CAPÍTULO 5

FUNCIONES Y ECUACIONES RACIONALES

Las funciones racionales son aquellas del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, siendo $Q(x)$ distinto del Polinomio Nulo. Estas funciones, al igual que las polinómicas, son funciones algebraicas.

¿CUÁL ES EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN RACIONAL?

Como podemos observar en la expresión anterior, la función $f(x)$ es un cociente entre dos polinomios con dominio real. Pero la división por cero no está definida, entonces debemos asegurarnos que el polinomio denominador no sea cero.
En símbolos:

$$Q(x) \neq 0.$$

Entonces $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{x_1; \ldots; x_n\}$ con $x_1, \ldots\ x_n$ raíces del polinomio $Q(x)$.
En este capítulo sólo abordaremos dos tipos de funciones racionales: funciones inversamente proporcionales y funciones homográficas.

Se desea envasar 120 litros de aceite en botellas de igual capacidad. La cantidad de botellas que se necesitarán depende de la capacidad de cada botella. Les proponemos completar la siguiente tabla:

Capacidad de cada botella (l)	Cantidad total de botellas	Total de litros de aceite
1	120	
2		
3		
5		
1/2		
3/2		

A) Encontrar una expresión que represente la cantidad total de botellas en función de su capacidad.
B) Mostrar cómo varía la cantidad de botellas en función de la capacidad de cada una en un gráfico en coordenadas cartesianas.

¿Cuál es el dominio de la función que representa el problema anterior? ¿Por qué?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN INVERSAMENTE PROPORCIONAL?

Dos variables (una independiente x y una dependiente y) son **inversamente proporcionales** si el producto de los valores respectivos de cada una de ellas es una constante k, siendo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$x \cdot y = k$$

Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar mediante una función de la forma:

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{k}{x}$$

Esta es una función racional en la que $P(x) = k$ y $Q(x) = x$

¿Cuál es el dominio de esta función?

EJEMPLO

Analicemos la función: $f(x) = \frac{2}{x}$

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Calculemos las **raíces** resolviendo la ecuación $f(x) = 0$:

$\frac{2}{x} = 0$ No tiene solución en R.

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene raíces reales.

Calculemos la **ordenada al origen**:
La hallamos evaluando la función en $x = 0$ pero ese valor no pertenece al dominio ($0 \notin Dom(f)$).
Entonces la función no tiene ordenada al origen.

¿La gráfica de la función corta los ejes cartesianos?

Pensemos en la **Imagen**: Como la función no tiene raíces, entonces ella resulta siempre distinta de cero. Por lo tanto, $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

¿Cómo podemos graficar la función?

Podemos ayudarnos construyendo una tabla de valores:

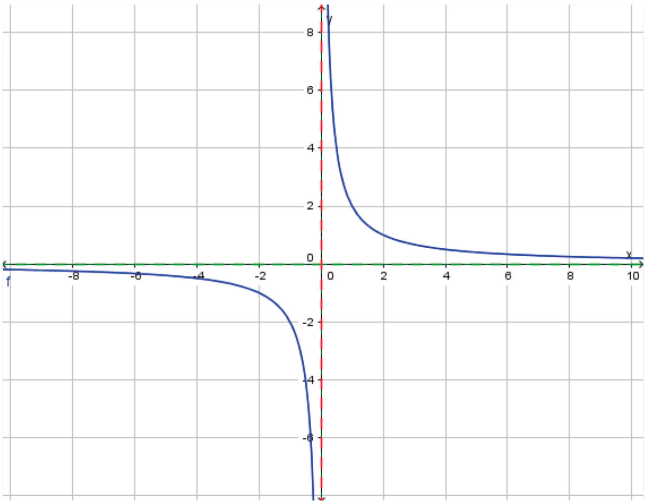
x	$f(x) = \frac{2}{x}$
-1000	-0,002
-100	-0,02
-10	-0,2
-5	-0,4
-1	-2
-0,5	-4
-0,25	-8
-0,005	-400
0,005	400
0,25	8
0,5	4
1	2
5	0,4
10	0,2
100	0,02
1000	0,002

¿Qué sucede con la función cuando le asignamos a la variable x valores positivos cada vez más grandes? ¿Y cuándo le asignamos valores negativos cada vez más pequeños?

¿Qué sucede si le asignamos a x valores cada vez más cercanos a cero "por derecha" (Por ejemplo $0{,}005$) y "por izquierda" (Por ejemplo $-0{,}005$)?

Podemos observar que a medida que le asignamos a la variable *x* valores positivos cada vez más grandes la función toma valores positivos cada vez más pequeños, es decir, “tiende” a cero por encima del eje x. Ahora, si le asignamos a x valores negativos cada vez más pequeños (por ejemplo: -10; -100; -1000) la función toma valores negativos y “tiende” a cero, pero por debajo del eje x.
Entonces, podemos decir que, a medida que los valores de la variable x “tienden” a infinito, la función “tiende” a cero. Cuando se da esta situación, decimos que la función tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Por otro lado, cuando le asignamos a la variable valores próximos a cero por derecha (por ejemplo: $0{,}5$; $0{,}25$; $0{,}005$), la función toma valores cada vez más grandes, es decir, la función “tiende” a infinito. En cambio, cuando nos acercamos a cero por izquierda, la función toma valores cada vez más pequeños, la función “tiende” a infinito negativo.
Entonces, podemos decir que si la variable x “tiende” a cero la función “tiende” a infinito. Cuando se da esta situación, la función tiene una **asíntota vertical** en $x = 0$.
Si graficamos la función, obtenemos:



La gráfica de una función inversamente proporcional es una curva llamada **hipérbola**.

Les proponemos ver los siguientes videos donde es analizada la función del ejemplo anterior:
https://www.youtube.com/watch?v=ajkdJGy3EfE&t=8s
https://www.youtube.com/watch?v=BbOq77fLGy0&t=7s

ASÍNTOTAS VERTICALES DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Una recta vertical $x = a$ con $a \in \mathbb{R}$ se llama **asíntota vertical** de la función $f(x)$ si $a \notin Dom\,(f)$ y, a medida que x toma valores cada vez más cercanos a a, $|f(x)|$ toma valores cada vez mayores.
Para hallarla debemos analizar que el o los valores que no pertenecen al dominio NO anulen al numerador de la función. Porque si un valor anula tanto al numerador como al denominador, la función no presenta una asíntota en ese valor sino un **punto de discontinuidad**.

ASÍNTOTA HORIZONTAL DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Una recta horizontal $y = b$ con $b \in \mathbb{R}$ se llama **asíntota horizontal** de la función $f(x)$ si a medida que $|x|$ aumenta, $f(x)$ se acerca a b.
Para hallarla debemos tener en cuenta el grado del polinomio numerador $P(x)$ y el grado del polinomio denominador $Q(x)$.
De este modo, la Asíntota Horizontal resulta:

Si $Grado\ P(x) < Grado\ Q(x) \Longrightarrow AH: y = 0$

Si $Grado\ P(x) = Grado\ Q(x) \Longrightarrow AH: y = \dfrac{Coeficiente\ principal\ de\ P(x)}{Coeficiente\ principal\ de\ Q(x)}$

Si $Grado\ P(x) > Grado\ Q(x) \Longrightarrow No\ presenta\ AH$

Vamos a aceptar estas conclusiones porque su demostración excede este curso.

Una fábrica tiene como gasto fijo $\$25000$ para estar en funcionamiento. Si cada producto fabricado supone un gasto de $\$100$ adicional, por mano de obra y materiales, les proponemos resolver:

A. ¿Cuál será el costo de fabricación por x unidades?
B. ¿Cuál será la función que determine el costo por unidad? ¿Responde a una función inversamente proporcional? ¿Por qué?
C. El Gerente de la fábrica dice que cuantas más unidades fabriquen menos va a ser el costo por unidad, ¿es cierto? ¿Cómo podemos explicarlo?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN HOMOGRÁFICA?

Llamaremos **Función Homográfica** a aquellas del tipo $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ donde c debe ser distinto de cero y $ad \neq bc$.

¿Por qué c debe ser distinto de cero?

En otras palabras, una función racional se denomina Homográfica si es el cociente entre dos polinomios de grado uno que no comparten raíces.

EJEMPLOS

- $f(x)=\frac{3x-1}{x}$; $Dom\ (f)=\mathbb{R}-\{0\}$
- $g(x)=\frac{2x-4}{5x+1}$; $Dom\ (g)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{5}\right\}$
- $h(x)=\frac{7x}{-3x+18}$; $Dom\ (h)=\mathbb{R}-\{6\}$

Recordemos que la división por cero no está definida

¿Qué elementos analizamos para graficar una función Homográfica?

En este curso, estudiamos las funciones homográficas analizando e identificando su dominio, las raíces y ordenada al origen, de poseer, las asíntotas verticales y horizontal, imagen, conjunto de positividad y negatividad e intervalos de crecimiento y de decrecimiento, acompañando el análisis con su representación gráfica.

EJEMPLO

Realicemos el estudio de la función racional homográfica $f(x)=\frac{5x+15}{4x-8}$
¿Qué podemos analizar?

Dominio:

$$4x-8=0$$
$$x=2$$
$$Dom\ (f)=\mathbb{R}-\{2\}$$

Ordenada al origen: $f(0)=\frac{5\cdot 0+15}{4\cdot 0-8}=-\frac{15}{8} \Rightarrow \left(0;-\frac{15}{8}\right)$

Raíz:

$$f(x)=0$$
$$\frac{5x+15}{4x-8}=0$$
$$5x+15=0$$
$$x=-3 \Rightarrow \text{Raíz: } (-3;0)$$

Asíntota vertical:
Como $x = 2$ no pertenece al dominio y no anula al numerador de la función, es una asíntota vertical.

$$\text{AV: } x = 2$$

Asíntota horizontal: Para hallar esta asíntota, dado que el polinomio numerador y denominador tienen igual grado, dividimos los coeficientes principales como lo hemos definido antes.
En este caso nos queda:

$$\text{AH: } y = \frac{5}{4}$$

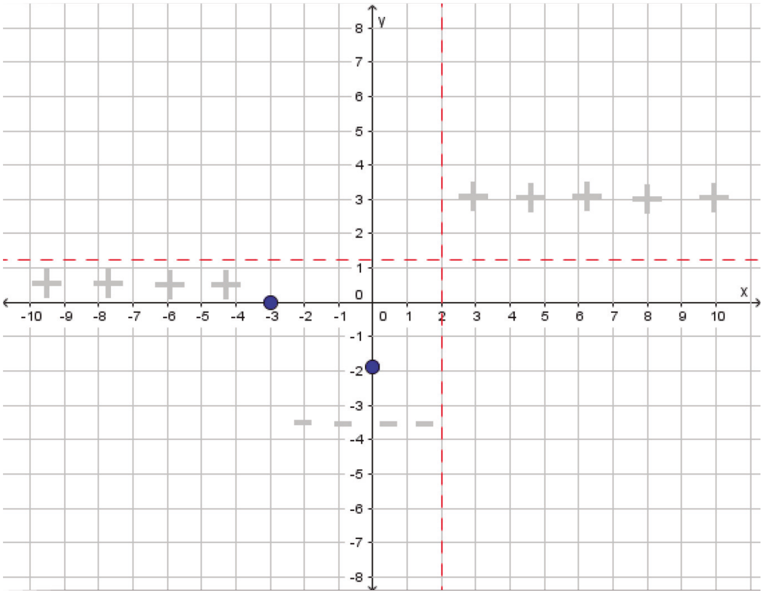
Conjuntos de positividad y negatividad: Teniendo en cuenta el dominio de la función $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y la raíz $x = -3$, establecemos los intervalos de análisis. Luego, elegimos un valor cualquiera de x que pertenezca a cada intervalo para evaluar la función en ese valor y establecer el signo.

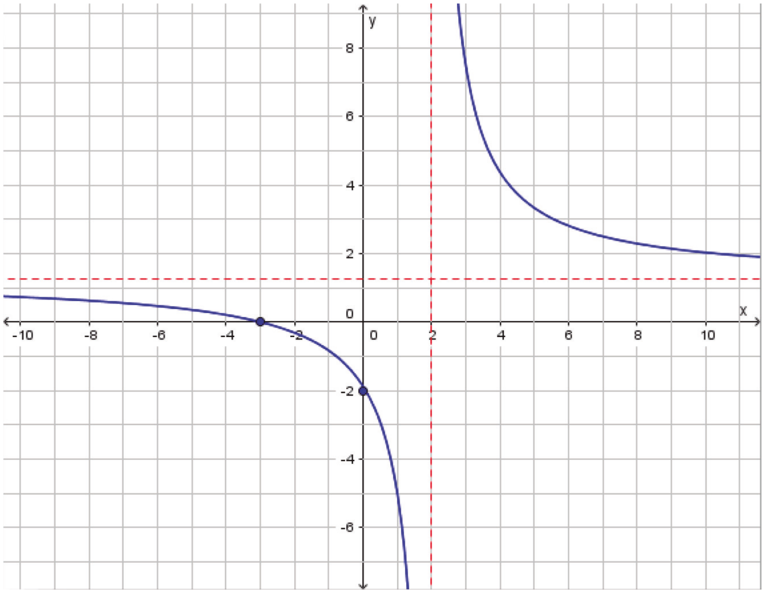
Intervalos	$(-\infty; -\mathbf{3})$	$(-\mathbf{3};, \mathbf{2})$	$(\mathbf{2}; \infty)$
$\boldsymbol{x}$	-5	-1	5
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(-5) = \dfrac{5}{14}$	$f(-1) = -\dfrac{5}{6}$	$f(5) = \dfrac{10}{3}$
Signos	Positivo	Negativo	Positivo

Ahora podemos determinar los conjuntos:

$$C^+ = (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$
$$C^- = (-3; 2)$$

Marquemos en el plano cartesiano lo que hemos hallado, luego graficamos la función.





A partir del gráfico podemos determinar:
Imagen: $Im(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\}$

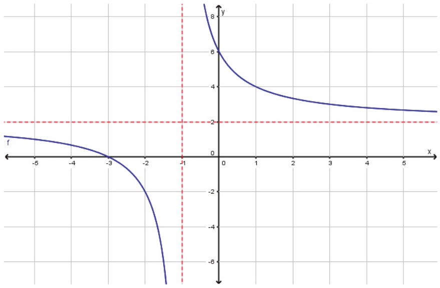
Intervalos de crecimiento: No presenta.
Intervalo de decrecimiento: $\mathbb{R} - \{2\}$ la función es **decreciente en todo su dominio**, porque a medida que recorremos cada rama tomando valores cada vez más grandes para x, la función toma valores cada vez más pequeños.

¿CÓMO CONSTRUIR UNA FÓRMULA A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN HOMOGRÁFICA?

Para encontrar la fórmula de esta función vamos a utilizar la siguiente expresión:

$$\boxed{f(x) = \frac{k}{x-c} + d}$$

donde $k, c, y\ d \in \mathbb{R}\ y\ k \neq 0$



Debemos encontrar el valor de los parámetros k, c y d considerando que:
c: se asocia con la Asíntota Vertical (AV)
d: se asocia con la Asíntota Horizontal (AH)
En este ejemplo, se observa desde la gráfica que:

AV: $x = -1$ → $c = -1$
AH: $y = 2$ → $d = 2$

Reemplazamos estos valores en la expresión original y resulta:

$$f(x) = \frac{k}{x-(-1)} + 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k}{x+1} + 2$$

Para completar la expresión buscamos el valor del parámetro k tomando cualquier punto exacto que pertenezca a la curva, por ejemplo el punto $(1; 4)$. Luego reemplazamos las coordenadas x e y de este punto en la expresión anterior:

$$4 = \frac{\mathrm{k}}{1+1} + 2$$

$$4 - 2 = \frac{\mathrm{k}}{2}$$

$$2 = \frac{k}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 4}$$

Finalmente, reemplazando el valor de $\boldsymbol{k}$, obtenemos la expresión de la función homográfica:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x+1} + 2}}$$

¿Cómo sabemos si la expresión que encontramos es correcta?

Para comprobar que la expresión encontrada es correcta, tomamos cualquier otro punto exacto de la curva (distinto al punto elegido para encontrar $\boldsymbol{k}$) y verificamos que sus coordenadas satisfacen dicha expresión:
Por ejemplo, si tomamos el punto $(-2; -2)$ y reemplazamos:

$$-2 = \frac{4}{-2+1} + 2$$

$$-2 = \frac{4}{-1} + 2$$

$$-2 = -2 \rightarrow ¡Se\ verifica!$$

Entonces, la expresión que encontramos es correcta.

Les proponemos que analicen en la función homográfica anterior: dominio, imagen, ordenada al origen y raíz, intervalos de crecimiento y decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad.