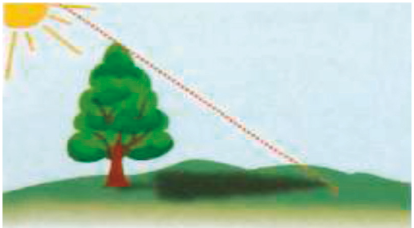
CAPÍTULO 7

TRIGONOMETRÍA



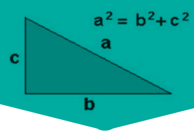
¿Cómo podríamos calcular la altura del árbol si no podemos medirlo directamente?

¿QUÉ SIGNIFICA RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO?

Resolver un triángulo rectángulo es calcular sus elementos (la medida de sus lados y sus ángulos) teniendo como datos dos de ellos. Para esto, solo necesitamos utilizar las **razones trigonométricas** y el **teorema de Pitágoras**.

Teorema de Pitágoras
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

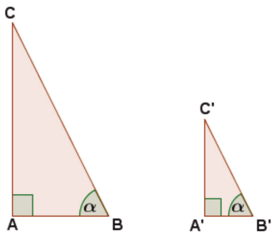
$a^2 = b^2 + c^2$



¿Qué son las razones trigonométricas?

Podemos considerar infinitos triángulos rectángulos con un ángulo α congruente y, por lo tanto, todos sus ángulos congruentes. Estos triángulos resultan ser semejantes, entonces todos sus lados son respectivamente proporcionales:

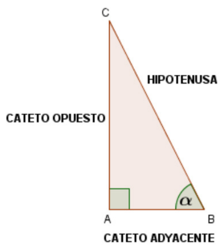
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'B'}} \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$



A cada una de estas proporciones, que se cumplen para cualquier triángulo rectángulo con ángulo α, se les dio un nombre particular:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \; ; \quad cos\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \; ; \; tan\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Por otro lado, sabemos que el lado $\overline{AC}$ **es el Cateto Opuesto (*CO*)** al ángulo α, $\overline{AB}$ **es el Cateto Adyacente (*CA*)** al ángulo α, y $\overline{CB}$ **es la Hipotenusa (*H*)** (lado opuesto al ángulo recto).



Entonces, las proporciones establecidas con anterioridad, quedan definidas de la siguiente manera:

$$sen\,\alpha = \frac{CO}{H} \qquad csc\,\alpha = \frac{H}{CO}$$

$$cos\,\alpha = \frac{CA}{H} \qquad sec\,\alpha = \frac{H}{CA}$$

$$tan\,\alpha = \frac{CO}{CA} \qquad cot\,\alpha = \frac{CA}{CO}$$

Estas razones trigonométricas no dependen de las longitudes de los lados sino exclusivamente del ángulo α.

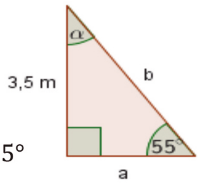
OBSERVACIÓN:
Las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente son las recíprocas a las razones seno,coseno y tangente respectivamente.

$$csc\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} \qquad sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} \qquad cot\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$$

EJEMPLO

Resolvamos el siguiente triángulo rectángulo:

Tenemos que calcular los datos que faltan: a, b y α.



$$sen\,55° = \frac{3{,}5}{b} \qquad b = \frac{3{,}5}{sen\,55°} \qquad \boxed{b \cong 4{,}27}$$

$$tan\,55° = \frac{3{,}5}{a} \qquad a = \frac{3{,}5}{tan\,55°} \qquad \boxed{a \cong 2{,}45}$$

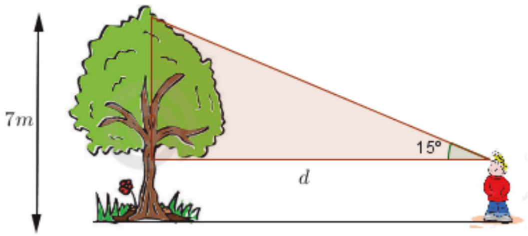
$$\alpha = 180° - 90° - 55° \qquad \boxed{\alpha = 35°}$$

EJEMPLO

Una persona que mide $1{,}69$ m observa un pájaro que se posó sobre el extremo superior de la copa de un árbol de 7 m de altura. ¿A qué distancia se encuentra del árbol si el ángulo de elevación del observador es de $15°$?
Realicen la representación gráfica de la situación.

¿Qué es el ángulo de elevación?

El **ángulo de elevación** es el ángulo formado por la línea horizontal y la visual cuando el objeto o punto observado se encuentra por encima de la línea horizontal.
De esta manera, la representación gráfica del ejemplo sería la siguiente:

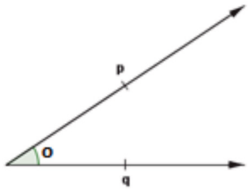


Les proponemos resolver el problema utilizando las razones trigonométricas

En caso de que dicho punto u objeto se encuentre por debajo de la línea horizontal, el ángulo que se forma se llama **ángulo de depresión**.

¿Podrían proponer alguna situación que involucre un ángulo de este tipo?

Consideremos en el plano un punto *o* y dos semirrectas con origen en dicho punto.



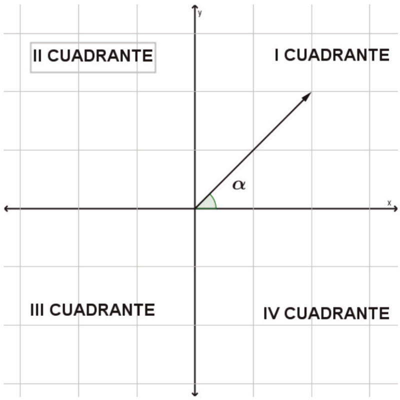
$\overline{oq}$ es el lado inicial del ángulo y $\overline{op}$ es el lado terminal.

Llamamos ángulo orientado $q\hat{o}p$ al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario a las agujas del reloj, de la semirrecta $\overline{oq}$ hacia la posición de la semirrecta $\overline{op}$.
El ángulo $q\hat{o}p$ está orientado en **sentido positivo**, $\overline{oq}$ es el lado inicial de $q\hat{o}p$ y $\overline{op}$ es el lado final de $q\hat{o}p$.
Si el ángulo va en sentido de las agujas del reloj, decimos que el ángulo está orientado en **sentido negativo**.

¿CÓMO UBICAMOS ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS?

Ubicamos en un sistema de coordenadas cartesianas un ángulo orientado que cumple con las siguientes condiciones:

- Su vértice coincide con el origen de coordenadas.
- El lado inicial coincide con el semieje positivo de las x y queda fijo. El lado terminal gira a partir de este semieje.
- Si el lado terminal gira en sentido anti-horario, el ángulo es positivo; y si gira en sentido horario, es negativo.
- Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano dividido en cuatro sectores, llamados **cuadrantes**, según se localice el lado terminal.



Ubiquen en un sistema de ejes cartesianos los siguientes ángulos e indiquen a qué cuadrante pertenecen.

$\alpha=45°$ $\beta=-30°$ $\gamma=405°$ $\delta=330°$

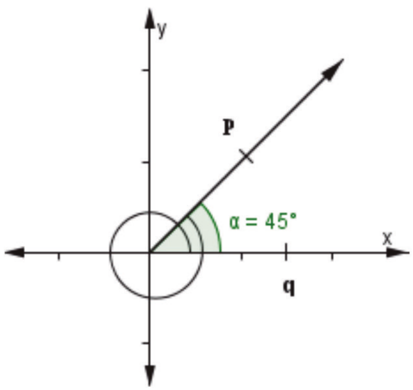
ÁNGULOS CONGRUENTES

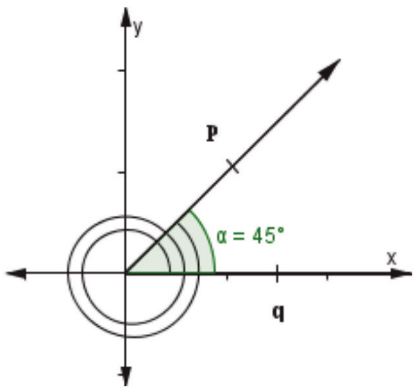
Se denominan ángulos **congruentes** a aquellos cuyos lados iniciales y terminales coinciden, aunque pueden diferir en la cantidad de giros.

EJEMPLO

$\alpha = 45°, \beta = 405°\ y\ \gamma = 765°$ son ángulos congruentes, ya que:

$$405° = 360° + 45° \quad \wedge \quad 765° = 2\,.\,360° + 45°$$





SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Existen diversos sistemas de medición de ángulos, los más utilizados son los siguientes:

- **Sistema sexagesimal**
- **Sistema circular**

SISTEMA SEXAGESIMAL

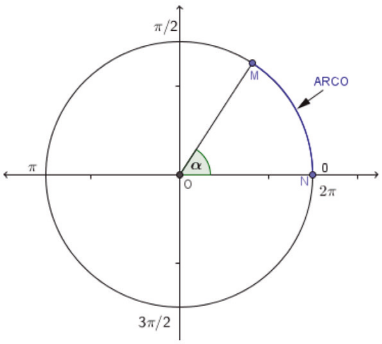
De los sistemas de medición angular el más utilizado es el **sexagesimal,** cuya unidad de medida es el **grado** (°).
Las submedidas de este sistema son los minutos y segundos.

- Si dividimos un grado en sesenta partes iguales, obtenemos un minuto, es decir: $\frac{1°}{60} = 1'$.
- Si dividimos un minuto nuevamente en sesenta partes iguales, obtenemos un segundo, es decir: $\frac{1'}{60} = 1''$.

SISTEMA CIRCULAR

En este sistema la unidad de medida es el **radián.**
El radián es un ángulo central, cuyo arco es igual al radio de la circunferencia a la cual pertenece.

Ángulo central: es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella.



Pueden mirar el GIF "¿Qué es un radián?" que se encuentra en la plataforma.

$$\boldsymbol{Medida\ del\ arco\ de\ la\ circunferencia = radio\ de\ la\ circunferencia \Rightarrow |\overline{MN}| = |\overline{OM}| = |\overline{ON}|}$$

¿Cuántos radianes mide la vuelta completa que realiza el ángulo central de una circunferencia?

EJEMPLO

Expresemos en sistema circular cada uno de los siguientes ángulos:

$$\alpha = 35^\circ \qquad \beta = 80^\circ$$

Sabemos que una circunferencia completa tiene 360° y su longitud es $2\ \pi\ r$ (perímetro de la circunferencia), entonces podemos establecer la siguiente equivalencia:

$$360^\circ = \frac{2.\pi.r}{r} \Longrightarrow 360^\circ = 2.\pi\ radianes$$

¿Por qué hacemos esta división?

También podemos establecer las siguientes equivalencias:

$$180^\circ = \pi \quad 90^\circ = \frac{1}{2}\pi \qquad 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

Luego, retomando el ejemplo tenemos:

$$\frac{360^\circ}{35^\circ} = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow \frac{360^\circ}{35^\circ} \cdot x = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ}$$

Les proponemos realizar el pasaje a radianes del ángulo β.

Expresen en sistema sexagesimal los siguientes ángulos:

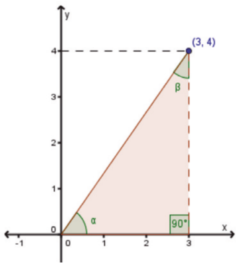
$$\alpha = \frac{5}{6}\pi \qquad \beta = \frac{2}{3}\pi$$

ÁNGULOS Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS EJES CARTESIANOS

EJEMPLO

Sabiendo que el punto $(3; 4)$ es el extremo del lado terminal del ángulo , realicemos una representación gráfica de dicho ángulo en el plano cartesiano y hallemos las seis razones trigonométricas correspondientes a él.

La representación gráfica quedaría de la siguiente manera:



Para hallar las razones trigonométricas debemos calcular la hipotenusa, asumiendo que los catetos miden 3 y 4 respectivamente. Usando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

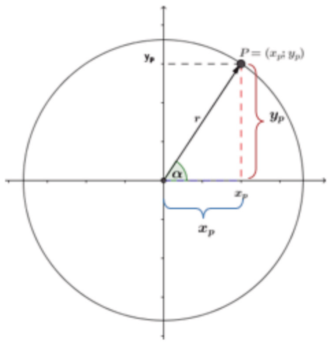
$$sen\,\alpha = \frac{4}{5}$$

$$cos\,\alpha = \frac{3}{5}$$

Les proponemos calcular las restantes razones trigonométricas.

¿Cómo representarían en los ejes cartesianos un ángulo cuyo punto extremo es $(—2; 3)$? ¿Qué signos tendrán las razones trigonométricas en ese caso?

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



El signo de las razones trigonométricas depende del cuadrante al que pertenezca el punto P, más precisamente depende de los signos de las coordenadas del punto. ¿Por qué?

Notemos que y_p representa el cateto opuesto al ángulo α y "x_p" representa el cateto adyacente.

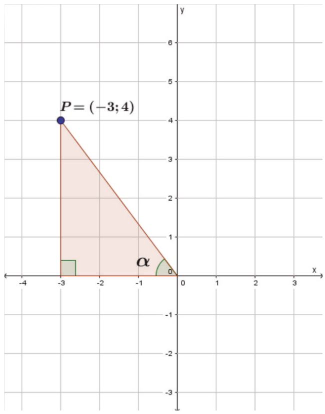
Así, las razones trigonométricas elementales quedan definidas como:

$$sen\,\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{\boldsymbol{y_p}}{\boldsymbol{r}} \quad \wedge \quad cos\,\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{\boldsymbol{x_p}}{\boldsymbol{r}}$$

De esta manera, como el radio siempre es un valor positivo, el signo del seno queda determinado por el signo de la coordenada "y_p" del punto P y el signo del coseno se corresponde con el de la coordenada "x_p".

EJEMPLO

Determinemos los signos de las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que en el punto $(-3; 4)$ se encuentra el extremo del lado terminal.



Notemos que, si queremos saber únicamente el signo de las razones, no es necesario calcularlas:

- como la coordenada y_p es positiva, entonces *sen* α será positiva.
- como la coordenada x_p es negativa, *cos* α resultará negativa.

Sabiendo el signo del seno y del coseno podemos determinar el signo de las restantes razones trigonométricas. Veamos qué signo le corresponde a cada una:

$sen\ \alpha = +$ $\quad cos\ \alpha = -$ $\quad tan\ \alpha = -$

$csc\ \alpha = +$ $\quad sec\ \alpha = -$ $\quad cot\ \alpha = -$

Les proponemos calcular los signos de las razones trigonométricas para los puntos $P = (-4; -5)$ y $Q = (2; -6)$

Podemos completar la siguiente tabla teniendo en cuenta que:

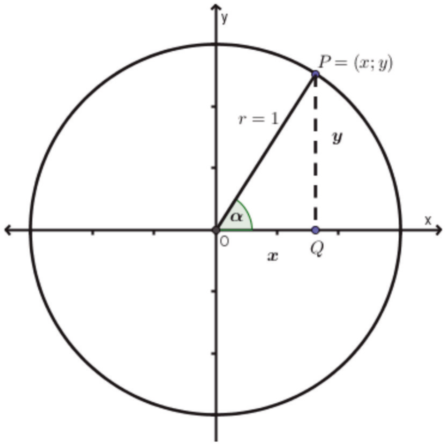
- El $I\ C$ se forma con el eje x positivo y el eje y positivo.
- El $II\ C$ se forma con el eje x negativo y el eje y positivo.
- El $III\ C$ se forma con el eje x negativo y el eje y negativo.
- El $IV\ C$ se forma con el eje x positivo y el eje y negativo.

Cuadrantes / **Razones**	*I*	*II*	*III*	*IV*
$sin\ \alpha$	+	+	-	-
$cos\ \alpha$	+	-	-	+
$tan\ \alpha$	+	-	+	-
$csc\ \alpha$	+	+	-	-
$sec\ \alpha$	+	-	-	+
$cot\ \alpha$	+	-	+	-

LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA O UNITARIA

Como vimos, las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de la longitud de los lados, sino única y exclusivamente del ángulo en sí. Por esa razón, podemos considerar una circunferencia de centro en el punto $(0; 0)$ y con radio de longitud 1.

Tomemos un punto P en la circunferencia y marquemos el segmento $\overline{OP}$ (el cual tiene longitud uno, por ser el radio de la circunferencia). De esta manera, queda delimitado el ángulo α.



Lo expuesto a continuación es válido para cualquier ángulo de cualquier cuadrante.

Veamos cómo quedan expresadas las razones trigonométricas elementales en la circunferencia unitaria:

- $\boldsymbol{sen\,\alpha} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$

Entonces, podemos establecer que, en la circunferencia trigonométrica, el *seno* y el *coseno* de un ángulo resultan las coordenadas x e y del punto P respectivamente.
A partir de las razones trigonométricas seno y coseno, podemos definir las restantes: tangente, secante, cosecante y cotangente.

- $\boldsymbol{csc\,\alpha} = \frac{r}{y} = \frac{1}{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{sen\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{sec\,\alpha} = \frac{r}{x} = \frac{1}{x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{tan\,\alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\boldsymbol{sen\,\alpha}}{\boldsymbol{cos\,\alpha}}$
- $\boldsymbol{cotg\,\alpha} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{cos\,\alpha}}{\boldsymbol{sin\,\alpha}}$

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran razones trigonométricas. Estas igualdades son verificables para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos de las razones.

Entre las identidades trigonométricas más importantes encontramos la siguiente:

IDENTIDAD PITAGÓRICA

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

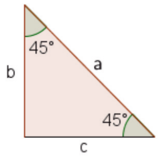
Les proponemos demostrar la Identidad Pitagórica.
Sugerencia: Utilicen el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo de la representación anterior en la circunferencia trigonométrica.

CÁLCULO EXACTO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ALGUNOS ÁNGULOS

Vamos a calcular las razones trigonométricas para algunos ángulos particulares:

ÁNGULO DE 45°

Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos mide 45°, el otro debe medir lo mismo. Por lo tanto, se trata de un triángulo isósceles y los catetos b y c deben ser iguales.
Calculemos la hipotenusa considerando que b y c son iguales:

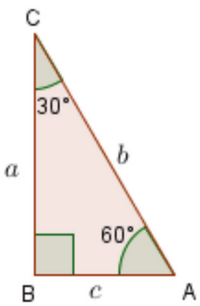


$$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 + b^2} \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot b^2} \Rightarrow a = b \cdot \sqrt{2}$$

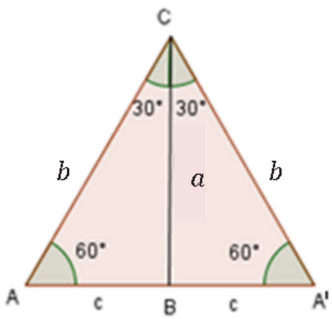
Entonces, calculamos el seno y el coseno, que resultan iguales como habíamos deducido:

$$sen\ 45° = \frac{b}{a} = \frac{b}{b.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad cos\ 45° = \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \frac{b}{b.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ÁNGULOS DE 30° Y 60°



Si duplicamos este triángulo en forma simétrica, obtenemos el triángulo equilátero AΔCA de la derecha.



Por ser equilátero 2c=b

$$b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow (2c)^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow 4c^2 - c^2 = a^2 \Rightarrow 3c^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{3}c = a$$

Por lo tanto:

$$sen\,30° = \frac{c}{b} = \frac{c}{2c} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad \wedge \qquad cos\,30° = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}.c}{2.c} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$sen\,60° = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}.c}{2.c} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \wedge \qquad cos\,60° = \frac{c}{b} = \frac{c}{2c} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Podemos concluir la siguiente tabla:

sen	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	90°	60°	45°	30°	0°

Estos ángulos pertenecen al primer cuadrante. ¿Y si pertenecieran a otros cuadrantes?

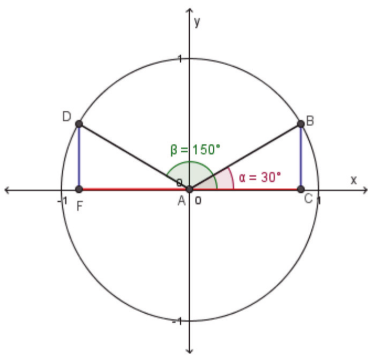
Podemos calcular de manera exacta las razones trigonométricas de algunos ángulos pertenecientes al II, III o IV cuadrante, comparándolos con los ángulos particulares del $I\ C$.

EJEMPLO

Comparemos el ángulo de $150° \in II\ C$, con el ángulo de $30° \in I\ C$.
Expresemos a $150°$ usando ángulos particulares y los que se forman con cada uno de los ejes.
Podemos hacerlo de dos formas:

- $150° = 180° - 30°$
- $150° = 90° + 60°$

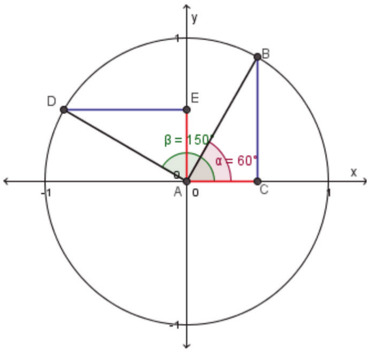
Analicemos la primera opción:
Usamos la circunferencia trigonométrica para comparar las razones trigonométricas del ángulo $180° - 30°$ del $II\ C$ con el de $30°$ del $I\ C$. Es decir, comparamos los triángulos rectángulos congruentes $\overline{DFA}$ y $\overline{BCA}$ y vemos que la medida de $\overline{DF}$ es igual a la de $\overline{BC}$; por lo tanto, podemos asegurar que:



$$sen(150°) = sen(180° - 30°) = sen(30°) = \frac{1}{2}$$

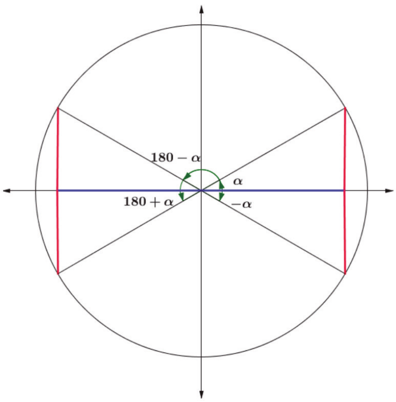
Si analizamos la segunda forma de expresar $150°$, podemos comparar en la circunferencia los triángulos congruentes $\overline{AED}$ y $\overline{ACB}$ y vemos que la medida de $\overline{AE}$ es igual a la de $\overline{AC}$; por lo tanto, podemos asegurar que:

$$sen(150°) = sen(90° + 60°) = cos(60°) = \frac{1}{2}$$



Entonces, podemos calcular las razones trigonométricas de ángulos del II, III o IV cuadrante, haciendo su reducción al I cuadrante.

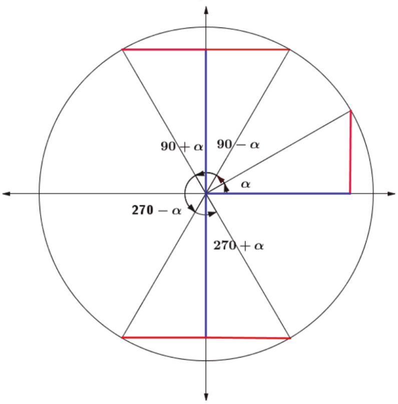
Cuando un ángulo se encuentra situado en el segundo, tercero o cuarto cuadrante siempre es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas tengan los mismos valores absolutos. Debemos considerar su signo según en qué cuadrante se ubique. Por ejemplo:



$sen\,\alpha = sen(180° - \alpha)$

$sen\,\alpha = -\,sen(180° + \alpha)$

$sen\,\alpha = -\,sen - (\alpha)$



$sen\,\alpha = cos(90° - \alpha)$

$sen\,\alpha = -cos(90° + \alpha)$

$sen\,\alpha = -cos(270° - \alpha)$

$sen\,\alpha = cos(270° + \alpha)$

Les proponemos calcular, sin el uso de la calculadora, el $sen\ 240°$ utilizando los ángulos particulares analizados.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que aparecen una o más razones trigonométricas. Es decir, debemos calcular el o los ángulos que verifican la igualdad.
Al principio de este capítulo trabajamos con ecuaciones trigonométricas simples. Ahora estudiaremos algunas más.

EJEMPLO

Resolvamos la ecuación $2 \cdot cos\ x - \sqrt{2} = 0$

$$2 \cdot cos\ x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot cos\ x = \sqrt{2} \Rightarrow cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obtuvimos que el coseno de un ángulo es igual a un valor positivo; por lo tanto, ese ángulo puede pertenecer al primer o al cuarto cuadrante.
Por lo que hemos estudiado, si denominamos α a un ángulo cualquiera del primer cuadrante, podemos expresar como $360° - \alpha$ a un ángulo del cuarto cuadrante.
Como ya sabemos, para calcular el ángulo basta con aplicar la función inversa del coseno en nuestra calculadora, pero en el visor sólo aparecerá un solo ángulo.

$$cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow x = 45°$$

$45°$ es un ángulo del primer cuadrante; por lo tanto, sería nuestro α. Nos faltaría determinar el valor del ángulo del cuarto cuadrante: $360° - \alpha = 360° - 45° = 315°$.
Así, la ecuación tiene dos soluciones posibles en el intervalo $[0;2\pi]$: $S = \{45°;315°\}$

Les proponemos resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas sabiendo que $\alpha \in [0; 2\pi]$

$2\ sen\ x - 1 = 0$ $\qquad$ $2\ cos\ x - 3\ tan\ x = 0$

Es conveniente expresar todos los términos en función de alguna de las razones trigonométricas elementales.