (\leq) \end{cases}$$

EJEMPLO

DESIGUALDAD	EJEMPLO
$a > b$ (a es mayor que b)	$-3 > -5$
$a < b$ (a es menor que b)	$-2 < 7$
$a \geq b$ (a es mayor o igual que b)	$15 \geq \sqrt{10}$
$a \leq b$ (a es menor o igual que b)	$\frac{10}{7} \leq 15$

EJEMPLOS

- Si representa las respuestas correctas, la proposición se puede representar de la siguiente manera:

$$6 \leq x \leq 10$$

- Si representa la cantidad de clases que se pueden faltar, se representa de la siguiente manera:

$$0 \leq x \leq 2$$

- Si representa la cantidad de glóbulos rojos, se puede representar:

  Hombres: $4500000 < x < 5900000$
  Mujeres: $4000000 < x < 5200000$

INTERVALOS EN LA RECTA NUMÉRICA

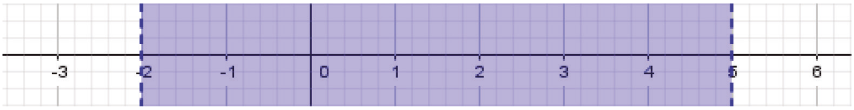
Un intervalo es un conjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una semirrecta en la recta real.

Según incluyan o no a los puntos extremos, los intervalos pueden ser abiertos, semiabiertos o cerrados.

NOMBRE	INTERVALO	SIGNIFICADO	RECTA
INTERVALO ABIERTO	$(a; b)$	Números comprendidos entre a y b	
INTERVALO CERRADO	$[a; b]$	Números comprendidos entre a y b, ambos incluidos	
INTERVALO SEMIABIERTO	$(a; b]$	Números entre a y b, incluido b	
	$[a; b)$	Números entre a y b, incluido a	
SEMIRRECTA	$(-\infty; a)$	Números menores que a	
	$(a; +\infty)$	Números mayores que a	
	$(-\infty; a]$	Números menores o iguales que a	
	$[a; +\infty)$	Números mayores o iguales que a	

EJEMPLOS

El intervalo abierto $(-2;5)$ es el conjunto de todos los números mayores a -2 pero menores que 5.
Dicho intervalo puede expresarse por medio de una desigualdad: $-2 < x < 5$
Incluso podemos representarlo en la recta numérica:



Una semirrecta $[3; \infty)$ es el conjunto de todos los números mayores o iguales a 3.
Dicho intervalo puede expresarse por medio de una desigualdad: $3 \leq x$
Incluso podemos representarlo en la recta numérica: