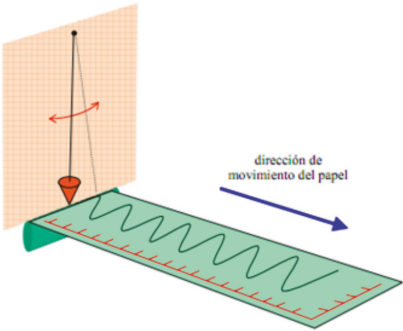


CAPÍTULO 8

**FUNCIONES Y ECUACIONES
TRIGONOMÉTRICAS**

En la vida cotidiana existen muchos movimientos que se repiten a intervalos de tiempo iguales, por esa razón se denominan *movimientos periódicos*. Para estudiarlos tomemos como ejemplo un péndulo simple que oscila en un plano vertical. La variación de la posición de la pesa en el eje x puede registrarse si colocamos un marcador en la punta del péndulo y una cinta transportadora con un papel debajo de él. La curva que queda trazada sobre el papel se denomina *sinusoide* y describe el movimiento de vaivén del péndulo simple en función del tiempo.



Esta situación, y en general muchos fenómenos que se repiten de forma periódica, se modelizan utilizando funciones que se denominan **trigonométricas**. En este capítulo trabajaremos con las funciones seno y coseno.

FUNCIÓN SENO

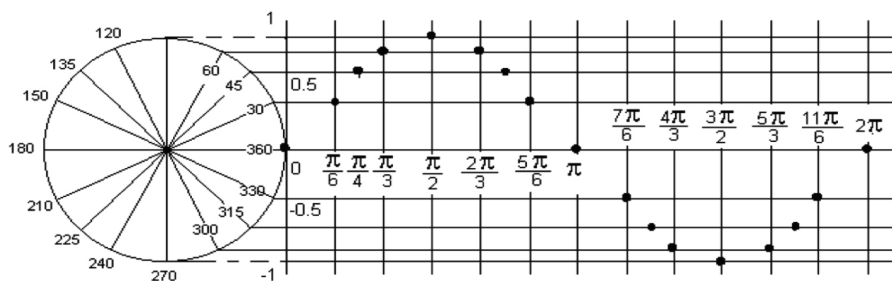
Nos proponemos aproximarnos a la representación gráfica en coordenadas cartesianas de la **Función Seno**.

Para ello elaboramos la siguiente tabla, asignando a la variable x los valores de los ángulos especiales en grados (y sus equivalentes de los otros cuadrantes) junto con su conversión al sistema circular, en radianes.

En las funciones trigonométricas la variable independiente toma como valores medidas de ángulos. Ya que las funciones en general tienen como dominio números reales (en vez de ángulos), nos conviene trabajar en el sistema circular, cuya medida es el **radián**.

x (GRADOS)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x (RADIANES)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\text{sen } x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

En la última fila calculamos el valor de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ para cada uno de esos ángulos y al representarlos en un sistema de ejes cartesianos obtenemos la siguiente curva:

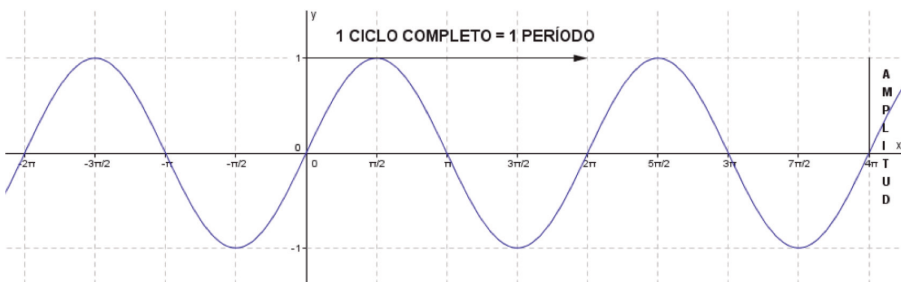


Aprovechamos la circunferencia trigonométrica para graficar. La coordenada y de cada punto es igual a la altura del triángulo rectángulo que se forma para cada ángulo con el eje de abscisas.



¿Qué ocurre con la curva si asignamos a la variable x valores de ángulos mayores a 2π ? ¿Y menores a cero?

Como la variable independiente puede tomar cualquier valor real, al incluir los valores negativos y los valores mayores a 2π queda determinada la **curva senoide** que se representa a continuación:



ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = \text{sen } x$

En primer lugar, podemos observar que la curva está formada por repeticiones periódicas de un tramo con igual forma y, por esta razón, a este tipo de funciones se las llama **Funciones Periódicas**. A este tramo se le da el nombre de **ciclo**; para la función $\text{sen}(x)$ la longitud de un ciclo es de 2π , es decir, el período es 2π .

En nuestro ejemplo inicial del péndulo, se repite el movimiento de la pesa que va y vuelve desde su posición inicial. Cada una de esas idas y vueltas se ven representadas en la curva del papel como un mismo ciclo que se repite indefinidamente.

Resumimos algunas de las características de la función seno:

- **Dominio e Imagen:** La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene por dominio el conjunto de los números reales, es decir, el ángulo $x \in \mathbb{R}$. Analizando la gráfica, podemos observar que los valores que toma la variable dependiente, es decir, el conjunto de la imagen, se encuentran entre -1 y 1 . Así podemos establecer que:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \wedge \quad \text{Im}(f) = [-1; 1]$$

- **Periodicidad:** La senoide es periódica, lo que significa que su ciclo se repite cada un cierto período. En la función $f(x) = \text{sen}(x)$, como mencionamos anteriormente, el **período** es 2π . Indicaremos el período con el símbolo **T**. Al estudiar los elementos de la senoide, consideraremos solamente el ciclo entre 0 y 2π .
- **Raíces:** Las raíces son aquellos valores de x en los que se anula la función seno. Estos valores, entre 0 y 2π , son $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Entonces los puntos $(0; 0)$, $(\pi; 0)$ y $(2\pi; 0)$ son las raíces.
- **Valor máximo:** La función $f(x) = \text{sen}(x)$ alcanza su valor máximo, en el período analizado, en $x = \frac{\pi}{2}$. Entonces el punto máximo es $(\frac{\pi}{2}; 1)$.
- **Valor mínimo:** La función $f(x) = \text{sen}(x)$ alcanza su valor mínimo, dentro del mismo período, en $x = \frac{3}{2}\pi$. El punto mínimo es, entonces, $(\frac{3}{2}\pi; -1)$.

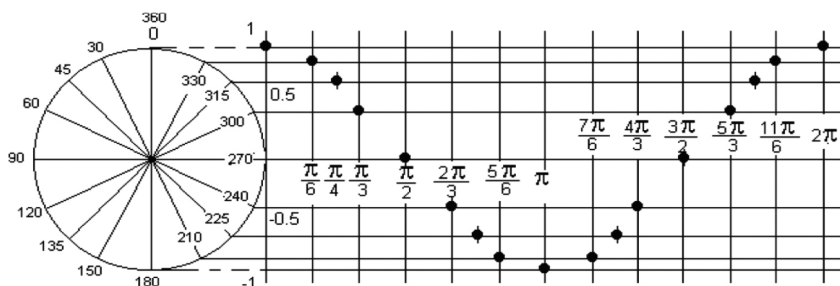
En el punto máximo y en el mínimo la coordenada y es igual a 1 y -1 respectivamente ¿Por qué?

FUNCIÓN COSENO



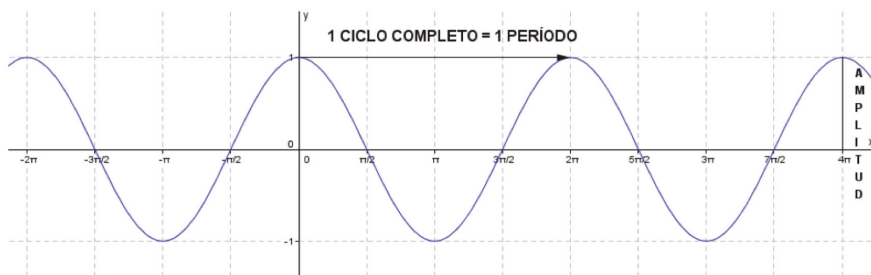
La función coseno $f(x) = \cos(x)$ posee el mismo dominio, imagen y periodicidad que la función seno, aunque no así los valores de raíces, máximos y mínimos. ¿Por qué?

De la misma manera que en el ítem anterior, utilizamos la circunferencia trigonométrica para obtener algunos puntos de la gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$. En forma aproximada, queda representada por la siguiente curva:



Comparemos esta curva con la anterior del seno ¿Por qué rotamos la circunferencia 90° ?

Nuevamente, como la variable independiente puede tomar cualquier valor real, al incluir los valores negativos y los valores mayores a 2π queda determinada la curva que se representa a continuación:



ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = \cos x$

- **Dominio e Imagen:** La función $f(x) = \cos(x)$ tiene por dominio el conjunto de los números reales, es decir, el ángulo $x \in \mathbb{R}$. Analizando la gráfica, podemos observar que los valores que toma la variable y , es decir, el conjunto de la imagen, se encuentran entre -1 y 1 . Así podemos establecer que:

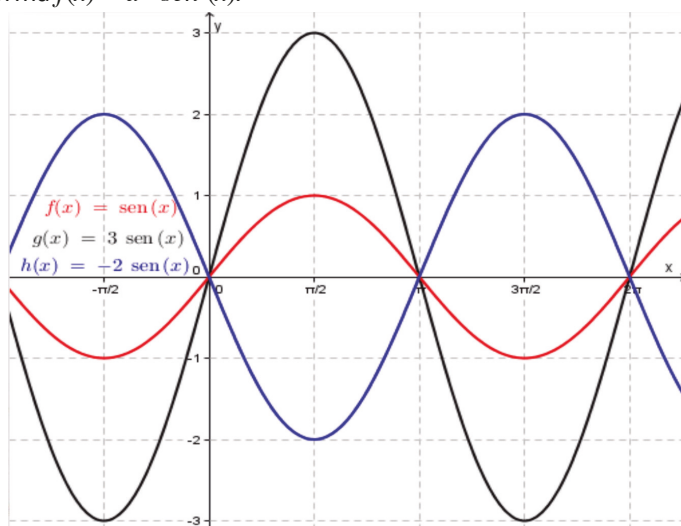
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \wedge \quad \text{Im}(f) = [-1; 1]$$

- **Raíces:** Las raíces de la función $f(x) = \cos(x)$ son aquellos valores de x donde la función toma valor 0. En el período estudiado, estos valores son $x = \frac{\pi}{2} \wedge x = \frac{3}{2}\pi$. Entonces los puntos $(\frac{\pi}{2}; 0)$ y $(\frac{3}{2}\pi; 0)$ son las raíces.

- **Valor máximo:** La función $f(x) = \cos(x)$ alcanza su valor máximo en $x = 0$ y $x = 2\pi$, en el mismo período. Los puntos máximos son, entonces, $(0; 1)$ y $(2\pi; 1)$.
- **Valor mínimo:** La función $f(x) = \cos(x)$, en el período analizado, alcanza su valor mínimo en $x = \pi$. El punto mínimo es, entonces, $(\pi; -1)$.

ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación, consideramos la función de la forma $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d$ y analizamos por separado cada uno de los parámetros a , b , c y d . Estudiaremos solamente la función seno porque el mismo análisis es válido para ambas funciones. Observemos las siguientes gráficas correspondientes a las funciones f ; g ; h que tienen la forma $f(x) = a \cdot \text{sen}(x)$:



Podemos establecer que el parámetro a no modifica el dominio, el período ni las raíces.



¿Qué elementos de la senoide modifica el parámetro a ?

Analizando las funciones representadas anteriormente en el período $[0; 2\pi]$, podemos observar que los puntos máximos y mínimos cambian de una función a otra. Estos se muestran en el cuadro a continuación.

	Puntos máximos	Puntos mínimos
$f(x) = \text{sen } x$	$\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right)$
$g(x) = 3 \text{ sen } x$	$\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; -3\right)$
$h(x) = -2 \text{ sen } x$	$\left(\frac{3}{2}\pi; 2\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$

Analizando el conjunto imagen, podemos observar que son diferentes para las tres funciones:

$$\bullet \text{Im}(f) = [-1; 1] \quad \bullet \text{Im}(g) = [-3; 3] \quad \bullet \text{Im}(h) = [-2; 2]$$

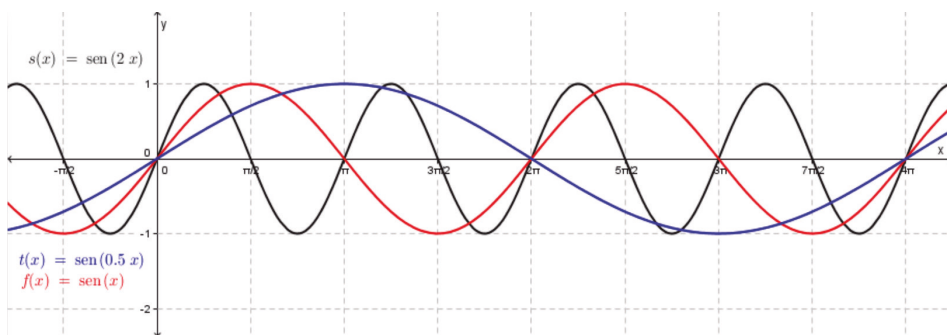
Es decir, estas curvas varían en su **amplitud**.

PARÁMETRO a

El módulo del parámetro a , es decir, $|a|$ indica la **amplitud** de la función periódica y modifica su imagen, sus valores máximos y mínimos.

$$\text{Im}(f) = [-a; a]$$

Analicemos, a continuación, las gráficas de las funciones f ; s ; t que tienen la forma $f(x) = \text{sen}(b \cdot x)$



¿Qué elementos de la senoide modifica el parámetro b ?

Podemos determinar que el dominio e imagen de las tres funciones son iguales, y ocurre lo mismo con las amplitudes de las tres curvas.

Sin embargo, podemos observar en el gráfico que el período, las raíces y los puntos máximos o mínimos son diferentes para las tres curvas. En la tabla que sigue, analizamos estos elementos para cada una de las funciones en un ciclo.

	Período	Raíces	Punto Máximo	Punto mínimo
$f(x) = \text{sen } x$	2π	$(0; 0)$ $(\pi; 0)$ $(2\pi; 0)$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$	$(\frac{3}{2}\pi; -1)$
$s(x) = \text{sen}(2x)$	π	$(0; 0)$ $(\frac{\pi}{2}; 0)$ $(\pi; 0)$	$(\frac{\pi}{4}; 1)$	$(\frac{3}{4}\pi; -1)$
$t(x) = \text{sen}(0,5x)$	4π	$(0; 0)$ $(2\pi; 0)$ $(4\pi; 0)$	$(\pi; 1)$	$(3\pi; -1)$



¿Cuántos ciclos de la función $s(x)$ caben en un ciclo de la función $f(x)$?
¿Y cuántos ciclos de la función $t(x)$ en $f(x)$?

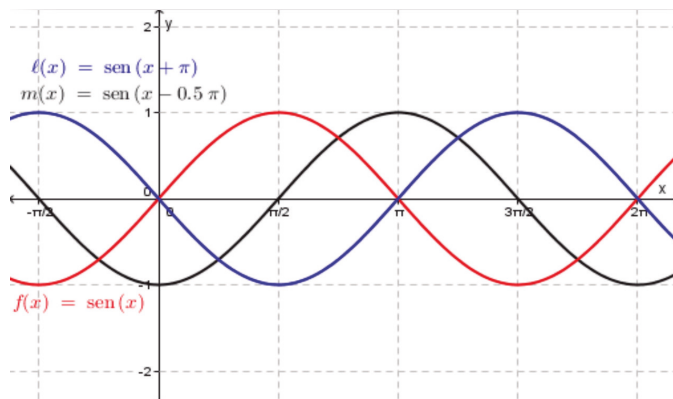
PARÁMETRO b

Se denomina **pulsación o frecuencia** al parámetro b e indica el número de períodos o ciclos que realiza la función cada 2π radián. Por lo tanto, con el parámetro b se determina el período T de la función y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

¿Podrán explicar esta fórmula?

Estudiemos ahora las siguientes gráficas correspondientes a las funciones f ; l ; m que tienen la forma $f(x) = \text{sen}(x - c)$.



¿Qué elementos de la senoide modifica el parámetro c ?

Podemos ver que las gráficas mantienen la forma pero están desplazadas con respecto a $f(x)$, es decir:

- Poseen mismo dominio e imagen.
- Misma periodicidad y amplitud.
- Varían sus raíces y sus puntos máximos y mínimos.
- También se diferencian en el “**punto de inicio del período analizado**”.



¿En qué se diferencian las fórmulas de las tres funciones?
¿En qué influye esa diferencia?

PARÁMETRO c Y ÁNGULO DE FASE φ

Al restar una constante c a la variable x , la función se desplaza sobre el eje x , es decir, cambia el punto de inicio de un ciclo de la función. Este punto de inicio recibe el nombre de **ángulo de fase** φ . Los parámetros c y b nos permiten calcular φ de la siguiente forma:

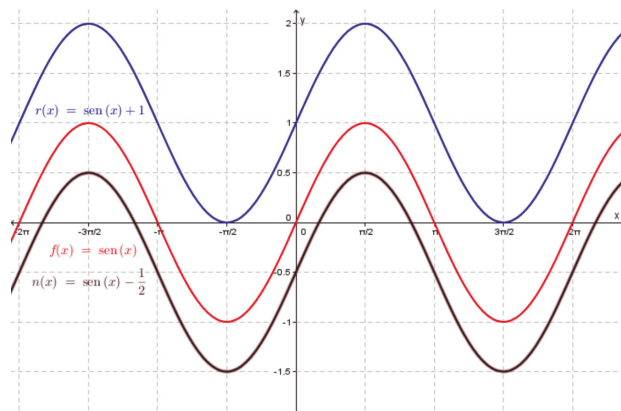
$$\varphi = \frac{c}{b}$$

¿Cómo obtenemos esta fórmula?

Teniendo en cuenta el ángulo de fase φ y el período T de la función, podemos establecer la coordenada x correspondiente al punto final del período analizado de la función: $P_f = \varphi + T$.

Cuando hablamos de “punto inicial” y “punto final” no nos referimos a la función completa, ya que tiene dominio real y, por lo tanto, no tiene puntos inicial y final. Para facilitar el estudio generalmente se considera un ciclo en particular: el primer ciclo en el semieje positivo de las x .

Analicemos las gráficas de las funciones f ; n ; r que tienen la forma $f(x) = \text{sen}(x) + d$



¿Qué elementos de la senoide modifica el parámetro d ?

EXPRESIÓN GENERAL DE LA FUNCIÓN SENO

Con los parámetros analizados anteriormente, la expresión general de la función seno es:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d \text{ donde } a, b, c, \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$$



Les proponemos que grafiquen la siguiente función utilizando el análisis de los parámetros estudiados.

$$g(x) = 3 \text{ sen}(-\pi/2 + x)$$

RESOLUCIÓN

Para comenzar debemos establecer el valor de los parámetros de la función

$$g(x) = 3 \text{ sen}(-\pi/2 + x) \rightarrow a = 3; b = 1; c = \frac{\pi}{2}; d = 0$$

Podemos establecer que:

- Teniendo en cuenta $a = 3$ y $d = 0$, podemos establecer el conjunto imagen de la función:

$$\text{Im}(g) = [-3; 3]$$

- Teniendo en cuenta $b = 1$ y $c = \frac{\pi}{2}$, podemos establecer período y ángulo de fase:

$$T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad y \quad \varphi = \frac{\pi/2}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Podemos también, establecer con los datos obtenidos las coordenadas de los puntos P_i y P_f

$$P_i = (\varphi; 0) = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \quad P_f = (\varphi + T; 0) = \left(\frac{5}{2}\pi; 0\right)$$

- Analíticamente y utilizando ecuaciones trigonométricas, calculamos raíces, puntos máximos y puntos mínimos de la función:
- Raíces:

$$\begin{array}{l}
 0 = 3 \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 0:3 = \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 \operatorname{arc sen}(0) = -\pi/2 + x
 \end{array}$$

$ \begin{array}{l} 0 = -\pi/2 + x \\ \pi/2 = x \\ \pi/2 = x \\ \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \end{array} $	$ \begin{array}{l} \pi = -\pi/2 + x \\ \pi + \pi/2 = x \\ 3\pi/2 = x \\ \left(\frac{3}{2}\pi; 0\right) \end{array} $	$ \begin{array}{l} 2\pi = -\pi/2 + x \\ 2\pi + \pi/2 = x \\ 5\pi/2 = x \\ \left(\frac{5}{2}\pi; 0\right) \end{array} $
---	---	---

- Máximo:

$$\begin{array}{l}
 3 = 3 \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 3:3 = \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 \operatorname{arc sen}(1) = -\pi/2 + x \\
 \frac{\pi}{2} = -\pi/2 + x \\
 \pi = x \\
 (\pi; 3)
 \end{array}$$

- Mínimo:

$$\begin{array}{l}
 -3 = 3 \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 -3:3 = \operatorname{sen}(-\pi/2 + x) \\
 \operatorname{arc sen}(-1) = -\pi/2 + x \\
 \frac{3}{2}\pi = -\pi/2 + x \\
 2\pi = x \\
 (2\pi; 3)
 \end{array}$$

Te invitamos a que realices el gráfico correspondiente, a partir de los datos obtenidos.

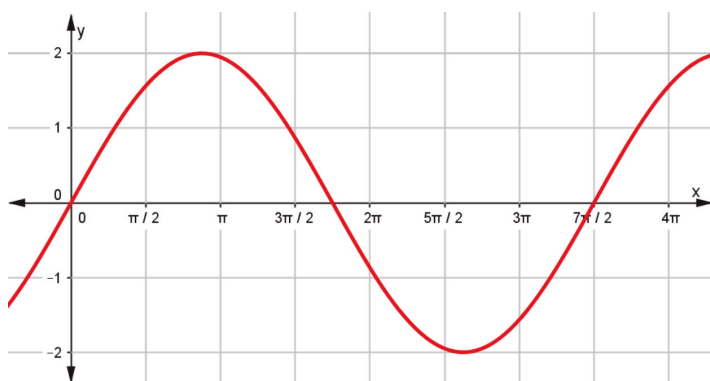
EJEMPLO

A partir del siguiente gráfico, construyan una fórmula que lo represente.

Para construir una fórmula para esta senoide, podríamos comenzar por recordar la expresión general:

$$f(x) = a \cdot \text{sen}(bx - c) + d$$

Es necesario hallar la amplitud (a), la pulsación (b), el período (T), el ángulo de fase φ y el parámetro d .



Si observamos la gráfica, vemos que la función no tiene desplazamiento vertical por lo que $d = 0$.

La amplitud se determina rápidamente, dado que la imagen abarca el intervalo $[-2, 2]$. Luego $a = 2$.

El período T se puede calcular como la diferencia entre la coordenada x del P_f y la coordenada x del P_i .

Conociendo, T se puede despejar b a partir de la fórmula $T = \frac{2\pi}{|b|}$.

En este caso, $P_i = (0, 0)$ y $P_f = (\frac{7}{2}\pi, 0)$. Luego $T = \frac{7}{2}\pi \rightarrow b = \frac{4}{7}$

Para obtener c , se observa en la gráfica cuál es el ángulo de fase y sabemos que éste se relaciona con el parámetro c mediante la fórmula

$$\varphi = \frac{c}{b}. \text{ Como } \varphi = 0, \text{ entonces } c = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos en la expresión general, la fórmula hallada resulta:

$$f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4}{7}x\right)$$

¿Existirán otras formas de escribir a esta función?