CAPÍTULO 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es una combinación de números o letras (llamadas *variables o indeterminadas)* relacionadas entre sí por operaciones matemáticas.

EJEMPLO

$5x^2 + 2$

$x^2 - 3x + 2x^{-3}$

$\frac{6}{x} - 4$

$\frac{1}{3}\sqrt{x} + 5x - x^5 + \frac{2}{5}x^2 + 8$

¿Podrían decir si las expresiones anteriores son polinomios?

Las expresiones algebraicas se denominan **polinomios** si son expresiones *enteras,* es decir, aquellas expresiones en las que la indeterminada no se encuentra dividiendo ni afectada por exponentes negativos o racionales.

Los polinomios que estudiamos en este curso dependen de una sola variable representada generalmente por la letra x y sus coeficientes son números reales.

La expresión general que los caracteriza es:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0.$$

Donde:

- a_n ; a_{n-1}; $\dots a_1$; a_0 son números reales llamados *coeficientes*,
- n; $n-1$; $\dots$; 1 son los exponentes enteros positivos.
- Si $a_n \neq 0$, decimos que el polinomio tiene *grado* n *y* a_n y es el *coeficiente principal*.
- El coeficiente a_0 recibe el nombre de *término independiente*.

El polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x - 1$, es de grado ...., con coeficiente principal igual a .... y su término independiente es ....

¿Qué pasaría si todos los coeficientes de un polinomio son ceros?

RELEYENDO LA DEFINICIÓN, ¿PODRÍAN DECIDIR SI LAS SIGUIENTES EXPRESIONES SON O NO POLINOMIOS?

$P(x) = 3x^2 + 2x^4 - 3$

$S(x) = 3x - 2x^{-4} + 5x^{-2} - 7x^3$

$Q(x) = -x + \frac{2}{5}$

$T(x) = \frac{3}{4}$

$R(x) = 4x^5$

$U(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 3x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 5x^3$

¿EN QUÉ SE DIFERENCIAN LAS EXPRESIONES ANTERIORES?

Notando las diferencias de cada uno de ellos, podemos definir:

- **Monomio:** Polinomio de un solo término.
- **Binomio:** Polinomio de dos términos.
- **Trinomio:** Polinomio de tres términos.
- **Cuatrinomio:** Polinomio de cuatro términos.

De aquí en más, se llaman ***polinomios de*** **"k"** términos, donde k es la cantidad de términos que lo componen.

Identifiquen si los polinomios anteriores son monomios, binomios, trinomios, etc.

¿RECUERDAN CUÁNDO UN POLINOMIO ESTÁ ORDENADO Y COMPLETO?

Un polinomio está ***ordenado*** cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados. Para estudiarlos utilizaremos la forma decreciente.

En los polinomios anteriores, ¿El polinomio $P(x)$ está ordenado? Si no es así, ¿cómo harías para ordenarlo?

Por último, un polinomio está ***completo*** cuando tiene todos los términos, desde el término de mayor grado hasta el término independiente; esto se cumple cuando todos los coeficientes son distintos de cero. ¿Cómo se puede completar un polinomio incompleto?

¿Cuánto vale $P(x) = -x^3 + 6x + 5$ si x vale 3?

En general, ¿cuánto vale $P(x)$ si x vale a?

ESPECIALIZACIÓN DE UN POLINOMIO

En un polinomio $P\ (x)$, x es la variable o indeterminada. Cuando le asignamos a x un valor determinado, decimos que el polinomio $P(x)$ está *especializado* en ese valor y el resultado es un valor numérico.

EJEMPLOS

1. Si consideramos $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x$, $P(x)$ especializado en $x = 2$ resulta:

$$P(2) = -2^5 + 2.2^3 + 2^2 - 3.2 = -18$$

¿Cuál será el valor numérico que resulte de especializarlo en $x = -1$? ¿Y en $x = 0$? ¿Pueden proponer otros valores para especializarlo?

Si la especialización en a del polinomio $P(x) = 2x^3 - 4$ arroja el valor numérico 50, ¿cuál es el valor de a?

2. Si consideramos $P(x) = x^2 - 9$, $P\ (x)$ especializado en $x = -3$ resulta:

$$P\ (-3) = (-3)^2 - 9$$
$$P\ (-3) = 0$$

Si al especializar un polinomio obtenemos como resultado cero, el valor asignado a la variable se llama *raíz* del polinomio. Entonces:

a es raíz de $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$

¿Cómo harían para sumar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?

$P(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA O ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para sumar dos o más polinomios, se deben sumar los coeficientes de los términos semejantes, es decir, aquellos que tienen el mismo grado. Por esto decimos que la suma de polinomios se realiza "término a término".

EJEMPLO

Sean $P(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

$P(x) + Q(x) = 4x^4 + 6x^2 - 3x + 2 \quad + \quad 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$

Se asocian los términos de igual grado y resulta:

$P(x) + Q(x) = 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3$

Otra forma de sumar es completando cada uno de los polinomios y luego disponerlos uno de debajo de otro encolumnando los términos del mismo grado

$$P(x) + Q(x) = \begin{array}{r} 4x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 2 \\ +\ 3x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \\ \hline 7x^4 - 7x^3 + 6x^2 - x + 3 \end{array}$$

¿Siempre se cumplirá que la suma de dos polinomios del mismo grado es otro polinomio del mismo grado?

Si la suma de dos polinomios es igual al polinomio nulo, se cumple que los coeficientes de los términos de igual grado que los constituyen son números opuestos y los polinomios se llaman **polinomios opuestos**. Al opuesto de $P(x)$ se lo indica $-P(x)$.

Por ejemplo el opuesto de

$P(x) = -3x^5 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$ es $-P(x) = 3x^5 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$

Las mismas propiedades que se cumplen en la adición de números reales (cuadro de pág. 16 del capítulo 1), se cumplen en la adición de polinomios. Esta analogía se repetirá con las operaciones de resta, multiplicación y división.

¿Cómo harían para restar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?

$P(x) = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ $\qquad Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x$

RESTA O SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

Para restar dos polinomios, se suma el opuesto del sustraendo. Es decir, para efectuar $P(x) - Q(x)$, debemos sumar a $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$, entonces $P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$.

EJEMPLO

Sean $P(x) = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ $Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - 4x$

Para calcular $P(x) - Q(x)$, encontremos el opuesto de $Q(x)$.
Luego $-Q(x) = -5x^3 - 6x^2 + 4x$.
Entonces,

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] = 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 + (-5x^3 - 6x^2 + 4x)$$

Asociando los términos de igual grado:

$$P(x) - Q(x) = 5x^3 - 5x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 1$$

Agrupándolos con las operaciones correspondientes:

$$P(x) - Q(x) = 0x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 7x - 1$$

Lo que es equivalente al polinomio $-\frac{15}{2}x^2 + 7x - 1$.

Si la resta de dos polinomios es igual al polinomio nulo, dichos polinomios son iguales.

¿Cómo harían para multiplicar los siguientes polinomios $P(x)$ y $Q(x)$?
$P(x) = 5x^3 + 4$ $Q(x) = 3x^3 + 5x - 2$

MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO DE POLINOMIOS

¿RECUERDAN LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA?
Para multiplicar dos polinomios, aplicamos reiteradamente esta propiedad del producto respecto de la suma y de la resta, luego agrupamos los términos de igual grado y así reducimos la expresión. Cabe mencionar que al multiplicar dos polinomios se obtiene otro polinomio; ¿cuál será el grado del polinomio resultante?

¿En la multiplicación $P(x) \cdot Q(x)$ son necesarios los paréntesis en $P(x)$ y en $Q(x)$?

EJEMPLO

Sean $P(x) = 5x^3 + 4$ y $Q(x) = 3x^3 + 5x - 2$

Para hallar $P(x) \cdot Q(x) = (5x^3 + 4) \cdot (3x^3 + 5x - 2)$

Aplicamos la propiedad distributiva término a término:

$$= 5x^3 \cdot (3x^3 + 5x - 2) + 4 \cdot (3x^3 + 5x - 2)$$

$$= 15x^6 + 25x^4 - 10x^3 + 12x^3 + 20x - 8$$

Agrupando los términos semejantes $\quad P(x) \cdot Q(x) = 15x^6 + 25x^4 + 2x^3 + 20x - 8$

DIVISIÓN O COCIENTE DE POLINOMIOS

Para dividir dos polinomios hace falta que recordemos las divisiones enteras con números.

$$\begin{array}{l|l} \textit{Dividendo} & \textit{Divisor} \\ \hline \textit{Resto} & \textit{Cociente} \end{array}$$

¿Recuerdan en qué condiciones podemos dividir dos números naturales?

En la división de polinomios mantenemos el procedimiento, pero en este caso operamos con polinomios.
En una división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

$P(x)$ es el dividendo, $Q(x)$ el divisor, $C(x)$ el cociente, $R(x)$ el resto y se cumple que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

dividendo = divisor · cociente + resto

EJEMPLO

En principio, dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniendo así el primer término del cociente y el primer resto parcial.

$$\begin{array}{rl|l} & 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 8 & 3x^2 + 5x - 2 \\ \cline{3-3} - & 7x^4 + \frac{35}{3}x^3 - \frac{14}{3}x^2 & \frac{7}{3}x^2 \\ \cline{2-2} & \underbrace{-\frac{20}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^2 + 0x + 8}_{\textit{Resto parcial}} & \end{array}$$

Luego continuamos con el mismo procedimiento a partir del resto parcial obtenido, encontrando así el segundo término del cociente.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boldsymbol{7x^4+5x^3+6x^2}+0x+8 & \boldsymbol{3x^2+5x-2} \\
\cline{3-3}
- & 7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2 & \frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x \\
\cline{2-2}
 & -\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
- & -\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x & \\
\cline{2-2}
 & \underbrace{0+\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8}_{Resto\ parcial} &
\end{array}
$$

En este punto debemos preguntarnos si continuamos la división. En la división de números naturales, terminamos la “cuenta” cuando el resto es menor que el divisor. En polinomios, miramos los grados. Cuando el **polinomio resto tenga grado menor al divisor, finaliza la operación.** En este caso, ambos tienen grado dos por lo que debemos continuar dividiendo.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boldsymbol{7x^4+5x^3+6x^2}+0x+8 & \boldsymbol{3x^2+5x-2} \\
\cline{3-3}
- & 7x^4+\frac{35}{3}x^3-\frac{14}{3}x^2 & \underbrace{\frac{7}{3}x^2-\frac{20}{9}x+\frac{196}{27}}_{Cociente\ C(x)} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{20}{3}x^3+\frac{32}{3}x^2+0x+8 & \\
- & -\frac{20}{3}x^3-\frac{100}{9}x^2+\frac{40}{9}x & \\
\cline{2-2}
 & 0+\frac{196}{9}x^2-\frac{40}{9}x+8 & \\
- & \frac{196}{9}x^2+\frac{980}{27}x-\frac{392}{27} & \\
\cline{2-2}
 & \underbrace{-\frac{1100}{27}x+\frac{608}{27}}_{Resto\ R(x)} &
\end{array}
$$

¡Ahora sí terminamos la división! Porque el grado del resto es uno, menor que el grado del divisor que es dos.

¿Habrá una forma más sencilla de realizar divisiones entre polinomios?

¡La respuesta es sí! La regla de Ruffini, pero... tiene ciertas condiciones.

¿Recuerdan cuáles son esas condiciones?

REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruffini permite dividir un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $Q(x)$ mónico y de grado uno.
Es una forma práctica para dividir cualquier polinomio por un binomio de la forma "$x - a$" siendo a un número real.

Un polinomio es mónico si su coeficiente principal es uno.

¿Cómo sería el grado del polinomio cociente? ¿Por qué?

EJEMPLO

Si tenemos que dividir $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 3$ por $Q(x) = x - 3$, podemos utilizar esta regla porque el polinomio divisor $Q(x)$ tiene la forma $x - a$.
Organizamos los coeficientes de esta manera:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{Coeficientes\ de\ P(x)\ completo\ y\ ordenado}} \\
 & 2 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
\overbrace{3}^{a} & & +6 & 18 & 63 & \\
 & & & & & 189 \\
\hline
\times & \underbrace{2}_{\substack{Coeficiente \\ principal\ de P(x)}} & 6 & 21 & 63 & \underbrace{186}_{Resto}
\end{array}
$$

Luego el cociente $C(x)$ se construye con los valores obtenidos como coeficientes y su grado es uno menos que el de $P(x)$:
$C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 21x + 63$ y el último valor corresponde al *Resto* $= 186$.

¿Podríamos verificar que dicha división es correcta? ¿Cómo?

En el siguiente esquema, mostramos en paralelo la división tradicional de polinomios y la división con la REGLA DE RUFFINI.

División tradicional	División por Regla de Ruffini
$$\begin{array}{rl} 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1 & \underline{\lvert x + 2} \\ \underline{3x^3 + 6x^2} \quad\quad\quad & \\ x^2 + 6x - 1 & \\ \underline{x^2 + 2x} \quad & \\ 4x - 1 & \underbrace{3x^2 + x + 4}_{Cociente\ C(x)} \\ \underline{4x + 8} & \\ \underbrace{-9}_{R(x)} & \end{array}$$	$$\begin{array}{c\|cccc} & 3 & 7 & 6 & -1 \\ -2 & & -6 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & \underbrace{-9}_{Resto} \end{array}$$ 3, 1 y 4 corresponden a los coeficientes del cociente. Luego $C(x) = 3x^2 + x + 4$

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema nos aporta una herramienta muy útil para el caso particular en que realizamos la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, donde a es un número real.
Considerando que **dividendo = divisor · cociente + resto**, en estas divisiones podemos reemplazar $Q(x)$ por $(x - a)$:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R(x)$$

Especializando el polinomio $P(x)$ en $x = a$ en resulta

$$P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot C(a) + R(a) \Rightarrow P(a) = R(a)$$

Este resultado permite conocer el resto de una división sin realizar la operación, simplemente especializando el polinomio dividendo en el valor a.

Teorema del Resto: Al dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, se obtiene como resto un número que es igual a $P(a)$.

EJEMPLO

Siguiendo el ejemplo anterior, tenemos que $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 6x - 1$ y $Q(x) = x + 2$.
Para que el divisor sea de la forma $x - a$, $Q(x)$ puede escribirse como $x - (-2)$, entonces $a = -2$.
El resto, según el teorema anterior, puede hallarse calculando $P\ (a)$.
Entonces, $P\ (-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 1 = -9$, coincide con el resto hallado en la división.

SIN REALIZAR LA DIVISIÓN, ¿PUEDEN CALCULAR LOS SIGUIENTES RESTOS?

Polinomio dividendo	Polinomio divisor	Resto
$S(x) = 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 8$	$T(x) = x - 2$	
$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$	$U(x) = x + 3$	
$P(x) = 5x^3 + 4$	$V(x) = -2x + 8$	

¿SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA DEL RESTO CON EL DIVISOR $V(x)$?

¿CÓMO DIVIDIR CUANDO EL POLINOMIO DIVISOR ES UN BINOMIO PERO NO ES MÓNICO?

Recordemos que para aplicar la REGLA DE RUFFINI el polinomio divisor debe ser un binomio de grado uno y mónico. Cuando la última condición no se cumple, podemos dividir ambos polinomios, dividendo y divisor, por el coeficiente principal del divisor. Pero tengamos en cuenta que:

> Si en una división se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, se obtiene el **mismo cociente** pero el *resto* queda *dividido* por dicho número.

EJEMPLO

Si queremos hacer el cociente entre $P(x) = 5x^3 + 4$ y $V(x) = -2x + 8$, dividimos por -2 a $V(x)$ para transformarlo en mónico y también a $P(x)$ para que el cociente sea el mismo.

$$\text{Luego } \frac{P(x)}{-2} = -\frac{5}{2}x^3 - 2 \quad \text{y} \quad \frac{V(x)}{-2} = x - 4.$$

Como ahora $x - 4$ es mónico realizamos la división por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -2 \\ 4 & & -10 & -40 & -160 \\ \hline & -\frac{5}{2} & -10 & -40 & \underbrace{-162}_{R'} \end{array}$$

El cociente de $P(x){:}V(x)$ es $C(x) = -\frac{5}{2}x^2 - 10x - 40$. El resto quedó dividido por -2, entonces:

$$R' = \frac{R}{-2} \Rightarrow R = -162.(-2) = 324$$

> ¿Qué podemos decir de a si el resto da 0, es decir, si $P(a) = 0$?
> Y en ese caso, ¿qué relación existe entre el dividendo $P(x)$ y el divisor $x - a$?

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Para hallar divisores, cuando trabajamos con números, utilizamos los criterios de divisibilidad, pero en polinomios, ¿cuándo un polinomio será divisor de otro?
Cuando realizamos la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ y el resto que obtenemos es cero, decimos que $P(x)$ **es divisible por** $Q(x)$ y en tal caso, podemos expresar $P(x)=Q(x)\cdot C(x)$.
¿Cómo podemos averiguar si $P(x)$ es divisible por $(x - a)$ sin hacer la división?
Para que $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$, el resto de la división debiera ser cero. Si usamos el TEOREMA DEL RESTO, especializando $P(x)$ en a, podemos calcular ese resto. Es decir, si $P(a) = 0$ (o a es raíz de P), entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Si a es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ **es divisible** por $x - a$.

¿Podríamos decir de manera equivalente que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$ o que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$?

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

El *teorema fundamental del álgebra (TFA)* afirma que *todo polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales, puede descomponerse en un producto de factores de primer o segundo grado, también con coeficientes reales.*
Pero un polinomio puede tener raíces *reales* y raíces *no reales*. Por lo tanto, una consecuencia del teorema es:

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Las raíces no reales de un polinomio, siempre vienen de a par. Entonces, ¿es correcto decir que un polinomio de grado impar tendrá al menos una raíz real?

VEAMOS ALGUNOS EJEMPLOS DE CÓMO HALLAR RAÍCES DE POLINOMIOS DE DISTINTOS GRADOS.

EJEMPLOS

1. Sea $P(x) = -2x + 3$ para encontrar la raíz (la única porque tiene grado uno), debemos igualarlo a cero (revisar definición de raíz), y despejar el valor de x. En el ejemplo $-2x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$ es la raíz buscada.

2. Sea $P(x) = x^2 + 3$ por TFA tendrá como máximo dos raíces reales, pero también puede pasar que no tenga ninguna. Igualamos a cero $x^2 + 3 = 0 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3}$ este resultado no pertenece al conjunto de los números reales, por lo tanto, no tiene raíces en $\mathbb{R}$.

En un polinomio $ax^2 + bx$, ¿es necesario aplicar la fórmula resolvente para hallar las raíces?

3. Sea $P(x) = -5x^2 + 15x + 20$ para hallar las raíces, $-5x^2 + 15x + 20 = 0$.

Para resolver esta ecuación conocemos la fórmula resolvente o de Bhaskara $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

En nuestro ejemplo $x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2-4.(-5).20}}{2.(-5)} = \frac{-15 \pm \sqrt{625}}{-10} = \frac{-15 \pm 25}{-10}$

Entonces $x_1 = \frac{-15+25}{-10} = -1$ y $x_2 = \frac{-15-25}{-10} = 4$, tiene las dos raíces reales.

4. Sea $P(x) = x^3 + 125$ buscamos al menos una raíz real, igualando a cero.

$$x^3 + 125 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Hallamos una raíz $x = -5$, pero el polinomio es de grado tres, debe tener tres raíces. Entonces, *¿cómo establecemos las otras dos raíces?*
Si sabemos que $x = -5$ es raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por el $x + 5$.
Utilizando la REGLA DE RUFFINI para dividir el polinomio:

	1	0	0	125
-5		-5	25	-125
	1	-5	25	$\underbrace{0}_{Resto}$

Entonces $P(x) = (x+5) \cdot (x^2 - 5x + 25)$. ¿Cómo obtenemos ahora las otras dos raíces?

¿Cómo buscamos las raíces de polinomios de grado tres completos o de mayor grado?

MÉTODO DE GAUSS

Para poder encontrar, si existen, las *raíces racionales* de un polinomio de grado n (en general $n \geq 3$) con coeficientes enteros de la forma $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, podemos utilizar el MÉTODO DE GAUSS, que consiste en:

- Tomar los valores del coeficiente principal a_n y del término independiente a_0
- Listar todos los divisores de ellos, por separado.
- Formar todas las combinaciones de $\frac{Divisores\ de\ a_0}{Divisores\ de\ a_n}$, que son las posibles raíces racionales.
- Aplicando el Teorema del Resto, podemos establecer cuál o cuáles de esos valores son raíces.
- Una vez obtenida una raíz a, podemos dividir por el polinomio $x - a$ con la REGLA DE RUFFINI, como se realizó en el ejemplo anterior.

EJEMPLO

Nos proponemos calcular las raíces del siguiente polinomio: $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8\,x + 4$
Sabemos que $P(x)$, por ser de grado tres, tiene al menos una raíz real. La buscamos aplicando el TEOREMA DE GAUSS. Los divisores del coeficiente principal son: ± 1 y del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Por lo tanto, $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ son posibles raíces racionales.
Aplicamos el TEOREMA DEL RESTO con esos valores y vemos que -1 es raíz pues $P(-1) = 0$. Por ende, $P(x)$ es divisible por $x + 1$. Aplicando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \underbrace{0}_{Resto} \end{array}$$

Entonces $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 4\,x + 4)$
$P(x)$ es de grado tres, y por TFA puede tener como máximo tres raíces reales. Buscamos entonces las raíces de $x^2 + 4x + 4$.
Podemos hallarlas con fórmula resolvente, dado que se trata de un polinomio de grado dos completo.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} \quad \Big\} x_1 = x_2 = -2$$

Las raíces de $P(x)$ son $x = -1$ y $x_1 = x_2 = -2$. Obtuvimos dos valores, ¿tiene entonces tres raíces?

MULTIPLICIDAD DE LAS RAÍCES

En el ejemplo anterior, al calcular las raíces de $P(x)$, resultaron dos de ellas iguales; decimos que se trata de una **raíz doble** o que tiene **multiplicidad dos**.

EN EL EJEMPLO ANTERIOR

Raíces de $\boldsymbol{P(x)}$	Multiplicidad de las raíces
$\boldsymbol{x = -1}$	1
$\boldsymbol{x = -2}$	2

¿Cuánto deben sumar las multiplicidades de las raíces de un polinomio de grado n que tiene todas sus raíces reales?

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios primos. ¿Cuándo un polinomio es primo?

Los factores son aquellos elementos que intervienen en una multiplicación.

Un polinomio de grado no nulo es **primo** o **irreducible** cuando no puede ser expresado como producto de dos o más polinomios de menor grado. Entonces, son primos todos los polinomios de grado uno o aquellos de grado dos con raíces no reales.
Existen distintas formas de factorizar polinomios, pero antes de estudiarlos, diremos que todo polinomio $P(x)$ compuesto y de grado n que tenga n raíces reales puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n\,(x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

Donde a_n es el coeficiente principal de $P(x)$ y $r_1, r_2 \ldots r_n$ son las n raíces de $P(x)$.

OTRAS TÉCNICAS PARA FACTORIZAR

EXTRAER FACTORES COMUNES

Ya hemos definido qué es un factor; que sea común hace referencia a que se encuentra en todos los términos. Para extraer, entonces, un factor común debemos identificar los elementos comunes de todos los términos y extraerlos fuera de un paréntesis.

EJEMPLOS

1. Si $P(x) = 3x^6 + 12x^3 - 15x$, observamos que 3 es un factor común a los tres términos y x también. Podemos extraerlos como *factores comunes. Entonces* $P(x) = 3x \cdot (x^5 + 4x^2 - 5)$.
¿Existe alguna propiedad conocida que permita verificar que no cambiamos la expresión asociada a $P(x)$?

¿Podrían haber extraído x^6 como factor común? ¿$P(x)$ está totalmente factorizado?

2. Si $Q(x) = 3x^6 + 12x^3 - 8x^2$, podemos escribir $Q(x) = 3x^2 \cdot \left(x^4 + 4x - \frac{8}{3}\right)$. Aunque 3 no sea un factor común del último término, de todos modos puede extraerse.

3. Si $R(x) = -4x^2 + 12x$, podemos extraer $-4x$ factor común: $R(x) = -4x \cdot (x - 3)$

EXTRAER FACTORES COMUNES POR GRUPOS

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos y sacar factores comunes en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común.

EJEMPLO

Sea $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 8$

Identificamos factores comunes a cada grupo

$$Q(x) = \underbrace{x^3 + 4x^2}_{factor\ común\ x^2} - \underbrace{2x - 8}_{factor\ común -2}$$

Queda un nuevo factor visible

$$Q(x) = x^2 \cdot \underbrace{(x + 4)}_{factor\ común} - 2 \cdot \underbrace{(x + 4)}_{factor\ común}$$

Lo extraemos

$$Q(x) = (x + 4) \cdot (x^2 - 2)$$

Para expresar a $Q(x)$ de forma factorizada, faltaría descomponer $x^2 - 2$.

Si la agrupación se realiza asociando $(x^3 - 8) + (4x^2 - 2x)$
¿Podrían aplicar factor común por grupos?

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Analizando el título de este apartado, cada vez que hablamos de una diferencia nos referimos a una resta, y “de cuadrados” se refiere a los elementos de la resta elevados al cuadrado.
En general se cumple que:

$$x^2 - a^2 = (x - a) \cdot (x + a)$$

¿CÓMO PODRÍAN DEMOSTRAR ESTA IGUALDAD?

EJEMPLOS

1. Sea $P(x) = x^2 - 9$; podríamos escribirlo como $x^2 - 3^2$ y reconocemos una diferencia de cuadrados es equivalente a

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x + 3)$$

2. Sea $Q(x) = -3x^2 + 6$; podemos extraer FACTOR COMÚN el -3. Obtenemos $-3 \cdot (x^2 - 2)$, para factorizar la diferencia de cuadrados podemos escribir a $2 = \sqrt{2}^2$.

Luego $Q(x) = -3 \cdot (x^2 - 2) = -3 \cdot (x^2 - \sqrt{2}^2) = -3 \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$

¿Recuerdan cómo desarrollar el cuadrado de un binomio $(a + b)^2$?

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Al contestar la pregunta anterior, seguramente obtuvieron $a^2 + 2.ab + b^2$. A estos tres términos se los llama TRINOMIO CUADRADO PERFECTO. ¿Cuáles son las características que posee esta estructura?

Recíprocamente, cuando tenemos que factorizar un trinomio, es conveniente analizar si corresponde a un trinomio cuadrado perfecto porque nos permite expresarlo como el cuadrado de un binomio.

$$\overbrace{(a \pm b)^2}^{cuadrado\ de\ un\ binomio} = \overbrace{a^2 \pm 2ab + b^2}^{trinomio\ cuadrado\ perfecto}$$

¿CÓMO PODRÍAN DEMOSTRAR ESTA IGUALDAD?

EJEMPLOS

1. Si $P(x) = x^2 - 2x + 1$, podemos afirmar que x^2 y 1 son cuadrado perfectos; luego $2x$ es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Luego $P(x) = (x - 1)^2$.

2. Si $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$, podemos hacerlo mónico extrayendo FACTOR COMÚN 4. Luego $Q(x) = 4 \cdot \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right)$. Vemos que x^2 y $\frac{9}{4}$ son cuadrados perfectos. El término restante es igual al doble producto de las bases de esos cuadrados, dado que $2.x.\frac{3}{2} = 3x$. Entonces $Q(x) = 4.\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$

¿La expresión $x^4 + 2x^2 - 4$ corresponde a un trinomio cuadrado perfecto? ¿Por qué?

DOBLE CUADRÁTICA O BICUADRÁTICA

Existen polinomios de grado cuatro incompletos de la forma $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Esto nos recuerda a polinomios de grado dos completos; para estos casos, utilizaremos la DOBLE CUADRÁTICA. Veámoslo con un ejemplo.

EJEMPLO

Sea $P(x) = 3x^4 + 18x^2 - 21$; podemos hacer una sustitución:

$t = x^2 \Rightarrow P(t) = 3t^2 + 18t - 21$

El polinomio $P(t)$ es de grado dos completo, por lo que utilizamos la fórmula resolvente para determinar sus raíces:

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3}$$

Resolviendo, obtenemos que $t_1 = 1$ y $t_2 = -7$
Luego $P(t) = 3 \cdot (t - 1) \cdot (t + 7)$

Pero las raíces buscadas no eran para sino para , por lo que, utilizando la sustitución realizada y los valores obtenidos, podemos decir:

$$t_1 = x^2 = 1 \implies \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

$$t_2 = x^2 = -7 \implies \left.\begin{array}{l} x_3 = \sqrt{-7} \\ x_4 = -\sqrt{-7} \end{array}\right\} \textit{no pertenecen a } \mathbb{R}$$

Entonces $P(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 7)$

¿Podemos factorizar a $Q(x) = x^4 + 4x - 5$ utilizando este método? ¿Por qué?

ALGUNAS SUGERENCIAS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

Hasta ahora hemos estudiado distintas formas para la factorización de polinomios.

Dado un polinomio, podrán utilizar cualquier método que sea posible aplicar según las características de él. Incluso en la mayoría de los casos necesitarán más de uno de ellos.

En general, sugerimos tratar de factorizarlo de la manera más sencilla posible.

- En primer lugar buscar extraer un factor común.
- Luego considerar el número de términos.
  - Si es un binomio, observen si es una diferencia de cuadrados.
  - Si es un trinomio, analicen si es un trinomio cuadrado perfecto o una bicuadrática.
  - Si tiene más de tres términos, traten de agrupar y utilizar factor común por grupos.
- Si es de grado dos, busquen sus raíces de la manera más conveniente.
- Si no corresponde a ninguno de los pasos anteriores, y es de grado mayor a dos pueden encontrar una raíz aplicando el Teorema de Gauss (recuerden que sus coeficientes deben ser números enteros), aplicar el algoritmo de Ruffini para hallar el cociente y expresar el dividendo como divisor por cociente. Si es necesario, aplicar nuevamente este procedimiento o cualquier otro que consideren conveniente.

RECUERDEN: para que el polinomio esté totalmente factorizado cada factor debe ser primo y el coeficiente principal tiene que ser un factor de esa descomposición.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Existen similitudes entre los números racionales y las expresiones algebraicas racionales. Te invitamos a que las encuentres a partir de las definiciones que te ofrecemos a continuación.
Para comenzar les sugerimos que repasen las definiciones y propiedades de números racionales que se desarrollan en el Capítulo 1: Números Reales

¿A QUÉ LLAMAMOS EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES?

Llamaremos *expresiones algebraicas racionales* a las expresiones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios (expresiones algebraicas enteras) en una indeterminada x y $Q(x) \neq 0$.

¿Por qué $Q(x)$ no puede ser cero?

Cuando pensamos en los valores que puede tomar la variable x estamos hablando del dominio de validez.
En este caso, llamaremos **Dominio de Validez** de una expresión algebraica racional al conjunto de todos los números reales, excepto a aquellos valores que sean raíz del denominador.

EJEMPLOS

$\frac{3x}{x-2}; Dom: R-\{2\}$ $\frac{x+4}{x^2-9}; Dom: R-\{\pm 3\}$ $\frac{2x^2+4x+6}{x^2+3x}; Dom: R-\{-3; 0\}$

Toda fracción puede expresarse de manera irreducible. ¿Cómo podríamos encontrar una expresión algebraica irreducible?

Las expresiones algebraicas racionales también pueden ser expresiones irreducibles.

EJEMPLOS

$\frac{3x}{x-2}$ $\frac{x+4}{x^2-9} = \frac{x+4}{(x+3)\cdot(x-3)}$ $\frac{x^2-x-2}{x^2-x-12} = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-4)\cdot(x+3)}$

Para determinar que son expresiones algebraicas irreducibles factorizamos los polinomios numerador y denominador de cada una de ellas, en forma análoga a como lo hicimos con los números racionales en el Capítulo 1, y observamos que no comparten múltiplos en común.

Les proponemos establecer el dominio de validez de las anteriores expresiones racionales.

De igual manera que hicimos con los números racionales, las expresiones algebraicas racionales las podemos simplificar. Para esto se divide el numerador y el denominador de la fracción por un polinomio que sea factor común de ambos.

EJEMPLOS

$$\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = 3 \qquad Dom: R - \{-2\}$$

$$\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)} = \frac{1}{x-3} \qquad Dom: R - \{-3; 3\}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot\cancel{(x-2)}} = \frac{x+1}{x+3} \qquad Dom: R - \{-3; 2\}$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Sigamos con la comparación entre números racionales escritos como fracciones y expresiones algebraicas racionales.

SUMAS Y RESTAS

- Si las expresiones tienen **igual denominador** sumamos o restamos sus numeradores según corresponda.

EJEMPLOS

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+x+2}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x-2} \qquad Dom: R-\{2\}$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1-(2x-1)}{x-1}=\frac{1-2x+1}{x-1}=\frac{-2x+2}{x-1}=\frac{-2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-2 \qquad Dom: R-\{1\}$$

• Para expresiones de **distinto denominador**, debemos transformarlas en expresiones equivalentes, que tengan el mismo denominador. Para ello utilizamos el m.c.m.

EJEMPLOS

$$\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\underbrace{\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x\cdot(x-2)}}_{\text{Factorizamos los denominadores}}=\underbrace{\frac{x.x}{x\cdot(x-2)}+\frac{3x-1}{x\cdot(x-2)}}_{\text{Hallamos el m.c.m para obtener expresiones equivalentes.}}=\frac{x^2+3x-1}{x\cdot(x-2)} \qquad Dom: R-\{0;2\}$$

El m.c.m. entre dos o más polinomios es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas racionales es otra expresión algebraica racional, cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas (tal como lo hacíamos con los números fraccionarios).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot S(x)}; \qquad Q(x)\neq 0 \wedge S(x)\neq 0$$

EJEMPLO

$$\frac{x^2}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3x^3-3x}=\underbrace{\frac{\cancel{x}\cdot x}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}\cdot\frac{\cancel{x+2}}{3\cancel{x}\cdot(x-1)\cdot(x+1)}}_{}=\frac{x}{(x-2)}\cdot\frac{1}{3\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x}{3\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$$

Factorizamos los polinomios y simplificamos.

¿Cuál es el dominio de validez de este producto?

Debemos recordar que para dividir dos números racionales, sólo basta con multiplicar por el inverso del segundo.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{S(x)}{R(x)};\qquad Q(x)\neq 0\wedge S(x)\neq 0\wedge R(x)\neq 0$$

EJEMPLO

$$\frac{2x-3}{x+5}:\frac{6x-9}{x^2-25}=\underbrace{\frac{2x-3}{x+5}\cdot\frac{x^2-25}{6x-9}}_{}=\frac{\cancel{2x-3}}{\cancel{x+5}}\cdot\frac{(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}{3\cancel{(2x-3)}}=\frac{x-5}{3}\qquad Dom: R-\left\{-5;\frac{3}{2};5\right\}$$

Factorizamos cada polinomio y simplificamos