CAPÍTULO 4

FUNCIONES Y ECUACIONES CUADRÁTICAS

Dadas las siguientes fórmulas, determinen cuáles representan funciones cuadráticas. ¿Cómo las reconocen?

$f(x) = 3x + 7$ $\qquad$ $i(x) = 2x^2 - 5x$

$g(x) = 2(x-1)^2 + 9$ $\qquad$ $j(x) = -6x$

$h(x) = 5x^3 + 2x$ $\qquad$ $k(x) = -x(x+2)$

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN CUADRÁTICA?

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales y $a \neq 0$, es una **función cuadrática** expresada en su forma polinómica.

¿Por qué se llama forma polinómica?

EJEMPLOS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS ESCRITAS EN FORMA POLINÓMICA

$f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $g(x) = 6x^2$

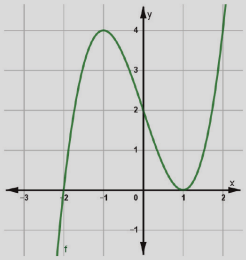
$h(j) = 15j - j^2$ $\qquad$ $j(t) = 3t^2 + 5$

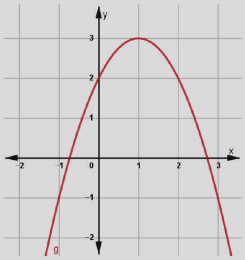
¿Cuánto valen a, b, c en cada caso?

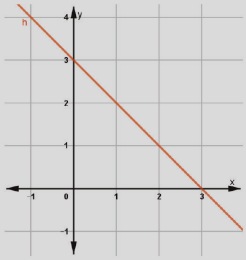
Recordamos tres formas de expresar una función cuadrática, cada una nos "muestra" distintos elementos de la curva que representa a la función.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	a, x_1, x_2

¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función cuadrática?

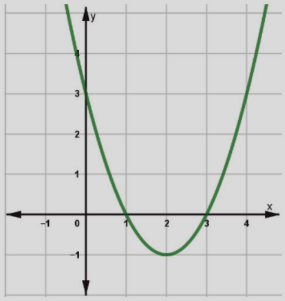






La gráfica de una función cuadrática es una curva llamada **parábola**. Ésta es simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas, que pasa por el punto mínimo o máximo. Esta recta recibe el nombre de **eje de simetría**.

Les proponemos marcar en el gráfico: vértice, eje de simetría y un par de puntos simétricos.



ALGUNAS CARACTERISTICAS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

- Es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente presentando un valor **máximo o mínimo** en un punto que denominamos **vértice**.
- Está compuesta por **puntos simétricos** (salvo el vértice). Éstos son los puntos del dominio de la función que tienen la misma imagen.
- El **eje de simetría** es una recta vertical que corta la parábola en el vértice, dividiéndola en dos partes congruentes y simétricas.

A continuación, listamos algunos ejemplos de situaciones en contexto real donde se utiliza la función cuadrática para modelizar:

- El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un auto está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la función $r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$
- Desde un barco que se encuentra en situación de emergencia se efectúa un disparo, en forma vertical, con una pistola de señales. El destello podrá verse desde la base naval más cercana únicamente mientras el proyectil se encuentre a una altura no menor de 195 metros sobre el nivel del mar. Los técnicos que integran la tripulación estiman que, de acuerdo con las características de la pistola de señales y con las condiciones en que se dispara, la altura del destello estará dada por la siguiente fórmula: $h(t) = -5t^2 + 80t$, donde h es la altura sobre el nivel del mar, en metros, alcanzada por el proyectil luego de transcurrido un tiempo t, en segundos, desde el momento del disparo.

¿CUÁL ES EL DOMINIO Y LA IMAGEN DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA?

El dominio de la función cuadrática está formado por todos los números reales porque podemos evaluar la función en cualquiera de esos valores: $Dom(f) = \mathbb{R}$.
Si las gráficas que representan una función cuadrática son parábolas, que tienen un máximo o un mínimo en su vértice, ¿cómo sería la imagen?

- Si $f(x)$ es una función cóncava $\Rightarrow Im\ (f) = [y_v; \infty)$
- Si $f(x)$ es una función convexa $\Rightarrow Im(f) = (-\infty; y_v]$

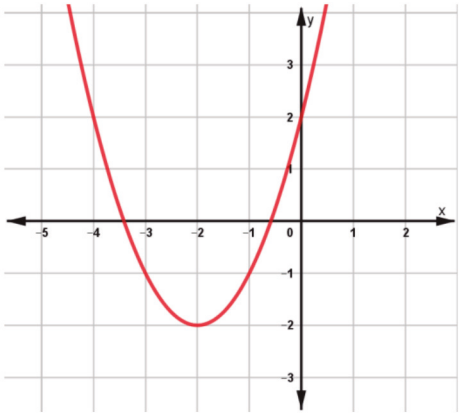
¿Por qué usamos corchetes?

EJEMPLO

En la función representada, tenemos:

$Dom\ (f) = \mathbb{R}$

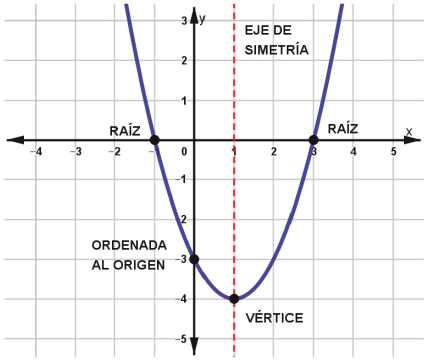
$Im(f) = [-2; \infty)$



¿CÓMO CONSTRUIR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SU FÓRMULA?

Para poder graficar una parábola basta con conocer algunos ELEMENTOS importantes en ella:

- Las raíces.
- El vértice.
- El eje de simetría.
- La ordenada al origen.



¿CÓMO RECONOCER O CALCULAR ESTOS ELEMENTOS A PARTIR DE LAS DIFERENTES FORMAS DE EXPRESIÓN?

Dependiendo de la forma en que esté expresada la función cuadrática podemos identificar algunos elementos; otros debemos calcularlos. Veamos:

El análisis de la concavidad es análogo en las tres formas de expresión.

FORMA CANÓNICA $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$

∗ El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.
- Si $a > 0$ la parábola es cóncava.
- Si $a < 0$ la parábola es convexa.

¿Por qué ocurrirá esto?

∗ x_v e y_v son las coordenadas del vértice $V = (x_v; y_v)$
∗ x_v determina la ecuación del eje de simetría $x = x_v$
∗ Debemos calcular las raíces y la ordenada al origen.

¿Cómo calcularían las raíces y la ordenada al origen?

EJEMPLO

Representemos gráficamente la siguiente función cuadrática escrita en forma canónica:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$$

¿Qué elementos de la gráfica identificamos a partir de esta expresión?

- $a = \frac{1}{2}$ $(a > 0)$, entonces la función es cóncava. Es decir, tendrá sus ramas hacia arriba.
- El vértice de la parábola es $V = (-3; -2)$
- La ecuación del eje de simetría es $x = -3$

Calculemos las **raíces** resolviendo la ecuación :

$$0 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$$

$$2 = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

$$4 = (x+3)^2$$

¿Por qué debemos igualar a cero la función para calcular las raíces?

$$\sqrt{4} = |x+3|$$

$$x + 3 = 2 \quad \wedge \quad x + 3 = -2$$

$\boxed{x = -1} \wedge \boxed{x = -5}$ Entonces, las raíces resultan $x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = -5$

Calculemos la **ordenada al origen**:

$$f(0) = \frac{1}{2}(0+3)^2 - 2$$

$$f(0) = \frac{1}{2}.9 - 2$$

$$\boxed{f(0) = \frac{5}{2}}$$

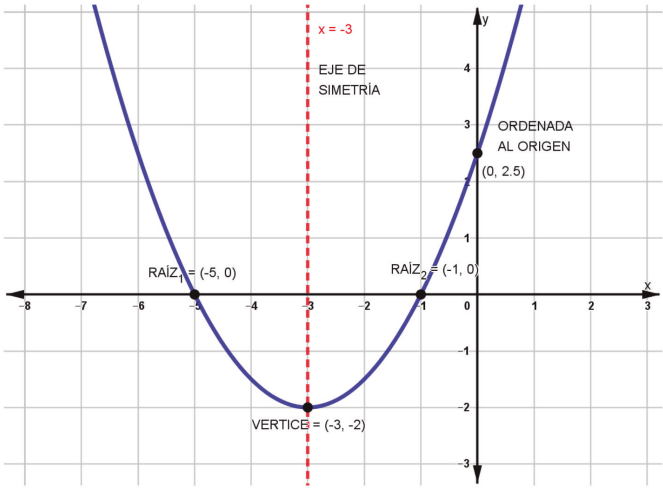
¿Por qué debemos evaluar la función en cero para calcular la ordenada al origen?

En síntesis, la información que tenemos sobre la parábola de la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$ es:

- Cóncava
- $V = (-3; -2)$
- Eje de simetría $x = -3$
- Raíces $(-1; 0)$ y $(-5; 0)$
- Ordenada al origen $\left(0; \frac{5}{2}\right)$
- $Im\ (f)$: $[-2; \infty)$

Con esta información, ¿pueden expresar la función en forma factorizada?

La gráfica de la función cuadrática quedaría así:



FORMA FACTORIZADA $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

- El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.
- x_1 y x_2 son los ceros o raíces de la función.
- Debemos calcular el vértice y la ordenada al origen.

EJEMPLO

Estudiemos analíticamente la siguiente función cuadrática escrita en forma factorizada:

$$f(x) = -2(x-1)(x-3)$$

Veamos la información que brinda la fórmula sobre la gráfica:

- $a = -2$ $(a < 0)$, entonces la parábola es convexa. Es decir, tiene las ramas hacia abajo.
- Las raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Para calcular la **coordenada** "x" **del vértice** basta con calcular el punto medio entre las raíces, porque son un par de puntos simétricos.

Es decir, $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

Luego, calculamos la **coordenada** "y" **del vértice** evaluando la función en x_v, es decir, en 2:

$$f(2) = -2 \cdot (2-1) \cdot (2-3) = 2$$

Calculamos la **ordenada al origen** evaluando la función en 0:

$$f(0) = -2 \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 3) = -6$$

Los invitamos a completar con la información que calculamos sobre la parábola de la función

$$f(x) = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$$

Cóncava o convexa: .....
Raíces: .....
Vértice: .....
Eje de simetría: .....
Ordenada al origen: .....
Imagen: .....

Con esta información, ¿pueden expresar la función en forma canónica?

Les proponemos realizar con lápiz y papel la gráfica de la función que analizamos, luego pueden usar geogebra para compararla.

FORMA POLINÓMICA $f(x) = ax^2 + bx + c$

- El coeficiente a indica la concavidad de la parábola.
- El coeficiente c es la ordenada al origen, pues, al evaluar la función en $x = 0$, resulta $f(0) = c$.
- Debemos calcular las raíces y las coordenadas del vértice.

Recordemos que si la expresión está completa $(a, b, c \neq 0)$, para calcular los ceros de la función debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, para lo cual utilizamos la **fórmula resolvente** (fórmula de Bhaskara).

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

¿Saben cómo se obtuvo esta fórmula?

Para calcular el vértice es válido seguir el procedimiento de tomar el punto medio entre las raíces y evaluarlo en la función.
También podemos utilizar la fórmula $x_v = -\frac{b}{2.a}$ para calcular la coordenada *x* del vértice y luego encontrar y_v haciendo $f(x_v)$.

Les proponemos analizar y representar gráficamente la función $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

¿Cómo se obtiene la fórmula $x_v = -\frac{b}{2.a}$?

Si logramos calcular las coordenadas x de dos puntos simétricos, podremos obtener la coordenada x_v que estará justo en el medio de ellos. Como la fórmula está expresada en forma polinómica, contamos con la ordenada al origen $(0; c)$, entonces buscaremos la coordenada x del simétrico de la ordenada al origen que tiene la misma imagen c.

Simbólicamente, implica plantear y resolver la siguiente ecuación: $x^2 + bx + c = c$

Restando c en ambos miembros

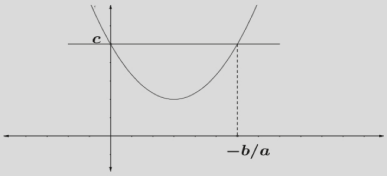
$$ax^2 + bx = 0$$

Sacando factor común x

$$x(ax + b) = 0$$

Para que este producto de dos factores dé cero, alguno de los dos debe ser cero:

$$x = 0 \text{ ó } ax + b = 0 \implies x = 0 \text{ ó } x = -\frac{b}{a}$$



Los valores simétricos para $y = c$ son $x = 0$ ó $x = -\frac{b}{a}$; entonces, la coordenada x del vértice se encuentra en el medio de ellos:

$$x_v = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} \implies \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Conclusión: Las coordenadas del vértice de una parábola son: $V = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

¿En qué forma está expresada cada una de las siguientes funciones?

$f(x) = \frac{2}{3}(x + 5)^2$ $\qquad$ $g(x) = 2x^2$ $\qquad$ $h(x) = -x^2 - 1$

Notemos que en cada una de las funciones propuestas podemos reconocer más de una forma de expresión. De esta manera, podemos identificar más elementos de la parábola sin realizar cálculos.
Por ejemplo, $f(x) = \frac{2}{3}(x+5)^2$ está expresada en forma canónica y en forma factorizada. ¿Qué elementos de la parábola nos permite identificar?

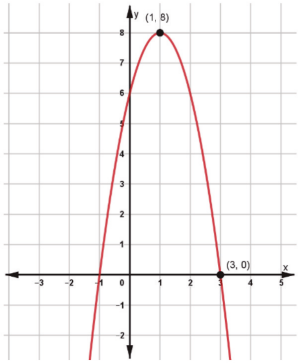
¿Qué elementos de la parábola se pueden identificar en $g(x)$ y $h(x)$?

¿CÓMO CONSTRUIR UNA FÓRMULA A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA?

Para encontrar la ecuación de la parábola que se observa en la gráfica, notemos que ella tiene vértice en el punto exacto $(1; 8)$. Entonces, reemplazando en la forma canónica, tenemos:

$$y = a(x-1)^2 + 8$$

Para encontrar el coeficiente "a" elegimos otro punto exacto por el que pase la curva, por ejemplo, el $(3; 0)$. Entonces, se satisface en la expresión anterior que:



$$0 = a(3-1)^2 + 8$$

$$0 = a2^2 + 8$$

$$-8 = 4a$$

$$-\frac{8}{4} = a \quad \rightarrow a = -2$$

Luego, la ecuación de la parábola en forma canónica es:

$$\boxed{y = -2(x-1)^2 + 8}$$

A partir de los elementos visibles de la gráfica ¿pueden construir otra fórmula? equivalente?

SISTEMA DE ECUACIONES MIXTOS

Ya hemos estudiado cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, pero… ¿cómo resolveríamos un sistema de ecuaciones mixto? Es decir, ¿cómo resolveríamos un sistema que tiene la siguiente forma?:

El parámetro "b" difiere en ambas funciones. Son letras que se utilizan para generalizar.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + b \end{cases}$$

Es un sistema mixto porque incluye ecuaciones de distinto tipo.

Sabemos que resolver un sistema de ecuaciones es encontrar el o los puntos de intersección (si existen) entre ambas funciones. Podemos calcular estos puntos en forma analítica o en forma gráfica utilizando los métodos que ya se explicaron para sistemas lineales.

EJEMPLO

Encontremos de forma analítica y gráfica las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones mixto.

$$\begin{cases} y - 1 = 2x \\ y - 5 + x = -x^2 \end{cases}$$

Resolvamos por el **método de igualación**. ¿Qué incógnita les parece más conveniente despejar? Como también nos piden resolver por el método gráfico, nos conviene despejar la incógnita y.

Entonces de la ecuación $y - 1 = 2x$ obtenemos:

$$y = 2x + 1 \quad \textbf{(1)}$$

Para realizar la gráfica de las funciones necesitamos que estén en forma explícita.

Y de la ecuación $y - 5 + x = x^2$ obtenemos:

$$y = x^2 - x + 5 \quad \textbf{(2)}$$

Con lo cual podemos igualar **(1)** y **(2)** y obtenemos la siguiente expresión:

$$-x^2 - x + 5 = 2x + 1$$

Igualamos a cero agrupando los términos semejantes para resolver esta ecuación cuadrática

$$-x^2 - x + 5 - 2x - 1 = 0$$
$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

Y aplicando la fórmula resolvente obtenemos $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$

Hallamos las coordenadas x de las soluciones. ¿Cómo podemos calcular las coordenadas y?

Reemplazamos los valores encontrados en cualquiera de las dos ecuaciones dadas y obtenemos:

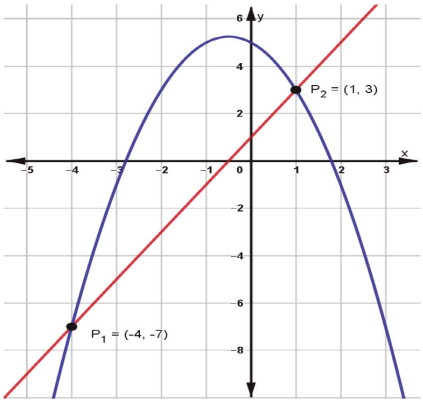
$$y - 1 = 2x$$
$$y = 2x + 1$$
$$y = 2(-4) + 1$$
$$y = -7$$

$$y - 1 = 2x$$
$$y = 2x + 1$$
$$y = 2 \cdot 1 + 1$$
$$y = 3$$

Entonces, las soluciones obtenidas, o **puntos de corte** entre las curvas, son:

$$S = \{(-4; -7); (1; 3)\}$$

Para realizar la **representación gráfica del sistema** tomamos **(1)** y **(2)** y construimos sus gráficas.
Para la gráfica de la función lineal $y = 2x + 1$ podemos usar la ordenada al origen y la pendiente como trabajamos en el capítulo anterior.
Para la gráfica de la función cuadrática $y = -x^2 - x + 5$ debemos hallar todos los puntos notables de la parábola.
Por lo tanto, la gráfica queda de la siguiente manera:



En este caso, el sistema de ecuaciones mixto tiene dos soluciones que coinciden con los cálculos analíticos.

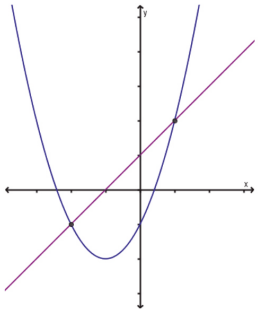
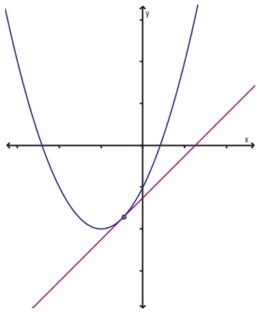
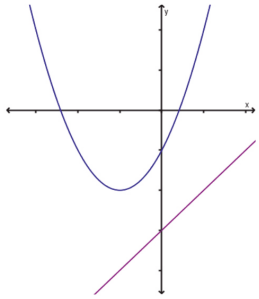
¿Siempre podremos encontrar dos soluciones?

¿CÓMO PODREMOS DETERMINAR LA CANTIDAD DE SOLUCIONES QUE TENDRÁ UN SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTO?

Podemos reconocer cuántas soluciones tiene un sistema mixto analizando el discriminante de la ecuación cuadrática que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.
En el ejemplo anterior obtuvimos dos soluciones y el discriminante era $\Delta=25$ que es un número positivo, es decir, mayor a cero.

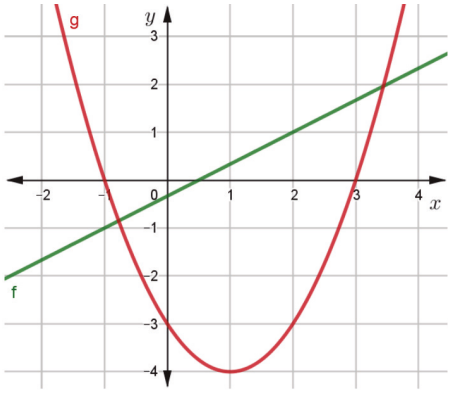
El valor que se encuentra dentro del radical, en la fórmula resolvente, recibe el nombre de discriminante y se simboliza de la siguiente manera:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

Si $\Delta > 0$ El sistema tiene dos soluciones distintas (Dos puntos de corte)	Si $\Delta = 0$ El sistema tiene una solución (Un punto de corte)	Si $\Delta < 0$ El sistema no tiene soluciones (Ningún punto de corte)
		
La recta es secante a la parábola.	La recta es tangente a la parábola.	La recta no corta a la parábola.

EJEMPLO

Encontremos de forma analítica los puntos de corte entre las siguientes curvas y representemos la solución de forma gráfica:



En primer lugar, tenemos que encontrar la ecuación que representa cada una de las curvas:

Ecuación de la Parábola:

Las raíces de la parábola están visibles y se encuentran en $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Reemplazando esto en la forma factorizada nos queda:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

Luego, para encontrar el valor del coeficiente a, consideramos algún punto exacto por el cual pase la curva, por ejemplo, el punto $(2; -3)$. Reemplazando en la última ecuación, tenemos:

$$-3 = a(2+1)(2-3)$$

$$-3 = a3(-1)$$

$$-3 = -3a$$

$$a = \frac{-3}{-3} \quad \rightarrow \quad a = 1$$

Finalmente, la ecuación de la parábola queda:

$$\boxed{\boldsymbol{y = (x+1)(x-3)}}$$

Ecuación de la Recta:

La ecuación general de una recta es $y = ax + b$

De la gráfica observamos que la recta pasa en forma exacta por los puntos $(2; 1)$ y $(-1; -1)$, entonces podemos calcular la pendiente "a" de la siguiente manera:

$$a = \frac{-1-1}{-1-2}$$

$$a = \frac{-2}{-3} \rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Reemplazando la pendiente en la ecuación, resulta:

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Luego para calcular la ordenada al origen "b", cualquiera de los dos puntos anteriores satisfacen la ecuación (por pertenecer a la recta), entonces tomando por ejemplo $(2; 1)$ y reemplazando tenemos:

$$1 = \frac{2}{3}2 + b$$

$$1 - \frac{4}{3} = b \quad \rightarrow \quad b = -\frac{1}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}}$$

Para encontrar de forma analítica los puntos de corte entre la parábola y la recta planteamos un sistema con las ecuaciones que previamente calculadas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = (x+1)(x-3)} & \boldsymbol{(1)} \\ \boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} & \boldsymbol{(2)} \end{cases}$$

Resolvamos por el **método de igualación** planteando $(1) = (2)$, ya que en ambas ecuaciones se encuentra la incógnita "y" de forma explícita:

$$(x+1)(x-3) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Usamos la propiedad distributiva en el primer miembro:

$$x^2 - 2x - 3 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 2x - 3 - \frac{2}{3}.x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

Utilizamos la **fórmula resolvente** y obtenemos como solución de esta última ecuación las coordenadas de los puntos de corte:

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{10}}{3} \cong 3{,}44 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{10}}{3} \cong -0{,}77$$

Luego, encontramos la coordenada para reemplazar los valores encontrados en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema. Por ejemplo, reemplazando en la ecuación (2) resulta:

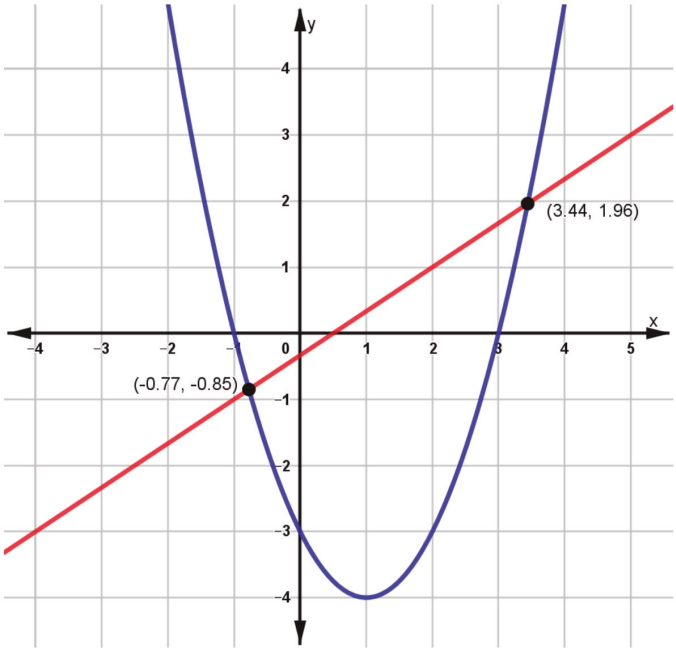
Para $x_1 \cong 3{,}44$

$$y_1 = \frac{2}{3}3{,}44 - \frac{1}{3} = \quad \rightarrow \quad y_1 = 1{,}96$$

Para $x_2 \cong -0{,}77$

$$y_2 = \frac{2}{3}(-0{,}77) - \frac{1}{3} = \quad \rightarrow \quad y_2 = -0{,}85$$

Finalmente, el conjunto solución de los **puntos de corte** entre las curvas resulta:

$$S = \{(\mathbf{3{,}44};\ \mathbf{1{,}96})\ ;\ (\mathbf{-0{,}77};\ \mathbf{-0{,}85})\}$$

Gráficamente, representamos las soluciones encontradas de la siguiente manera: