CAPÍTULO 6

FUNCIONES Y ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Retomemos la actividad del bloque de numeros reales (página 10)
La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿Y al cabo de 10 días intentando vencerla? ¿Existe alguna expresión que permita calcular la cantidad de cabezas en función de los cortes realizados?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN EXPONENCIAL?

La expresión que permite calcular la cantidad de cabezas de la Hidra es $C(d) = 2^d$ y podemos deducirla de la siguiente tabla:

Cantidad de días d	0	1	2	3	10	d
Cantidad de cabezas $C(d)$	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$1024 = 2^{10}$	2^d

La fórmula genérica de la **Función Exponencial** es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

donde a se denomina base, con $a > 0 \wedge a \neq 1$.

El dominio de la función exponencial son todos los valores reales $\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R}}$, ya que x es un exponente y admite cualquier valor real.
La función tiene por imagen el conjunto $\boldsymbol{Im(f) = (0;\infty)}$ y la gráfica tiene una **asíntota horizontal en** $y = 0$.

¿Por qué la gráfica tendrá una asintota horizontal en $y = 0$?

¿POR QUÉ EL PARÁMETRO a DEBE CUMPLIR ESAS CONDICIONES?

Debemos probar que es necesario que $a > 0 \wedge a \neq 1$.
Supongamos que pasa lo contrario, que $a < 0$. Entonces, aplicando las propiedades de la potencia, sabemos que, si elevamos a potencia par, el resultado es siempre positivo; en cambio, si elevamos a potencia impar, el resultado posee el mismo signo de la base, negativo. Por ejemplo:
Tomemos $a = -2$, entonces.

$$(-2)^0 = 1,\ (-2)^1 = -2,\ (-2)^2 = 4,\ (-2)^3 = -8,\ \ldots$$

Así queda una función oscilante. ¿Pero qué sucede con las potencias fraccionarias?
Por definición sabemos qué $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$. Entonces, por ejemplo:
$(-2)^{\frac{1}{2}}$ no tiene solución, ya que $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ no existe.
De esta manera, vemos que la base no puede ser **negativa**.
Con igual razonamiento prueben que la base no puede valer cero ni uno.

Les proponemos que asocien cada situación con una de las funciones que se muestran más abajo. Expliquen esas asociaciones.

- Cada año que transcurre, los impuestos sufren un aumento del 15%.
- El precio de mi auto se desvaloriza cada año un 5%.
- Una sustancia pierde el 27% de su masa cada año.

$f(x) = 0{,}95^x$ $\quad g(x) = 1{,}15^x$ $\quad h(x) = 0{,}73^x$ $\quad j(x) = 0{,}27^x$

EJEMPLOS: RETOMEMOS LAS SITUACIONES ANTERIORES

- Cada año que transcurre, los impuestos sufren un aumento del 15%.

  La fórmula que corresponde a esta situación es $g(x) = 1{,}15^x$ porque $a = \dfrac{100 \overbrace{+}^{interés} 15}{100} = 1{,}15$ equivalente a 115%

- El precio de mi auto se desvaloriza cada año un 5%.

  La fórmula que corresponde a esta situación es $f(x) = 0{,}95^x$ porque $a = \dfrac{100 \overbrace{-}^{desvaloriza} 0{,}5}{100} = 0{,}95$ equivalente a 95%

- Una sustancia pierde el 27% de su masa cada año.

  La fórmula que corresponde a esta situación es $h(x) = 0{,}73^x$ porque $a = \dfrac{100 \overbrace{-}^{pierde} 0{,}27}{100} = 0{,}73$ equivalente a 73%

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y PORCENTAJE

El parámetro a indica si la función es **creciente o decreciente** y podemos calcularlo de la siguiente manera:

$$a = \frac{100 \pm p}{100} = 1 \pm \frac{p}{100}$$

Donde p indica el porcentaje de incremento o disminución que sufre la función.

En el Banco "Ciudad", se obtiene una tasa de interés anual del $19{,}5\%$ por colocación de dinero en plazo fijo. Ana coloca un capital inicial de $\$5.000$. ¿Cuál será la expresión que permita calcular el dinero D (en miles) que hay en el Banco en función del tiempo t (en años) que transcurren?

FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^x$

La expresión que permite calcular la cantidad de dinero (en miles) en función del tiempo (en años) viene dada por $D(t) = 5 \cdot 1{,}195^t$ y podemos deducirla de la siguiente tabla:

Cantidad de años t	0	1	2	10	t
Cantidad de dinero $D(t)$	$5 = 5^0$	$5{,}975 = 5 \cdot 1{,}195^1$	$7{,}140125 = 5 \cdot 1{,}195^2$	$29{,}6926 = 5 \cdot 1{,}195^{10}$	$D(t) = 5 \cdot 1{,}195^t$

Se define a la función exponencial mediante la fórmula: $\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^x}$ donde el parámetro $\boldsymbol{k}$ indica el valor inicial.

Este parámetro debe ser distinto de cero, es decir, $k \neq 0$. ¿Por qué?

CRECIMIENTO Y DECRECIEMIENTO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

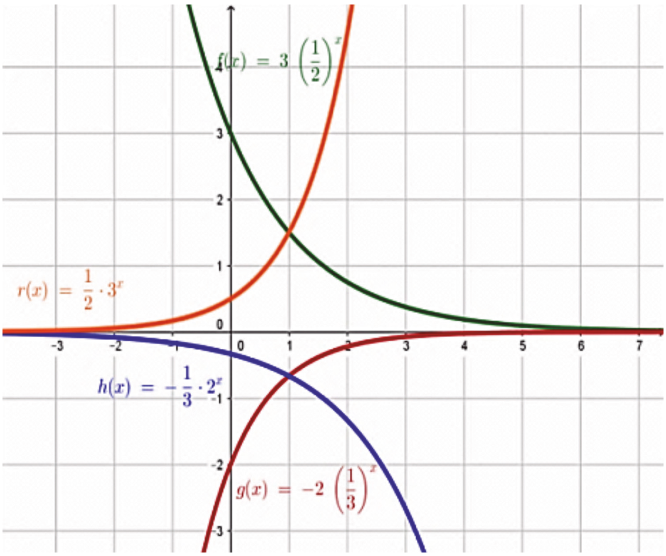
El comportamiento de la función exponencial no sólo se determina por el valor numérico del parámetro $\boldsymbol{a}$ sino que también es afectado por el parámetro $\boldsymbol{k}$:

$Sí \quad a > 1 \wedge k > 0 \vee 0 < a < 1 \wedge k < 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

$Sí \quad a > 1 \wedge k < 0 \vee 0 < a < 1 \wedge k > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

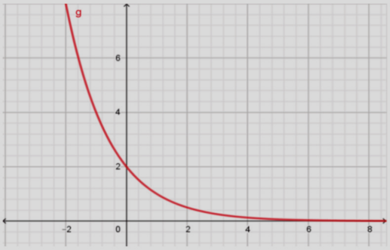
¿Por qué?

EJEMPLOS



Función	k		a		
$h(x) = -\frac{1}{3} \cdot 2^x$	$-\frac{1}{3}$	Negativo $(k<0)$	2	Mayor que 1 $(a>1)$	Decrece
$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	3	Positivo $(k>0)$	$\frac{1}{2}$	Menor que 1 $(0<a<1)$	Decrece
$g(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$	-2	Negativo $(k<0)$	$\frac{1}{3}$	Menor que 1 $(0<a<1)$	Crece
$r(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$	$\frac{1}{2}$	Positivo $(k>0)$	3	Mayor que 1 $(a>1)$	Crece

¿Cómo se modifica la gráfica de $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ si se le suma o resta un valor constante b?



FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^x + b$

El parámetro b, de la fórmula $f(x) = k \cdot a^x + b$, indica el desplazamiento vertical que sufre la función $f(x) = k \cdot a^x$.

Si $b > 0 \Rightarrow$ la función se desplaza b lugares hacia arriba.
Si $b < 0 \Rightarrow$ la función se desplaza b lugares hacia abajo.

¿Qué sucede si $b = 0$?

El conjunto imagen se define:

Sí $k > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (b; \infty)$

Sí $k < 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty; b)$

e es un número real muy importante! Al igual que el número π y el número áureo δ, es un número irracional, no se puede expresar mediante una razón de dos números enteros. Tiene su propia tecla en la calculadora y su valor (con sus primeras cifras decimales) es el siguiente:

$e \cong 2{,}71828182845904523536...$

Te invitamos a buscar y ver en YouTube el video ¿qué es el número e? De derivando https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

$f(x) = e^x$ ¿es una función creciente o decreciente? ¿Por qué?

FUNCIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA $f(x) = k \cdot a^{x-c} + b$

Si analizamos la expresión aplicando las propiedades de la potenciación, obtenemos:

$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^{x-c} + b = k \cdot a^{x} \cdot a^{-c} + b = \underbrace{k \cdot a^{-c}}_{nueva\ constante\ k'} \cdot a^{x} + b = k' \cdot a^{x} + b}$$

ESTUDIO COMPLETO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Recordemos que el estudio de toda función consiste en determinar:

- Dominio
- Imagen
- Raíz / Raíces
- Ordenada al Origen
- Intervalo de Crecimiento y Decrecimiento.
- Conjunto de Positividad y Negatividad

Veamos un ejemplo de Función exponencial:

EJEMPLO

Sea la función $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3$.

- Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Parámetros: $k = 4$, $a = \frac{1}{2}$ y $b = -3$.
- Imagen: $Im(f) = \mathbb{R}_{>-3} = (-3; \infty)$
- Ordenada al origen: $(0; 1)$

$$f(0) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} - 3$$

$$f(0) = 4 \cdot 1 - 3$$

$$f(0) = 4 - 3$$

$$f(0) = 1$$

- Función decreciente ($k > 0\ \wedge a < 1$).
- Ecuación de asíntota horizontal $y = -3$
- Raíz: $(0{,}42; 0)$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3 = 0$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 3$$

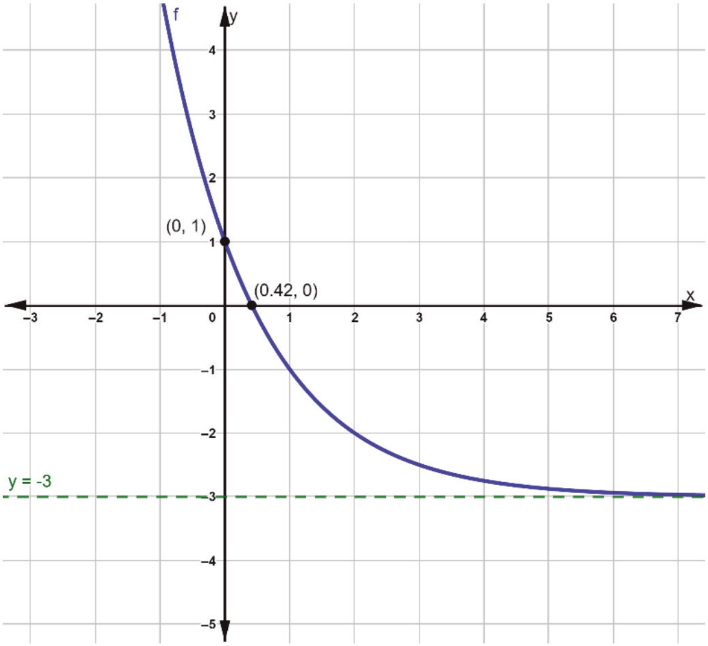
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{3}{4}$$

$$log \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = log \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x \cdot log \left(\frac{1}{2}\right) = log \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x = \frac{log \left(\frac{3}{4}\right)}{log \left(\frac{1}{2}\right)} \cong 0{,}42$$

- Conjunto de Positividad: $C^{+} = (-\infty; 0.42)$
- Conjunto de Negatividad: $C^{+} = (0.42; \infty)$



¿Cuántos años deben transcurir para que Ana tenga en su cuenta $17400 aproximadamente?

ECUACIONES EXPONENCIALES

Para resolver ecuaciones cuya incógnita se encuentra en el exponente, debemos utilizar una de las operaciones inversas de la potencia, estudiada en el capítulo de Números Reales: **LOGARITMO.**

EJEMPLOS

1. Para determinar cuántos años deben transcurrir, aproximadamente, para que Ana tenga en su cuenta $17400, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$5 \cdot 1{,}195^{x} = 17{,}4 \Longrightarrow 1{,}195^{x} = \frac{17{,}4}{5}$$

Podemos resolverla de dos maneras:

- aplicando logaritmo en ambos miembros de la igualdad
- aplicando la definición de logaritmo

Aplicando logaritmo en ambos miembros	Aplicando la definición de logaritmo
$log\ 1{,}195^x = log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$	$1{,}195^x = \frac{17{,}4}{5}$
$x \cdot log\ 1{,}195 = log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$	$x = log_{1{,}195}\left(\frac{17{,}4}{5}\right)$
$x = \frac{log\left(\frac{17{,}4}{5}\right)}{log(1{,}195)}$	$x \cong 7$
$x \cong 7$	

Deberán transcurrir 7 años para que Ana tenga en su cuenta aproximadamente $\$17400$ en su cuenta.

2. Para aplicar logaritmo, debe estar explícita la base, el exponente y el valor resultado. De no estarlo, debemos despejar todo lo que sea necesario.

$$-6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = -246$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = -246 : (-6)$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 41 \Leftrightarrow log_{\frac{2}{5}}\ 41 = x$$

$$\frac{log\ 41}{log\left(\frac{2}{5}\right)} = x$$

$$-4{,}053 \cong x$$

¿Cómo podemos resolver la siguiente ecuación $\frac{4}{3} \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x = 26$?

EJEMPLOS

1.

$$\underbrace{2\cdot 4^x + \frac{3}{2}\cdot 4^x}_{\substack{Los\ términos\ son\\ semejantes}} = 56$$

$$\underbrace{\left(2+\frac{3}{2}\right)\cdot 4^x}_{Sacando\ factor\ común} = 56$$

$$\frac{7}{2}\cdot 4^x = 56$$

$$4^x = 56 : \frac{7}{2}$$

$$4^x = 16$$

$$\log 4^x = \log 16$$

$$x.\log 4 = \log 16$$

$$x = \frac{\log 16}{\log 4}$$

$$x = 2$$

Verifiquemos si el valor obtenido es correcto:

$$\mathbf{2\cdot 4^2 + \frac{3}{2}\cdot 4^2 = 32 + 24 = 56}$$

2. $\underbrace{7\cdot 2^{x-1} - 2^{x+2} = -}_{No\ son\ términos\ semejantes}\ 10$

Tienen misma base, pero los exponentes son distintos, y eso hace que los términos no sean semejantes. Aplicando propiedades de la potenciación, podremos convertirlos en términos semejantes:

$$7\cdot 2^{x-1} - 2^{x+2} = -10$$

$$\underbrace{7\cdot 2^x\cdot 2^{-1} - 2^x\cdot 2^2}_{propiedades\ de\ la\ potencia} = -10$$

$$7\cdot 2^x\cdot\frac{1}{2} - 2^x\cdot 4 = -10$$

$$\underbrace{\frac{7}{2}\cdot 2^x - 4\cdot 2^x}_{son\ términos\ semejantes} = -10$$

$$\underbrace{\left(\frac{7}{2}-4\right)\cdot 2^x}_{sacando\ factor\ común} = -10$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2^x = -10$$

$$2^x = -10 : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2^x = 20$$

$$\log 2^x = \log 20$$

$$x.\log 2 = \log 20$$

$$x = \frac{\log 20}{\log 2}$$

$$x \cong 4{,}3219$$

FUNCIONES Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Retomemos el primer problema de este capítulo.
¿Podrían hallar una expresión que permita calcular la cantidad de cortes en función de la cantidad de cabezas de la Hidra?

¿A QUÉ LLAMAMOS FUNCIÓN LOGARÍTMICA?

La **Función Logarítmica** se define como $\boldsymbol{f(x) = log_b x}$, $f : D \subseteq R \rightarrow R$

b representa la base del logaritmo, la cual debe ser positiva y distinta de 1. ¿Por qué?

El dominio de la función logarítmica está formado por todos los valores reales mayores que cero: $\boldsymbol{Dom\ (f) = \mathbb{R} > 0}$, ya que *x* es el argumento y sólo admite cualquier valor real positivo, así la gráfica tiene una **asíntota vertical en** $x = 0$.

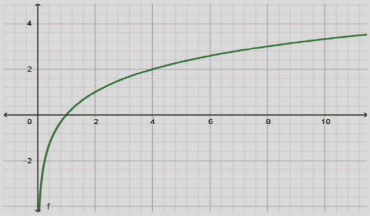
¿Por qué la gráfica tiene una asintota vertical en $x = 0$?

La función tiene por imagen el conjunto $\boldsymbol{Im\ (f) = \mathbb{R}}$

¿POR QUÉ EL DOMINIO ADMITE SOLAMENTE VALORES POSITIVOS?

El dominio de la función logarítmica de la forma $f(x) = \log_b x$ está formado por valores reales positivos, dado que por la definición del logaritmo: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, la base b es positiva y distinta de 1 $(b > 0 \wedge b \neq 1)$. Por lo tanto, elevada a cualquier exponente c, dará como resultado un número a positivo $(a > 0)$. Entonces, el argumento del logaritmo siempre es positivo.
En la función logarítmica, el argumento está representado por la variable independiente. Entonces, sólo tomará valores positivos, por representar el argumento.

La gráfica de $f(x) = \log_2 x$ es la siguiente



¿Cómo se modifica la gráfica si se le suma o resta un valor constante $\boldsymbol{c}$ y un valor constante $\boldsymbol{d}$ a la función?

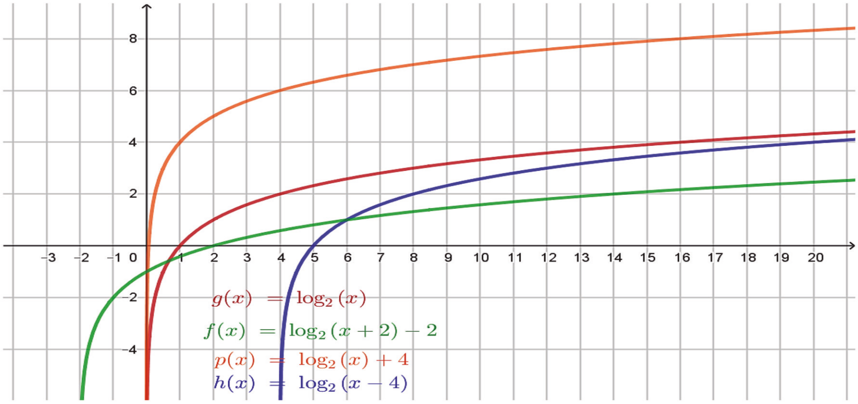
FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE LA FORMA $f(x) = \log_b(x - c) + d$

La función logarítmica definida como $f(x) = \log_b(x-c) + d$, $f: D \subseteq R \to R$, sufre un desplazamiento con respecto a la función genérica $f(x) = \log_b(x)$:

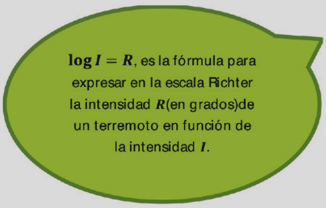
- El parámetro c provoca un desplazamiento horizontal de la gráfica, ya que afecta directamente al argumento.
- El parámetro d provoca un desplazamiento vertical de la gráfica, ya que afecta directamente a la función.

Notaremos, en el ejemplo que sigue, que varios elementos de la gráfica se modifican, tales como el dominio, la ecuación de la asíntota, la ordenada al origen y la raíz.

EJEMPLO



¿Han escuchado sobre la escala sismológica de Richter? ¿Cómo se calcula el grado que cuantifica la energía liberada por un terremoto?



México no para de temblar: otro sismo de magnitud 6,1 sacudió el sur del país

Según los expertos, el sismo fue una réplica del ocurrido el 7 de septiembre en Oaxaca y se sintió en la capital.

Publicada: 23/09/2017 - 12:03 hs.

Un sismo de magnitud 6,1 en la escala de Richter volvió a sacudir el centro y sur de México, desatando las alarmas apenas cuatro días después de que otro poderoso terremoto de 7,1 causara alrededor de 300 víctimas, informó el Servicio Sismológico Nacional (SSN).

¿Calcularon alguna vez el ph de una sustancia? ¿Saben cómo se calculan los decibeles de una onda sonora? ¿Cómo hacen los arqueólogos para saber cuántos años tiene un fósil?

Los invitamos a ver en YouTube el video “Para qué sirven los logaritmos” de Victoria Alfonsea
https://www.youtube.com/watch?v=BVNl8_9L67k

ECUACIONES LOGARITMICAS

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas ecuaciones en donde se desconoce el argumento o la base un logaritmo. Para poder resolverlas debemos aplicar su operación inversa, la potenciación y las propiedades del logaritmo.

EJEMPLOS

Nos proponemos resolver las siguientes ecuaciones

$$\log_7 x = 3 \Leftrightarrow 7^3 = x$$
$$343 = x$$

$$\log_x 543 = 5 \Leftrightarrow x^5 = 543$$
$$x = \sqrt[5]{543}$$
$$x \cong 3.523$$

Para poder resolver una ecuación logarítmica, debemos tener el logaritmo despejado, así podremos aplicar la definición.

EJEMPLOS

1. $\underbrace{2 \cdot \log_5 x}_{\substack{primer \\ término}} - \underbrace{4}_{\substack{segundo \\ término}} = -2$

Debemos despejar el término que tiene la incógnita:

$$2 \cdot \log_5 x = -2 + 4$$
$$2 \cdot \log_5 x = 2$$
$$\log_5 x = 2 : 2$$
$$\log_5 x = 1 \Leftrightarrow 5^1 = x$$
$$5 = x$$

Verificamos:

$$2 \cdot \log_5 5 - 4 = -2$$
$$2 \cdot 1 - 4 = -2$$
$$2 - 4 = -2$$
$$-2 = -2$$

2. $\underbrace{5 \cdot \log x + 2 \cdot \log x - \frac{7}{3} \cdot \log x}_{términos\ semejantes} = 7$

$$\underbrace{\left(5 + 2 - \frac{7}{3}\right) \cdot \log x}_{sacando\ factor\ común} = 7$$

$$\frac{14}{3} \cdot \log x = 7$$

$$\log x = 7 : \frac{14}{3}$$

$$\log x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}} = x$$

$$31{,}6227 \cong x$$

Los invitamos a verificar la solución

¿Qué sucede si los argumentos son distintos?

EJEMPLO

$$log_2(x-3) + log_2(x+4) = 3$$

Analicemos esta ecuación. Tenemos dos términos (sumandos) con logaritmos que tienen la misma base, pero distintos argumentos, y dentro de esos argumentos está la incógnita x. ¿Cómo podemos “juntar” las x?
Podemos agrupar los términos aplicando las propiedades del logaritmo y luego aplicar la definición.

$$log_2[(x-3) \cdot (x+4)] = 3 \Leftrightarrow 2^3 = (x-3) \cdot (x+4)$$

¡Atención! Para resolver la ecuación logarítmica debemos resolver otra ecuación, ya estudiada.
¿Saben qué tipo de ecuación es?

$$2^3 = \underbrace{(x-3) \cdot (x+4)}_{\substack{aplicamos \\ propiedad\ distributiva}}$$

$$2^3 = x^2 - 3 \cdot x + 4 \cdot x - 12$$

$$8 = x^2 + x - 12$$

$$0 = x^2 + x - 12 - 8$$

$$0 = x^2 + x - 20$$

Resolvemos la ecuación cuadrática, aplicando la fórmula resolvente, para poder resolver la ecuación logarítmica.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

Así $x_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$ y $x_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$

¿Pero ambos valores son solución de la ecuación logarítmica?

Recordemos que la incógnita está en el argumento y éste debe ser positivo. Para ello verificamos los valores obtenidos en la ecuación original:

Si $x = 4$ entonces

$$\log_2(4 - 3) + \log_2(4 + 4) =$$

$$\log_2 \underbrace{(1)}_{es\ "+"} + \log_2 \underbrace{(8)}_{es\ "+"} = 0 + 3$$
$$= 3$$

Si $x = -5$ entonces

$$\log_2(-5 - 3) + \log_2(-5 + 4) =$$

$$\underbrace{\log_2(-8) + \log_2(-1)}_{los\ argumentos\ de\ ambos\ logaritmos\ son\ negativos.\ No\ se\ pueden\ calcular\ .}$$

Por lo tanto $x=-5$ *no es solución de la ecuación logarítmica*

Así, la solución de la ecuación logarítmica es $x = 4$