Capítulo 10

La matemática financiera moderna

10.1. Las bases del modelo

Como decíamos en la introducción, se considera a Louis Bachelier como el pionero de la matemática financiera moderna. Fue él quien instaló el uso de modelos matemáticos probabilísticos para representar el precio de las acciones. ¿Qué es un modelo matemático?

Louis Bachelier

Un modelo matemático representa mediante ecuaciones un aspecto de la realidad. **Definición 10.1**

Por ejemplo $A = l^2$ es un modelo que nos permite representar el área de un cuadrado cuyos lados miden l.

$C(n) = C_0(1 + r)^n$ es un modelo mediante el cual representamos el crecimiento de un capital C_0 en n períodos con una tasa de crecimiento por período r. **Ejemplo 10.1**

En estos modelos todo esta determinado y nada queda librado al azar: si un lado del cuadrado mide 2 entonces su área medirá indefectiblemente 4. En cambio, en un modelo probabilístico interviene el azar, por lo cual debemos leer las ecuaciones como probabilidades de que ocurra cada resultado posible.

La tirada de un dado común se puede representar mediante el siguiente modelo probabilístico: **Ejemplo 10.2**

$$X = i \text{ con probabilidad } 1/6 \text{ para } 1 \leq i \leq 6$$

Tipos de dados

Este modelo dice que la variable X toma el valor que se obtiene al arrojar un dado, como sabemos, este puede ser 1, 2, 3, 4, 5, ó 6. También nos dice que cada una de las caras del dado puede aparecer con idéntica probabilidad 1/6. Esto último significa que el dado que modelamos no está cargado (ninguna cara aparecerá con mayor frecuencia que otra).

En adelante, cuando hablemos de probabilidad, lo haremos en el sentido más intuitivo de la palabra.

Ejemplo 10.3 Si extraemos una carta de un mazo de naipes español de 40 cartas la probabilidad de obtener una espada es $p = 10/40 = 1/4$ ya que de las cuarenta cartas que componen el mazo sólo diez son espadas. Asimismo, la probabilidad de obtener un siete es $p = 4/40 = 1/10$ porque hay exactamente 4 sietes en todo el mazo.

Naipe español

Ejemplo 10.4 Si arrojamos una moneda, esta tiene una probabilidad p de salir cara.

Para fijar ideas consideraremos que este número p surge de arrojarla al aire 1.000 veces y tomar

$$p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos cara}}{1.000}$$

Un teorema fundamental de la probabilidad nos dice que el resultado así obtenido debería estar muy cerca del valor teórico de p, por ello acá no haremos diferencia entre dichos valores.

Resulta claro que

$$1 - p = \frac{\text{cantidad de veces que obtuvimos ceca}}{1.000}$$

y puede tomarse como la probabilidad de obtener ceca.

Definición 10.2 Si la probabilidad p de salir cara es igual a la de salir ceca, diremos que la moneda no tiene sesgo. En tal caso $p = 1 - p$ y por lo tanto $p = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 10.5 Deseamos modelar un experimento que consiste en arrojar una moneda y observar su resultado: cara o ceca. Esto podemos hacerlo mediante el uso de una variable X que tomará el valor 1 si la moneda cae cara y 0 si la moneda cae ceca. Supongamos que la moneda tiene una probabilidad p de caer cara.

El modelo nos permite agregar este dato. Para esto diremos que la variable X toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Esta variable X se llama *de Bernoulli* y se suele escribir de la siguiente forma:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Ahora queremos un modelo que nos dé información sobre el resultado de arrojar una moneda 1.000 veces. Podemos pensar entonces que para cada tirada tenemos una variable de Bernoulli X_i que modela la i-ésima tirada, y valdrá 1 con probabilidad p si la moneda sale cara y 0 en caso contrario.

Ejemplo 10.6

Así tendremos que:

$$Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

valdrá exactamente n cuando haya salido n veces cara y $1.000 - n$ veces ceca. Notemos que Y es una variable que toma valores entre 0 y 1.000.

10.2. Luz, cámara,... acción

Este tipo de variables nos servirán para modelar el comportamiento del valor de una acción. Recordemos que una acción representa una fracción del valor de una Sociedad Anónima y otorga diversos derechos a su poseedor, entre ellos, el derecho a participar en el reparto de utilidades.

Las acciones de una Sociedad Anónima pueden cotizar en la Bolsa de Valores. Eso permite que los interesados puedan comprarlas y venderlas. Estamos pensando en una acción de cualquier empresa que cotice en la Bolsa de Comercio. Para nuestro modelo supondremos que en un período T (un día, una hora, un minuto) el valor de la acción puede subir un porcentaje fijo s con probabilidad p o bajar un porcentaje fijo b con probabilidad $1 - p$. Esto lo podemos representar de la siguiente forma: si V_0 es el valor de la acción al comienzo del período y V_1 al final, tendremos:

$$V_1 = \begin{cases} V_0(1+s) & \text{con probabilidad } p \\ V_0(1-b) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Al final del segundo período tendremos:

$$V_2 = \begin{cases} V_0(1+s)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ V_0(1+s)(1-b) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ V_0(1-s)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Estamos haciendo la siguiente hipótesis: la suba o baja del valor de la acción en el primer período no tiene influencia sobre lo que ocurra con éste en el segundo período. Más concretamente, la probabilidad de que suba en el segundo período, si subió en el primero, es la misma que la probabilidad de que suba en el segundo, si bajó en el primero (en ambos casos es igual a p).

De esta hipótesis podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{probabilidad de subir en los dos períodos} &= p \cdot p \\
\text{probabilidad de subir en el primero y bajar en el segundo} &= p(1-p) \\
\text{probabilidad de bajar en el primero y subir en el segundo} &= (1-p)p \\
\text{probabilidad de bajar en los dos períodos} &= (1-p)(1-p)
\end{aligned}$$

Podremos representar el valor al cabo de n períodos usando la variable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde X_i es una variable de Bernoulli. Entonces:

$$V_n = V_0(1 + s)^Y (1 - b)^{n-Y}$$

Observemos qué nos dice esta fórmula para el valor de la acción al cabo de n períodos: hay una probabilidad p_k de que la acción valga $V_0(1 + s)^k(1 - b)^{n-k}$. La probabilidad p_k es justamente la probabilidad de que la variable Y tome el valor k. Es posible calcularla y ver que es igual a $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Ahora, pensemos que el intervalo de tiempo en que transcurre todo es un número fijo T y lo subdividimos en períodos más pequeños, todos de duración T/n. En este caso, el aumento o disminución que puede ocurrir desde un período al siguiente se representará multiplicando por $1 + sT/n$ o $1 - bT/n$.

10.3. Opciones

¿Qué es una *opción de compra* de una acción?

Es un derecho a comprar una acción dentro de un cierto lapso de tiempo, a un determinado precio K.

Las *opciones de compra* forman parte de la categoría de instrumentos financieros conocidos con el nombre de *derivados* ya que su valor no está ligado a algo concreto, como en el caso de la acción que representa una porción de una sociedad. El objetivo de estos instrumentos es moderar el riesgo.

Ejemplo 10.7 Un inversor posee 10.000 acciones del Banco de la Plaza que cotizan a $ 0,85 cada una. No quiere arriesgarse a perder más de $ 1.000 en los próximos dos meses. Entonces por $ 500 compra una opción de vender a $ 0,85 cada acción del Banco dentro de dos meses. Así él se asegura su objetivo, ya que si sus acciones valen menos de $ 0,85 dentro de dos meses, él hará uso de su opción, las venderá a $ 0,85 y habrá perdido sólo lo que pagó por la opción. Por su parte, quien le vende la opción de venta a $ 0,85 asume el riesgo de que la acción baje a menos de $ 0,80, en cuyo caso sufrirá una pérdida. En cambio, si la acción vale más de $ 0,85 habrá ganado lo que cobró por la opción.

Un inversor tendrá que aportar 10.000 acciones de Pampa dentro de dos meses, que actualmente cotizan a $ 1 cada una. Ahora, no tiene los $ 10.000 necesarios para comprarlas y no quiere correr el riesgo de que suban más allá de $ 1,1. Una alternativa que se le presenta es adquirir por un módico precio, alrededor de $ 1.000, la opción de comprar esas acciones dentro de dos meses a $ 1, y así asegurar su negocio contra el riesgo de suba de la cotización. Por otro lado, el que vende la opción toma el riesgo de que la acción suba a cambio de lo que le paga el inversor.

Ejemplo 10.8

Este efecto de acercar dos partes, una que quiere seguridad y otra que asume riesgo, puede verse también con otros *instrumentos derivados* como son los *futuros*: dólar a futuro, soja a futuro, etc.

Un importador planea un negocio y calcula que obtendrá una ganancia razonable si el valor del dólar, que actualmente se encuentra en $ 3,4, no pasa los $ 3,6. El necesitará U$S 10.000 para pagar los productos. Una alternativa es asegurarse comprando con $ 34.000 los dólares que necesita. Lamentablemente, espera recibir ese capital con la venta de la mercadería importada, por lo cual aún no lo posee. Se le presenta la alternativa de comprar los U$S 10.000 a futuro, a una cotización de $ 3,60, pagando una seña. De esta manera, él se asegura el negocio y quien le vende asume el riesgo de que el dólar suba más allá de los $ 3,60, recibiendo como compensación la seña entregada.

Ejemplo 10.9

Algo similar sucede con la compra y venta de soja.

Un agricultor calcula sus costos y observa que si el precio de la soja no baja de $ 500 obtendrá una ganancia conveniente. Para evitar riesgos, decide venderla a $ 500, pero como aún no la tiene lo hace a futuro. Quien le compra toma el riesgo de que el precio baje más allá de $ 500.

Ejemplo 10.10

Las opciones tienen la propiedad de concentrar el riesgo inherente a los cambios bruscos de cotización. Por ejemplo, si invertimos en una acción que vale $ 10 y esta sube $ 1 habremos ganado un 10 %. Por el mismo dinero, $ 10, podríamos haber comprado una opción de compra de 10 acciones a $ 10, hasta dentro de dos meses. En ese lapso, si la acción sube a $ 11 ganaremos $ 10 en lugar de $ 1 como hubiera resultado si comprábamos la acción. Pero el riesgo es mayor y, en caso que no suba, perderemos los $ 10. Esto hace que de un día para otro, mientras el valor de la acción sube o baja entre uno y 5 %, el valor de la opción puede subir o bajar entre 5 y 50 %. Un punto crucial es determinar cuál sería un precio justo para el riesgo que se corre. Eso es lo que resolvieron Merton, Black y Scholes. Para dar una idea de lo que hicieron es necesario desarrollar algunos conceptos matemáticos que permiten tratar problemas de azar y riesgo.

10.4. El juego es un impuesto a quien no sabe matemática

Pensemos en un problema relativamente sencillo: decidimos participar en un juego en el que se arroja un dado que no está cargado (todas sus caras son igualmente probables) y si sale el lado *k* se recibe $ k. ¿Cuánto deberíamos pagar por participar de este juego?

Es claro que si no pagamos nada, no importa qué lado del dado salga, con seguridad ganaremos algo. De la misma forma, si pagásemos $ 7, perderemos algo sin importar como caiga el dado. ¿Y si pagáramos un término medio, por ejemplo $ 3,5? Recordemos que los valores que toma el dado se pueden modelar con una variable X que vale 1, 2, 3, 4, 5, 6 con igual probabilidad $p = \frac{1}{6}$.

Si tiráramos 600 veces el dado ¿cuánto recibiremos? Para resolver esto podemos considerar la variable $Z = \sum_{k=1}^{100} X_k$ donde $X_k = X$ es la variable que modela la tirada k-ésima. Esta variable Z puede tomar valores entre 600 (si sale siempre uno) y 3.600 (si sale siempre seis).

Intuitivamente, el valor más probable de Z será aquel donde cada número ocurre según su probabilidad, es decir en 600 tiradas el uno debería aparecer $600.\frac{1}{6} = 100$ veces al igual que el resto. Si esto ocurriese, el valor que obtendríamos para Z sería 2.100 = 100+200+300+400+500+600. Para que el juego fuese justo deberíamos pagar $ 2.100 por las 600 tiradas, y así lo más probable es que terminaríamos sin ganancia ni pérdida. Como hicimos el cálculo para 600 jugadas, en cada jugada deberíamos pagar $\frac{2.100}{600} = 3{,}5$.

Definición 10.3 El *valor esperado* de una variable X que toma valores $x_k \in \mathbb{R}$ $1 \leq k \leq n$ con probabilidades p_k es el número $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

Ejemplo 10.11 Si X es la variable que modela la tirada de un dado sin sesgo se tiene:

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

Ejemplo 10.12 Un ejemplo cotidiano es el juego de la quiniela. En este juego se extrae un número de cuatro cifras, y antes de que esto ocurra uno puede apostar desde $ 1 a que la última cifra del número será x, o que las dos últimas serán xx, o las tres últimas serán xxx, o finalmente a que el número es $xxxx$. En caso de acertar, se recibe respectivamente, 7; 70; 500 ó 3.500 veces lo apostado. ¿Cuál es el valor esperado de este juego? Consideremos el caso de una cifra: la probabilidad de que acertemos es 1/10 ya que de las diez posibles sólo una nos favorece y la de perder es 9/10. ¿Cuál es nuestra ganancia si apostamos un peso?

$$G_1 = \begin{cases} 7 - 1 & \text{con probabilidad } 1/10 \\ -1 & \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

Ahora podemos calcular el valor esperado de la ganancia.

$$\begin{aligned} EG_1 &= 6 \cdot 1/10 - 1 \cdot 9/10 \\ &= -3/10 \end{aligned}$$

Esto nos dice que se espera que perdamos el 30% de lo apostado. Concretamente, si tenemos $ 100 y jugamos durante cien sorteos distintos, no debería sorprendernos que terminemos con algo cercano a los $ 70.

Los otros casos son similares, mostraremos el de cuatro cifras para ver que es menos conveniente aún. En este caso tenemos:

$$G_4 = \begin{cases} 3.500 - 1 \quad \text{con probabilidad } 1/10.000 \\ -1 \quad \text{con probabilidad } 9.999/10.000 \end{cases}$$

Y el valor esperado nos queda:

$$\begin{aligned} EG_4 &= 3.499 \cdot 1/10.000 - 1 \cdot 9.999/10.000 \\ &= -6.500/10.000 \end{aligned}$$

Es decir que lo más probable es que perdamos el 65% de lo apostado.

Podemos preguntarnos ¿cuál sería el valor justo c de la apuesta a una cifra? Para esto calculamos:

$$G_1 = \begin{cases} 7 - c \quad \text{con probabilidad } 1/10 \\ -c \quad \text{con probabilidad } 9/10 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} EG_1 &= (7 - c) \cdot 1/10 - c \cdot 9/10 \\ &= 7/10 - c \end{aligned}$$

Si esta cantidad fuera mayor que cero, el juego sería favorable a nosotros en el sentido que a lo largo de muchos juegos sería muy probable que terminásemos con una ganancia. Asimismo, si fuese negativo lo más probable sería terminar con pérdida. Si $EG_1 = 0$ sería igualmente probable terminar con pérdida o ganancia. Esto es lo que consideramos justo.

En este caso, el juego sería justo si pagásemos sólo 70 centavos por apuesta.

10.5. Riesgo calculado

Nos planteamos el siguiente problema: queremos modelar el precio c que hay que pagar por una opción de comprar a \$ 10 dentro de un período una acción que vale ahora \$ 10 pero que al cabo de un período, cuando debamos ejercer nuestra opción, puede valer el doble \$ 20 o la mitad \$ 5. Cada una de estas posibilidades ocurre con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente. Como vimos en la primera parte, podemos representar el valor de la acción al fin de un período como:

$$V_1 = \begin{cases} 20 \quad \text{con probabilidad } p \\ 5 \quad \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

En tal caso, si compramos una acción hoy y la vendemos al finalizar el período el valor actual de la ganancia o pérdida queda representada por:

$$G_a = \begin{cases} 20(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } p \\ 5(1+r)^{-1} - 10 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

Notemos que como los \$ 10 son pagados al comienzo del período y el precio que se recibe por la venta de la acción se recibe al final, si queremos calcular el valor actual, al inicio del período, del resultado de la operación debemos tomar el valor presente de la venta. Para esto usamos una tasa de descuento r por el período.

Ahora podemos calcular cuánto se esperaría ganar con la compra de una acción al comienzo de un período y su venta al final.

$$\begin{aligned} EG_a &= (20(1+r)^{-1} - 10) \cdot p + (5(1+r)^{-1} - 10) \cdot (1-p) \\ &= (20p + 5(1-p))(1+r)^{-1} - 10 \\ &= (15p+5)(1+r)^{-1} - 10 \end{aligned}$$

Veamos ahora cómo se representa el resultado que podemos obtener con la compra de la opción: si la acción sube ejercemos nuestro derecho de comprarla a \$ 10 y la vendemos por \$ 20, así obtenemos una ganancia de \$ 10 a los que hay que descontar los \$ c que pagamos por la opción. Recordemos que como los \$ 10 de ganancia son al final del período y los \$ c los pagamos al comienzo al hacer el cálculo debemos utilizar la tasa de descuento r y obtenemos $10(1+r)^{-1}-c$. Si la acción baja, no nos conviene comprarla a \$ 10, y simplemente perdemos lo que pagamos por la opción. Así, tenemos la siguiente variable que modela el resultado de la compra de la opción:

$$G_o = \begin{cases} 10(1+r)^{-1} - c & \text{con probabilidad } p \\ -c & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

El valor esperado de esta variable es:

$$\begin{aligned} EG_o &= (10(1+r)^{-1} - c) \cdot p - c \cdot (1-p) \\ &= 10p(1+r)^{-1} - c \end{aligned}$$

Así, tenemos representados los valores esperados de los resultados G_a y G_o, de comprar respectivamente una acción y una opción. Estos han quedado en términos de p, la probabilidad de que la acción suba o baje. ¿Hay alguna forma de determinar p ? Si uno supiera de antemano p, sería como jugar a los dados con un dado cargado ya que si p es tal que hace positivo el valor esperado de G_a nos conviene comprar la acción y si es negativo nos conviene venderla[1].

[1] Aunque suene raro, podemos vender acciones que no poseemos

Paradójicamente, esto permite determinar p: supondremos que p es el valor que hace que uno no pueda sacar ventajas de la suba o baja de la acción, es decir, el valor de p hace que sea cero el valor esperado de la ganancia por comprar o vender la acción. En el ejemplo de los dados, la hipótesis de que el dado no está cargado dice que ninguna cara tiene más probabilidad que otra, y esto hace que sus caras tengan igual probabilidad $p_i = 1/6$ para $1 \leq i \leq 6$.

En nuestro ejemplo el valor de p resulta de la ecuación:

$$0 = G_a = (15p + 5)(1 + r)^{-1} - 10$$

De aquí obtenemos:

$$p = \frac{10(1+r) - 5}{15} = \frac{5 + 10r}{15}$$

Entonces, en general se supondrá que mediante la compraventa de acciones no hay *arbitraje*, esto es, una forma de obtener una ganancia segura. Un resultado conocido como *teorema del arbitraje*, nos asegura que si no hay arbitraje existen probabilidades que hacen cero el valor esperado de la ganancia. Conociendo esas probabilidades, podremos calcular el correspondiente valor esperado del resultado de comprar la opción. Finalmente, un valor justo para la opción será aquel que anule al valor esperado de la ganancia G_o. En nuestro ejemplo tendremos:

$$0 = G_o = 10p(1+r)^{-1} - c = 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} - c$$

Finalmente resulta que:

$$\begin{aligned} c &= 10\frac{5+10r}{15}(1+r)^{-1} \\ &= \frac{10+20r}{3(1+r)} \end{aligned}$$

Pudimos calcular un valor justo para la opción suponiendo que las probabilidades involucradas hacen que no haya arbitraje en la compraventa de acciones.

El siguiente objetivo será dar un precio justo al derecho de compra de una acción dentro de n períodos a un precio determinado.

10.6. El modelo para n períodos

Consideremos el valor, $V(i)$, de una acción a lo largo de n períodos. Supondremos que en cada período la acción puede subir un porcentaje fijo s o bajar un porcentaje fijo b. En principio, no sabemos con qué probabilidades sube o baja en cada período. También supondremos que la tasa de descuento para actualizar el valor de V es r en cada período. Tenemos la siguiente representación para $V(n)$:

$$V(n) = V(0)(1 + s)^{Y}(1 - b)^{n-Y}$$

En este caso Y es una variable que representa el número de subas que hubo en los n períodos. En general, no sabemos cómo son las probabilidades que gobiernan a Y, pero a partir de la hipótesis de que no hay arbitraje, puede verse que lo que ocurra en cada período será independiente de lo ocurrido en los anteriores. Más aún, la probabilidad de que la acción suba o baje es independiente del período que se considere. Así se llega a que Y deberá ser de la forma estudiada anteriormente:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

donde cada X_i es una variable de Bernoulli que vale 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1-p$. Podemos calcular p haciendo cero el valor esperado de la ganancia de comprar la acción y venderla al finalizar el primer período:

$$G_1 = \begin{cases} V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } p \\ V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

De aquí obtenemos el valor esperado de G_1:

$$\begin{aligned} EG_1 &= (V(0)(1+s)(1+r)^{-1} - V(0))p + (V(0)(1-b)(1+r)^{-1} - V(0))(1-p) \\ &= V(0)(1+s)(1+r)^{-1}p + V(0)(1-b)(1+r)^{-1}(1-p) - V(0) \\ &= V(0)((1+s)p + (1-b)(1-p))(1+r)^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Igualamos a 0 el valor esperado de la ganancia, simplificamos $V(0)$ y tenemos:

$$0 = \frac{EG_1}{V_0} = \frac{(1+s)p + (1-b)(1-p)}{1+r} - 1$$

Finalmente, despejamos p:

$$p = \frac{1+r-(1-b)}{1+s-(1-b)} = \frac{r+b}{s+b}$$

El siguiente paso es calcular con esta probabilidad el valor esperado del resultado de la compra de una opción. Supongamos que la opción nos cuesta \$ c y nos da derecho a comprar la acción por \$ K, dentro de n períodos. Tendremos para la ganancia G_o

$$G_o = \begin{cases} (V(n) - K)(1+r)^{-n} - c & \text{si } V(n) > K \\ -c & \text{si } V(n) \leq K \end{cases}$$

Por último, calculamos el valor esperado de la ganancia. Como el costo de la opción hay que pagarlo de cualquier forma, podemos calcular primero el valor esperado de la ganancia sin contar el costo $\$c$ y luego restarle c. Para esto multiplicamos a cada valor positivo que pueda tomar $(V(n) - K)(1+r)^{-n}$ por la probabilidad de que tome ese valor, luego sumamos todos esos términos. Al resultado sin actualizar lo llamaremos $E(V(n) - K)^+$. Así llegamos a:

$$EG_o = E(V(n) - K)^+(1+r)^{-n} - c$$

Igualando a cero EG_o obtenemos

$$c = E(V(n) - K)^+ (1 + r)^{-n}$$

Esta expresión es muy concisa pero puede ser difícil de calcular. Para esto se usan diversos métodos entre los cuales se destaca el de *programación dinámica*.

Ejemplo 10.13

Consideremos lo que sucede con una acción que vale \$ 10, y en cada período su valor puede aumentar en un 50% o disminuir un tercio (33,33 %). Calculemos el valor de la opción de comprarla dentro de dos períodos a \$ 10.

Como vimos en la sección 2, el valor de la acción al cabo de dos períodos lo representamos por:

$$V_2 = \begin{cases} 10(1+1/2)^2 & \text{con probabilidad } p^2 \\ 10(1+1/2)(1-1/3) & \text{con probabilidad } 2p(1-p) \\ 10(1-1/3)^2 & \text{con probabilidad } (1-p)^2 \end{cases}$$

Hemos visto también que:

$$p = \frac{r+b}{s+b} = \frac{r+1/3}{1/2+1/3} = \frac{6r+2}{5}$$

Con esta probabilidad debemos calcular $E(V_2 - 10)^+ (1 + r)^{-2}$ Ahora bien, $V_2 - 10$ puede tomar un único valor positivo $10(1 + 1/2)^2 - 10$ y lo hace con probabilidad $p^2 = (6r + 2)^2/25$, entonces tenemos:

$$E(V_2 - 10)^+ = 10(1{,}5^2 - 1)(6r + 2)^2/25 = 18r^2 + 12r + 2$$

y finalmente:

$$c = E(V_2 - 10)^+(1+r)^{-2} = \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Según esta fórmula si $r = 0$ la opción debería costar \$ 2. Si la tasa de descuento fuera del 1% tendríamos $c = 2{,}08$.

Ejemplo 10.14

En el ejemplo anterior, ¿cómo cambia el precio de c si queremos una opción de compra a \$ 11? En tal caso no hay cambio en las probabilidades que usamos y sigue habiendo un único valor positivo de $V_2 - K = 10(1{,}5^2) - 11$.

Si vemos a K como 10 + 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(V_2 - 11)^+ &= (10(1{,}5)^2 - 10 - 1)(6r + 2)^2/25 \\ &= E(V_2 - 10)^+ - (6r + 2)^2/25 \\ &= (6r + 2)^2/2 - (6r + 2)^2/25 \\ &= 23(6r + 2)^2/50 \end{aligned}$$

Así llegamos a que:

$$c = E(V_2 - 11)^+(1+r)^{-2} = \frac{46}{50} \cdot \frac{18r^2 + 12r + 2}{r^2 + 2r + 1}$$

Es decir que el valor de la opción se reduce en un 8 %. Por ejemplo, si $r = 0$ entonces $c = 1{,}84$ y si $r = 0{,}01$, $c = 1{,}91$.

10.7. Ejercicios

Ejercicio 10.1 Si arrojamos dos dados sin sesgo, ¿cuál es la probabilidad de que sumen siete? ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea par?

Ejercicio 10.2 Damos vuelta una carta de un mazo francés de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una figura (J, Q ó K)?

Ejercicio 10.3 Si en la quiniela jugamos un peso al 48 durante 100 jugadas a dos cifras: ¿Alrededor de cuánto deberíamos perder? ¿Y si en lugar del 48 jugásemos al 348?

Ejercicio 10.4 ¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 70 pesos por acertar dos cifras?

Ejercicio 10.5 ¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la quiniela que paga 500 pesos por acertar tres cifras?

Ejercicio 10.6 En la ruleta se puede apostar a un número del 0 al 36. Si sale se reciben 36 veces lo apostado, y en caso contrario se pierde la apuesta. También se puede apostar a rojo o negro hay 18 números rojos, 18 negros y uno verde. Si sale el color elegido se reciben 18 veces lo apostado (o 36 si apostamos al verde). Si alguien juega en la ruleta un peso al 13 durante 100 tiradas ¿Cuál es el valor esperado de la pérdida? ¿Y si en lugar de un número jugásemos al rojo?

Ejercicio 10.7 ¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a la ruleta que paga 36 pesos por acertar el número?

Ejercicio 10.8 ¿Cuál sería el valor justo de una apuesta a rojo o negro en una ruleta que paga 18 pesos por acertar el color?

Ejercicio 10.9 ¿Cuál es el valor después de dos períodos de una acción que vale $ 10 y en cada período puede subir un 10% o bajar un 10 %, ambas posibilidades con probabilidad 1/2?

Ejercicio 10.10

Si el 2 de enero de 2009 compramos por $ 2 una opción de comprar el 20 de febrero a $ 20 una acción de la compañía Telecast. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el 20 de febrero la acción vale $ 16, $ 20 ó $ 23?

Ejercicio 10.11

Compramos por $ 1,20 una opción de comprar dentro de dos meses a $ 15 una acción del Banco de la Plaza. ¿Cuál será la ganancia o pérdida si el día de vencimiento de la opción la acción vale $ 13, $ 16 ó $ 20?

Ejercicio 10.12

En una situación como la del ejemplo 10.13 calcular el valor de la opción de compra a $ 9, es decir, cuando $K = 9$. Ayuda: Encuentre una fórmula para $E(V_2 - 9)^+$ en términos de $E(V_2 - 10)^+$.

Capítulo 11

El número *e* y la función exponencial

11.1. Introducción

En el Capítulo 3 El Interés, vimos que existen dos formas de aplicar interés: el simple y el compuesto. Un capital sometido a interés simple crece *linealmente*, esto es, aumenta de manera directamente proporcional al tiempo en que fue depositado. Así por ejemplo, un capital de $ 100 depositado a un 2% de interés mensual, aumenta en $ 2 en cualquier intervalo de un mes. Por lo tanto los montos en meses sucesivos serán: $ 100, $ 102, $ 104, $ 106, $ 108, ...

En el caso del interés compuesto, la tasa de interés indica cómo crece porcentualmente el capital en un determinado lapso. Así, si un capital de $ 100 es depositado al 2% mensual, significa que cada mes aumentará un 2% con respecto a su valor. Por lo tanto, los montos sucesivos serán $ 100,00; $ 102,00; $ 104,04; $ 106,12; $ 108,24; . . . . Este tipo de crecimiento se denomina *exponencial.* Las funciones cuyo crecimiento porcentual es constante se llaman **funciones exponenciales**.

Las funciones exponenciales están íntimamente relacionadas con la constante e, que es un número irracional *trascendente* cuyas primeras cifras decimales son 2,718281828. . . . . Esta constante aparece en múltiples áreas y ramas de la ciencia, pero fue el matemático Jacob Bernoulli [1654-1705] quien lo descubrió, justamente estudiando la aplicación del interés compuesto.

11.2. El número *e*

11.2.1. Los logaritmos

La primera referencia histórica al número *e* es en una publicación de John Napier (1550-1617), matemático, físico y astrónomo reconocido científicamente como el descubridor de los *logaritmos*. Si bien se sabe que los logaritmos ya habían sido usados en tiempos más remotos, fue Napier quien por primera vez publicó, en un apéndice de su obra, una tabla de logaritmos.

John Napier

La palabra *logaritmo*, nombre dado por Napier a estos números, proviene del griego: $\lambda o\gamma o\sigma$ (razón o cociente), $\alpha\rho\iota\theta\mu o\sigma$ (número), y significan números que indican una razón, proporción o relación. La razón de esta denominación era que la serie de números dados por los logaritmos constituían una progresión aritmética que a su vez se correspondía con otra en progresión geométrica, y la diferencia entre dos logaritmos indicaba la relación entre los correspondientes números en la progresión geométrica.

Ejemplo 11.1

La siguiente tabla muestra un fragmento de dos series: una en progresión aritmética y otra en progresión geométrica.

Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	17	
Geométrica	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...	131.072	...

Los números de la primera fila (Aritmética) son los *logaritmos en base* 2 de los números de la segunda fila (Geométrica), que como puede verse son potencias del número 2. La notación utilizada es $\log_2(x) = y$ que indica que $2^y = x$. Así se tiene que $\log_2(16) = 4$, pues $2^4 = 16$.

La particularidad de estas tablas es que si se calcula la diferencia entre dos logaritmos, por ejemplo:

$$5 - 2 = 3$$

la razón o cociente entre los correspondientes números es 2^3. En efecto,

$$\frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

A su vez, si se suman dos números de la primera fila, por ejemplo $2 + 7 = 9$, el producto de los correspondientes números de la segunda fila es 2^9. En efecto, $4 \cdot 128 = 512$. Estas propiedades se resumen en las siguientes fórmulas:

$$\log_2(y) - \log_2(x) = \log_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \log_2(y) + \log_2(x) = \log_2(y \cdot x)$$

y son ciertas para los logaritmos en cualquier otra base.

Pero la gran importancia de los logaritmos fue poder utilizarlos en forma inversa, y por ello tuvo tanta relevancia el aporte de Napier. Con la tabla de logaritmos las multiplicaciones se podrían resolver mediante sumas, y las divisiones mediante restas.

Por ejemplo, multiplicar dos números de la segunda fila de la tabla puede involucrar muchos cálculos:

$$256 \cdot 512 = \ldots$$

Pero sumar sus correspondientes logaritmos es una cuenta muy sencilla: $8 + 9 = 17$. Este simple cálculo, teniendo el tabulado el número 17 permite obtener fácilmente el resultado:

$$256 \cdot 512 = 2^{17} = 131.072$$

El descubrimiento de los logaritmos fue de gran importancia para los científicos de la época, principalmente para los astrónomos que debían hacer cálculos con números muy grandes y que no contaban con calculadoras ni computadoras.

La tabla de logaritmos publicada por Napier utilizaba la base 10, probablemente porque el sistema decimal era el más difundido. Pero además, Napier estudió las propiedades de los logaritmos y si bien no menciona en su obra al número e, sí aparece implícitamente en sus logaritmos. Quien realmente descubrió esta constante fue el matemático Jacob Bernoulli, calculando aproximaciones de la fórmula

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

precisamente estudiando el interés compuesto.

11.2.2. El interés compuesto

Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli estudió una situación como la siguiente. Supongamos que un banco ofrece un interés del 100% anual. Si se depositan \$ 100, al año la suma habrá aumentado en \$ 100:

$$100 \cdot (1 + 1{,}0) = 100 \cdot 2$$

Ahora, si la capitalización se realiza semestralmente, al año el capital será de:

$$100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{2}\right)^2 = 100 \cdot 2{,}25$$

Y si se hace cada cuatro meses, dos meses o mensualmente, el monto al año será, respectivamente:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{3}\right)^3 &= 100 \cdot 2{,}3704 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{6}\right)^6 &= 100 \cdot 2{,}5216 \\ 100 \cdot \left(1+\frac{1{,}0}{12}\right)^{12} &= 100 \cdot 2{,}6130 \end{aligned}$$

Bernoulli notó que la sucesión de números 2,25; 2,3704; 2,5216; 2,6130; . . . ; obtenida a partir de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$ iba aumentando, pero a su vez se aproximaba a un límite que no superaba. Si la capitalización era semanal (n = 52) o diaria (n = 360), los números obtenidos diferían en un poco más de dos centésimos: 2,692596954 y 2,714516025. Para valores de n más grandes la diferencia entre dos números consecutivos era del orden de los milésimos, luego diezmilésimos, y así siguiendo.

Así, la sucesión no se estabiliza en ningún valor, pero se aproxima o *converge* a un número. Las primeras cifras de este número son 2,71182818 . . . . Sus cifras decimales no son periódicas, por lo que no se trata de un número racional sino de un número irracional. Por esta razón, y por ser un número que aparece naturalmente en muchas situaciones, debe denotarse con una letra.

Los matemáticos Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens fueron los primeros en asignarles una letra, y eligieron la letra *b*. Leonhard Euler fue quien comenzó a utilizar la constante ***e***, en 1727. Se desconoce por qué se eligió tal letra: podría ser porque es la primera letra de la palabra *exponencial*, ya que este número aparece ligado a las funciones exponenciales, o porque es la segunda vocal y Euler ya había utilizado la letra *a* para designar otra constante; o tal vez por ser la inicial de *Euler*.

Leonhard Euler

11.2.3. Otras fórmulas para el número *e*

La constante *e* aparece en múltiples situaciones y contextos de la matemática, y gracias a ello hay diferentes expresiones que permiten aproximar el número *e*. Algunas de ellas son las siguientes sucesiones de números:

Límite de una sucesión infinita de fracciones:

$$2+\frac{2}{2+3}=2{,}4; \quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{4}}=2{,}82; \quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+6}}}=2{,}69; \quad 2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+\frac{5}{6+7}}}}=2{,}72$$

$$\boxed{e=2+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\frac{4}{5+\frac{5}{6+\frac{6}{7+\frac{7}{8+\cdots}}}}}}}$$

Como suma infinita de fracciones:

$$1+\frac{1}{1!}=2; \qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2{,}5; \qquad 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2{,}67$$

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.}$$

Como producto infinito de números:

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}=2{,}83; \quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}=2{,}67; \quad 2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}=2{,}59;\ldots$$

$$\boxed{e=2\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots}$$

A partir de estas fórmulas, y muchas otras que aquí no se mencionan, es posible obtener con precisión los primeros decimales del número *e*. Existen varios trabajos de investigación a lo largo de los años en los que se ha intentado calcular el mayor número posible de dígitos. El primer ejemplo, y evidentemente con cálculos hechos a mano, es de Leonhard Euler en 1748 quien calculó 18^8 dígitos. Hasta ahora, el mayor número de decimales calculado, y por computadora, ha sido 100.000.000.000, por Shigeru Kondo y Steve Paglia [2007].

11.3. La función exponencial

Si q es un número real positivo y n es un número natural, entonces q^n denota la potencia n-ésima del número q, es decir:

$$q^n = \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{n \text{ veces}}.$$

El número q es la *base* de la potencia y n es el *exponente*. Así, para n natural la potencia es una abreviatura de la multiplicación iterada de un número por sí mismo.

Ahora bien, también puede definirse la potencia para exponentes no naturales, pero ya no puede interpretarse como una multiplicación repetida. Es decir, no tiene sentido decir que $3^{1/2}$ es multiplicar al 3 la mitad de veces. La definición que se utiliza para la potenciación con exponente negativo y fraccionario es la siguiente: Si m y n son naturales, entonces

$$q^{-n} = \frac{1}{q^n}, \qquad q^{1/n} = \sqrt[n]{q}, \qquad \text{y} \qquad q^{m/n} = \sqrt[n]{q^m} = (\sqrt[n]{q})^m$$

Así por ejemplo, $2^3 = 8$, $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$ y $27^{4/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 81$. De esta manera, queda definida la potencia para exponentes enteros y racionales, distintos de cero. Para exponente nulo se conviene $q^0 = 1$.

La potenciación cumple las siguientes propiedades. Si a, b son números racionales, entonces

$$q^{a+b} = q^a \cdot q^b, \qquad q^{a-b} = \frac{q^a}{q^b}, \qquad (q^a)^b = q^{a \cdot b}$$

Así por ejemplo, $3^6 = 3^2 \cdot 3^4$, $(2^3)^5 = 2^{15}$.

Pero también existen números reales que no son racionales. Por ejemplo, el número e, π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, son ejemplos de números *irracionales*; y en realidad existen infinitos de estos números. Dado que cualquier número irracional puede aproximarse por una sucesión de números racionales, entonces la potencia de un número real con exponente irracional se define como el número al cual se aproximan las correspondientes potencias con exponentes racionales en la sucesión.

Ejemplo 11.2

El número π es un número irracional cuyas primeras cifras son $\pi = 3{,}141592\ldots$. En particular, la sucesión de números racionales:

$b_1 = 3{,}1 \quad b_2 = 3{,}15, \quad b_3 = 3{,}141, \quad b_4 = 3{,}1415, \quad b_5 = 3{,}14159, \quad b_6 = 3{,}141592, \ldots$

se aproxima cada vez más a π, y así la potencia 4^π se puede calcular como el número al cual se aproximan las potencias 2^{b_n}, para $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$4^{3{,}1} = 73{,}5166, \quad 4^{3{,}14} = 77{,}7084, \quad 4^{3{,}141} = 77{,}8162, \quad 4^{3{,}1415} = 77{,}8702 \ldots$

por lo puede verse que 4^π es un número próximo a 77,90. Cuantos más decimales se utilicen en la aproximación a π, mejor será la aproximación a 4^π.

Esta es la definición formal de potencia con exponente irracional.

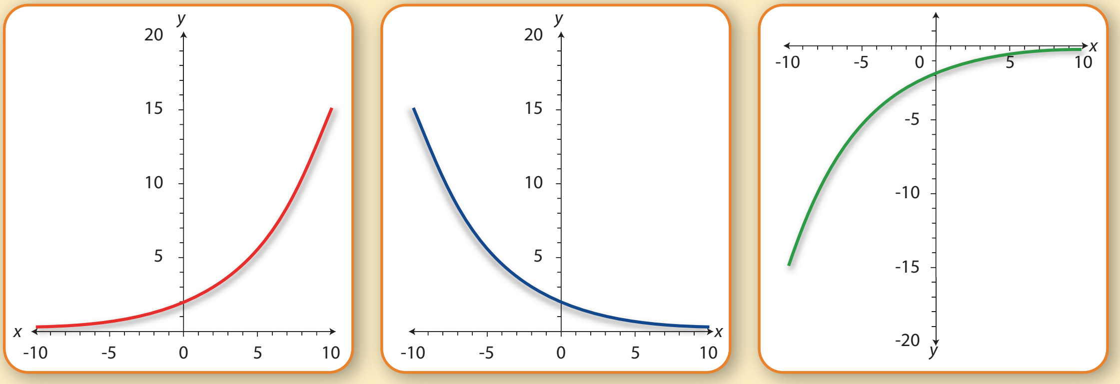
Una función exponencial es una función de la forma:

$$f(x) = a \cdot q^{rx} \qquad\qquad a \text{ real,}$$

con a, r y q reales, $q > 0$.

En la Figura 11.1, los dos primeros gráficos corresponden a las funciones $f_1(x) = 2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$ y $f_2(x) = 2 \cdot 1{,}5^{-0{,}5\,x}$, mientras que el tercer gráfico corresponde a $f_3(x) = -2 \cdot 1{,}5^{0{,}5\,x}$. El signo de a determina si la función es positiva o negativa. Si $a > 0$, el gráfico queda por encima del eje x, y si $a < 0$ queda por debajo.

Si r es positivo, entonces la función se aleja del eje x a medida que x crece, y se acerca a él a medida que x decrece. Por otro lado, r está relacionado con la velocidad de crecimiento de la función.



Gráficos de funciones exponenciales

Figura 11.1

Ejemplo 11.3 Consideremos la función $f(x) = 2^{0{,}5\,x}$. Entonces:

$$f(x+1) = 2^{0{,}5\,(x+1)} = 2^{0{,}5\,x} \quad 2^{0{,}5} = 2^{0{,}5\,x} \cdot 1{,}41$$

Significa que, independientemente del valor de x, la función crece un 41% por cada unidad en x. Este 41% proviene de $2^{0{,}5} - 1$

Para cualquier función exponencial de la forma $f(x) = a \cdot q^{rx}$, se tiene que la función crece (o decrece si $a < 0$) en un $(q^r - 1)$ 100% por cada unidad en x.

11.3.1 La función $f(x) = e^x$

De todas las funciones exponenciales, hay una sola que cumple con las siguientes propiedades:

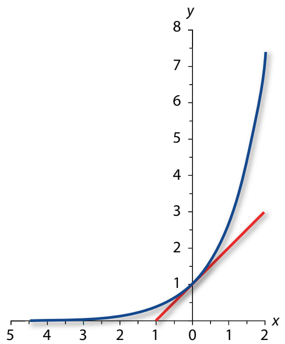
- $f(0) = 1$: es decir, pasa por el punto $(0, 1)$;
- la recta tangente al gráfico de la función por el punto $(0, 1)$ tiene pendiente 1.

Para cumplir la primera condición debe ser que $a = 1$, y para que además se cumpla la segunda debe ser $q = e$ y $r = 1$. Esto es

$$f(x) = e^x$$

donde e es el número que hemos definido como el valor límite de la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$. (Ver Figura 11.2).

Este es otro ejemplo en el cual el número e aparece naturalmente en la matemática, en este caso en el contexto del análisis matemático.



La función $f(x) = e^x$

Figura 11.2

11.3.2. Logaritmos y el logaritmo natural

El logaritmo es la función inversa a la potenciación. Ya se ha visto en el Ejemplo 11.1 la definición del logaritmo en base 2 como la inversa de la potenciación en base 2: $2^{\log_2(y)} = y$. De manera análoga se puede definir el logaritmo en cualquier base $b > 0$.

Definición 11.1

Dado un número positivo b, el logaritmo en base b del número y es el número x tal que $b^x = y$, y se escribe $\log_b(y) = x$. Esto es,

$$\log_b(y) = x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^x = y$$

Si se tienen dos bases distintas, a y b por ejemplo, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\log_a(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_a(b)}$$

Dado que $\log_a(b)$ es un número fijo, se tiene que $\log_a(y)$ y $\log_b(y)$ son proporcionales entre sí, por lo cual conociendo los valores del logaritmo para una base en particular, se pueden determinar los valores de cualquier otro logaritmo en otra base.

Cabe agregar que el logaritmo con base e se suele denominar también *logaritmo natural*, y se utiliza la notación $\log_e(x) = \ln(x)$. En particular se tiene que, para cualquier base $b > 0$,

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \qquad \text{y} \qquad b^x = e^{x\ln(b)}$$

Estas relaciones permiten calcular cualquier exponencial o logaritmo en términos de la función exponencial e^x y del logaritmo natural.

En la siguiente sección veremos el concepto de capitalización continua, que relaciona la función exponencial con el interés compuesto.

11.4. Capitalización continua

Si un capital C se deposita al 100% de interés anual, y se capitaliza cada fracción $\frac{1}{n}$ del año, al cabo de un año el capital habrá ascendido a

$$C \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A medida que n se hace más grande, puede pensarse que la capitalización se realiza en cada instante de tiempo, y este proceso se denomina *capitalización continua*.

En particular, si la tasa de interés anual es del 100%y la capitalización es continua, entonces el capital ascenderá en un año a $C \cdot e$, por lo que la tasa de interés efectiva anual será $e - 1$.

Si la T.N.A. es r, con capitalización cada n-ésima fracción del año, entonces un capital C se incrementará en un año hasta

$$C \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Esta expresión también está relacionada con el número e. En efecto, utilizando las propiedades de la potenciación, la fórmula entre paréntesis puede transformarse operando algebraicamente de la siguiente manera:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

Puesto que r es un número positivo fijo, se tiene que si n toma valores cada vez más grandes entonces lo mismo ocurre con n/r. Esto implica, aunque la demostración formal no es inmediata, que la expresión $\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}$ se aproxima al número e. Así se puede ver que:

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{n/r}\right)^r$$

se aproxima al número e^r. Volviendo a la situación de un capital C sometido a una T.N.A. r con capitalización continua, lo anteriormente expuesto muestra que al cabo de un año el capital habrá aumentado a $C \cdot e^r$.

Dada una tasa de interés nominal anual r con capitalización continua, la tasa de interés efectiva anual correspondiente es $e^r - 1$.

Puesto que la T.E.A. es $i = e^r - 1$, esto indica que la capitalización de C por un período de t años está dado por

$$C \cdot (1 + i)^t = C \cdot (1 + (e^r - 1))^t = C \cdot e^{rt}$$

Un capital C sometido a una tasa de interés r con capitalización continua crece exponencialmente en el tiempo de acuerdo a la fórmula

$$C(t) = C \cdot e^{rt}$$

11.5. Ejercicios

Ejercicio 11.1

Determinar cuál es la función $f(x)$ que crece un 25% cuando x aumenta en una unidad, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0,5).

Ejercicio 11.2

Determinar cuál es la función $f(x)$ que decrece un 20% cuando x aumenta en dos unidades, y cuyo gráfico pasa por el punto (0, 3).

Ejercicio 11.3

Si se efectúa un depósito en un banco que ofrece una tasa de interés del 5,9% anual con capitalización continua, ¿cuál debe ser el monto a depositar para que el capital ascienda a $ 12.000 en 5 años?

Ejercicio 11.4

Una persona invierte $ 3.000 en un banco, a un interés del 6,3% con capitalización diaria. ¿Cuánto dinero tendrá en un año? ¿Cuánto tendría si la capitalización fuera continua?

Apéndice A

La planilla de cálculo

La planilla u hoja de cálculo es una herramienta muy útil que permite organizar nuestros datos y hacer las cuentas que sean necesarias para resolver los problemas que se nos presenten. Fueron unos de los primeros programas desarrollados para computadoras y existen muchas versiones, tanto comerciales como gratuitas. Entre las primeras hay una muy popular para los usuarios del sistema operativo más difundido. Incluso existe una versión de esta para fanáticos de la Manzana, quienes también pueden trabajar con Números. Entre las de distribución gratuita podemos mencionar a una desarrollada por los creadores del buscador más usado y que está disponible para todos aquellos que tengan acceso a la red de redes. Los usuarios del software libre pueden trabajar con la Oficina Abierta sin pagar. [1]

En este apéndice daremos los elementos básicos para utilizar una hoja de cálculo y ejemplificaremos con la determinación de una cuota de un préstamo hipotecario, el diseño de una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$ y el cálculo de la tasa interna de retorno de una inversión. Las instrucciones usadas valen para las planillas de cálculo más difundidas.

Una planilla de cálculo tiene la apariencia de un tablero para jugar a la batalla naval, esto es, una cuadrícula donde cada columna esta indicada por una letra y cada fila por un número y cada casilla se representa por la columna y fila a la que pertenece. Así, la casilla superior izquierda es la A1, la que le sigue a la derecha es la B1 y abajo de esta última está la B2, (ver Fig. A.1)

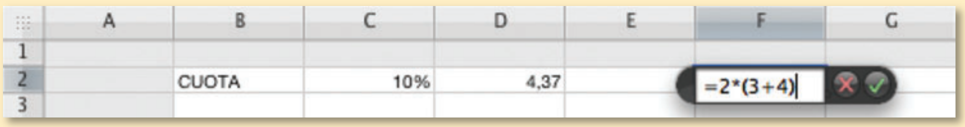


Figura A.1

Planilla de Cálculo de 3x7

Cada casilla puede contener un dato, que puede ser un texto, un número o una fórmula. En la figura A.1, vemos que la casilla B2 contiene el texto CUOTA, la C2 el número 0,1 que aparece como 10% y D2 el número 4,37. El ingreso de datos se realiza, posicionando el cursor sobre la casilla donde queremos ubicar nuestro dato, pulsando el botón (izquierdo) del ratón y luego escribiendo el texto o el número que deseamos. En el caso de una fórmula, por ejemplo $2(3 + 4)$, escribiremos $= 2 * (3 + 4)$ (ver Fig. A.1). En este caso la casilla guardará el resultado, es decir, 14.

[1] Aclaración: el párrafo anterior suena un tanto extraño debido a restricciones legales, por las que se omitió citar marcas.

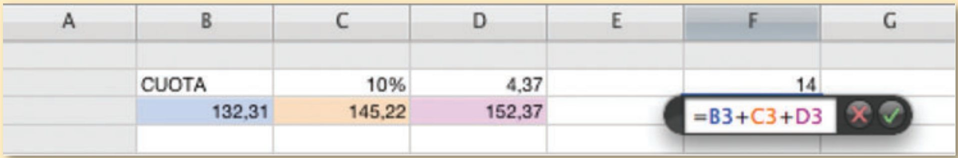
Las fórmulas pueden referir a datos que se encuentran en otras casillas.

Ejemplo A.1

Supongamos que las casillas B3, C3 y D3 contienen los intereses obtenidos en enero, febrero y marzo. Deseamos calcular el total de intereses en el trimestre y guardarlo en la casilla F3. Para esto seleccionamos la casilla F3 y escribimos $= B3+C3+D3$. Al apretar la tecla ENTER, el resultado quedará registrado en F3 (ver Fig.A.2).

Figura A.2

Ingreso de Fórmula



Las fórmulas pueden hacer uso de una gran cantidad de funciones que el programa nos proporciona.

Ejemplo A.2

Supongamos que las casillas B2, B3, ..., B13 contienen los intereses obtenidos desde enero hasta diciembre. Deseamos calcular el total de intereses en el año y guardarlo en la casilla C13. Para esto seleccionamos la casilla C13 y escribimos $= SUMA(B2 : B13)$. Al apretar la tecla ENTER, el resultado quedará registrado en C13.

En este ejemplo hemos usado la función SUMA(x; y; z; . . .) que nos da la suma $x + y + z + \ldots$. También hicimos uso de la notación B2 : B13 que permite referir a las 12 casillas B2; B3; . . . ; B13 de una manera abreviada.

Una alternativa cuando se desea ingresar una fórmula que hace uso de una función es seleccionar la celda donde deseamos ubicar el resultado y buscar **Insertar** en el menú del programa. Hacemos click en él y seleccionamos **Función** dentro de las posibilidades que se nos despliegan. Esto hace abrir la ventana que se ve en la Figura A.3. Esta consta de dos subventanas, en la de la izquierda aparecen las categorías en que se han clasificado las funciones disponibles: Usadas recientemente; Todas; Financieras; Fecha y hora; Matemáticas y trigonométricas; Estadísticas, etc.

Seleccionando cualquiera de estas, por ejemplo en la Figura A.3 se ha seleccionado Financieras, se nos presentan en la subventana derecha las funciones correspondientes a la categoría listadas alfabéticamente:

AMORT; DB; DDB; EUROCONVERT, etc

Al seleccionar una función en la subventana derecha, nos aparecen en la parte inferior de la ventana, los argumentos que utiliza la función y una breve descripción de la misma. Por ejemplo en la Figura A.3 se seleccionó AMORT y debajo de las subventanas aparece:

AMORT(tasa; nper; va; vf; tipo)

Calcula el pago de un préstamo basado en pagos y tasa de interés constante.

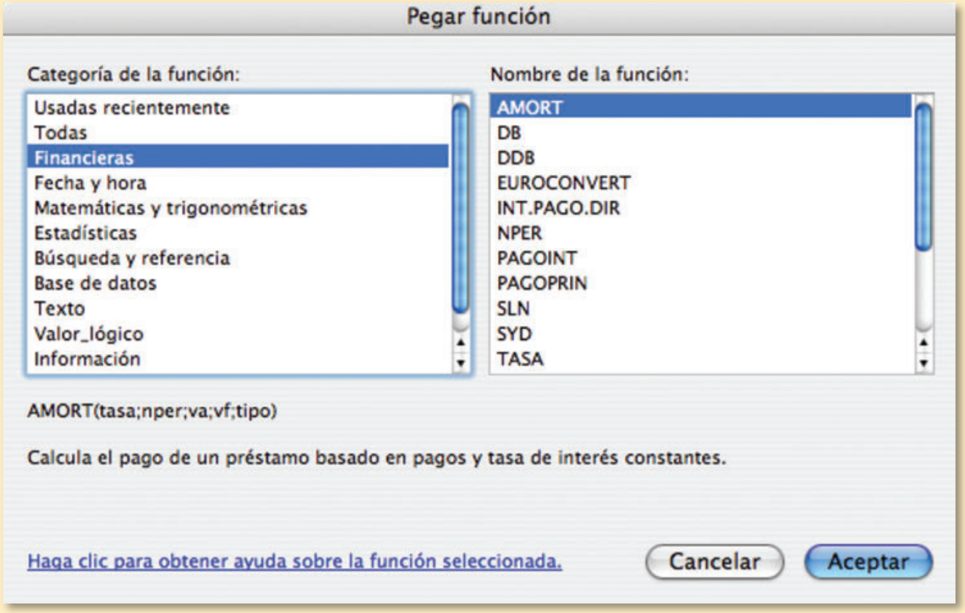


Figura A.3

Funciones financieras

A.0.1. Cálculo del valor de la cuota de un préstamo

Ejemplo A.3

Deseamos saber la cuota que corresponde pagar por un crédito mediante el sistema francés. Supongamos que se reciben \$ 100.000 al 12% anual a pagar en 120 cuotas mensuales. Guardamos estos datos en las casillas B2, B3 y B4 respectivamente. Sabemos que la cuota vendrá dada por $c = 100.000(0,01/(1 - 1,01^{-120}))$.

Entonces podemos obtener su valor de la siguiente forma: ubicamos el cursor sobre la casilla B5, hacemos click con el botón del ratón (el izquierdo si es que tiene más de un botón) y escribimos:

$$= B2 * (B3/12)(1 - (1 + B3/12) \wedge (-B4))$$

Al apretar la tecla ENTER aparecerá el valor de la cuota, 1434,71 en la casilla B5.

También podemos obtener el resultado utilizando la función AMORT(tasa; nper; va; vf; tipo). Esta función nos da el valor de una cuota de un préstamo de un monto **va**, que al cabo de **nper** cuotas deja un saldo **vf**. La tasa durante cada período del crédito es **tasa** y el **tipo** es 0 ó 1 según las cuotas sea pagadas a su vencimiento o anticipadamente. En nuestro caso

$$\text{tasa} = B3/12, \qquad \text{nper} = B4, \qquad \text{va} = B2, \qquad \text{vf} = 0, \qquad \text{tipo} = 0$$

Entonces si escribimos en la casilla B5:

$$= AMORT(B3/12;B4;B2)$$

al apretar ENTER quedará registrado en B5 el resultado -1434,71, que es el valor de la cuota con un signo menos ya que se considera que es un egreso. Notemos que no pusimos los dos últimos argumentos, los cuales no son necesarios cuando son nulos como en este caso.

Ejemplo A.4 Deseamos hacer una lista de los montos que se obtienen al depositar una suma de $ 1000 a una tasa del 1% mensual al cabo de n períodos, donde n puede variar entre 1 y 24.

El valor de n *l*o podemos ubicar en la columna A. Es usual dejar la primera fila vacía, por si se necesita rotular algunas columnas. Por ello escribimos los números del 1 al 24 a partir de la celda A2 hasta la A25. Una forma práctica de hacer esto es la siguiente:

Seleccionamos con el cursor la casilla A2, escribimos 1 y apretamos ENTER. A continuación seleccionamos la celda A3, escribimos 2 y apretamos ENTER. Ahora seleccionamos A2 y apretando la tecla SHIFT (⇑ Mayúsculas) hacemos click en A3. Esto selecciona ambas celdas. Finalmente ubicamos el cursor en el borde inferior derecho de la celda A3 y cuando este cambia de forma (se vuelve una cruz de trazo fino) apretamos el botón del ratón y lo mantenemos apretado mientras lo deslizamos hacia abajo hasta la casilla A25, donde podemos soltarlo. Al hacer esto veremos que las celdas A4 hasta A25 se van rellenando con los números consecutivos del 3 al 24.

Una vez hecho esto, hacemos doble click en B2 para ingresar la fórmula y escribimos:

$$= 1000 * (1,01) \wedge \mathrm{A2}$$

A continuación, podemos usar nuevamente el autorrelleno para completar el resto de la lista. Seleccionamos la casilla B2 y ubicamos el cursor en el borde inferior izquierdo de B2, cuando cambia su forma a una cruz de trazo fino apretamos el botón del ratón y lo mantenemos así mientras lo deslizamos verticalmente hasta la celda B25. Cada casilla B irá mostrando el valor $1000(1,01)^{Ai}$.

Vemos en los ejemplos que cada celda puede tener dos niveles: uno visible en todo momento que corresponde al valor asentado o el resultado de una fórmula. Otro es la fórmula propiamente dicha que produce el resultado a la vista. Para poder acceder a este segundo nivel es necesario hacer un doble click en la correspondiente celda. En el ejemplo anterior en la casilla B3 vemos el valor 1020,1, pero si seleccionamos la casilla y hacemos doble click, veremos la fórmula $= 1000 * (1,01) \wedge \mathrm{A3}$ mediante la cual se calcula el valor de B3.

A.1. Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

Deseamos realizar una tabla de valores de $A_{\overline{n}|r} = (1 - (1 + r)^{-n})/r$. Supongamos que queremos que la tabla contenga los valores de n desde 1 a 30 y de r desde 0,5% a 1,5%, variando en incrementos de 0,125%.

En la columna **A** escribiremos los números del 1 al 30, comenzando con el 1 en A2 y siguiendo con el 2 en A3, etc. Ya sabemos como hacer esto de manera práctica:

Seleccionamos con el cursor la casilla A2, escribimos 1 y apretamos ENTER. Luego seleccionamos la celda A3, escribimos 2 y apretamos ENTER. A continuación seleccionamos A2 y A3 simultáneamente. Finalmente ubicamos el cursor en el borde inferior derecho de la celda A3 y cuando este se vuelve una cruz de trazo fino, apretamos el botón del ratón y lo deslizamos hacia abajo hasta la casilla A31.Así tendremos las celdas A4 hasta A31 con los números consecutivos del 3 al 30.

Esta propiedad de autorelleno funciona para cualquier progresión aritmética, ya sea de manera vertical como en este caso o también horizontalmente.

En el caso de r usaremos la primera fila para escribir los valores deseados a partir de B1. Para esto escribimos en B1 0,5% y en C1 0,625%. Luego seleccionamos ambas casillas simultáneamente, haciendo click en la primera y luego SHIFT click en la segunda. Llevamos ahora el cursor al borde inferior derecho de C1 apretamos el botón (izquierdo) del ratón, lo deslizamos horizontalmente hasta J1 y soltamos el botón. Aparecerán entonces los valores de r en incrementos de 0,125%.

El siguiente paso es escribir la fórmula correspondiente en cada casilla.

Seleccionamos B2 y escribimos:

$$= (1 - (1 + B1) \wedge (-A2))/B1$$

y apretamos ENTER.

Esto produce el valor deseado en B2 pero no nos sirve para autorrellenar ya que si intentamos rellenar verticalmente, ambos índices se irán incrementando por ejemplo en B3 aparecerá $= (1 - (1 + B2) \wedge (-A3))/B2$, en lugar de $= (1-(1+B1) \wedge (-A3))/B1$ que es lo que necesitamos. Para remediar esto se escribe \$B\$1 en lugar de B1. Esto hace que sólo se mueva el índice de Ai.

Entonces comenzamos nuevamente, seleccionamos B2 y escribimos:

$$= (1 - (1 + \$B\$1) \wedge (-A2))/\$B\$1$$

y apretamos ENTER.

Ahora seleccionamos B2 vamos a su borde inferior derecho y manteniendo apretado el botón del ratón lo deslizamos verticalmente hasta la celda B31. Así en B3 quedará registrada la fórmula $= (1 - (1+\$B\$1) \wedge (-A4))/\$B\$1$ y en la celda B31 quedará la fórmula $= (1 - (1+\$B\$1) \wedge (-A31))/\$B\$1$.

A continuación en cada celda Bi hacemos los retoques necesarios para que quede la fórmula:

$$= (1 - (1 + B1) \wedge (-\$A\$i))/B1$$

Finalmente usamos repetidas veces el autorrelleno horizontal, esto es, seleccionamos el borde inferior derecho de Bi y manteniendo apretado el botón izquierdo del ratón, lo deslizamos horizontalmente hasta la celda Ji. Obtenemos así la tabla deseada. En la Figura A.4. puede verse la tabla realizada donde cada valor calculado está escrito con una precisión de seis decimales.

Figura A.4

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	0,50%	0,63%	0,75%	0,88%	1%	1,13%	1,25%	1,38%	1,50%
1	0,995025	0,993789	0,992556	0,991326	0,990099	0,988875	0,987654	0,986436	0,985222
2	1,985099	1,981405	1,977723	1,974053	1,970395	1,966749	1,963115	1,959493	1,955883
3	2,970248	2,962887	2,955556	2,948256	2,940985	2,933745	2,926534	2,919352	2,912200
4	3,950496	3,938273	3,926110	3,914008	3,901966	3,889982	3,878058	3,866192	3,854385
5	4,925866	4,907600	4,889440	4,871384	4,853431	4,835582	4,817835	4,800190	4,782645
6	5,896384	5,870907	5,845598	5,820455	5,795476	5,770662	5,746010	5,721519	5,697187
7	6,862074	6,828231	6,794638	6,761293	6,728195	6,695339	6,662726	6,630351	6,598214
8	7,822959	7,779608	7,736613	7,693971	7,651678	7,609730	7,568124	7,526857	7,485925
9	8,779064	8,725076	8,671576	8,618559	8,566018	8,513948	8,462345	8,411203	8,360517
10	9,730412	9,664672	9,599580	9,535126	9,471305	9,408107	9,345526	9,283554	9,222185
11	10,677027	10,598432	10,520675	10,443743	10,367628	10,292318	10,217803	10,144073	10,071118
12	11,618932	11,526392	11,434913	11,344479	11,255077	11,166693	11,079312	10,992921	10,907505
13	12,556151	12,448588	12,342345	12,237402	12,133740	12,031340	11,930185	11,830255	11,731532
14	13,488708	13,365057	13,243022	13,122579	13,003703	12,886369	12,770553	12,656231	12,543382
15	14,416625	14,275833	14,136995	14,000079	13,865053	13,731885	13,600546	13,471005	13,343233
16	15,339925	15,180952	15,024313	14,869967	14,717874	14,567995	14,420292	14,274728	14,131264
17	16,258632	16,080449	15,905025	15,732309	15,562251	15,394804	15,229918	15,067549	14,907649
18	17,172768	16,974359	16,779181	16,587171	16,398269	16,212414	16,029549	15,849617	15,672561
19	18,082356	17,862717	17,646830	17,434618	17,226008	17,020928	16,819308	16,621077	16,426168
20	18,987419	18,745558	18,508020	18,274714	18,045553	17,820448	17,599316	17,382073	17,168639
21	19,887979	19,622914	19,362799	19,107524	18,856983	18,611074	18,369695	18,132748	17,900137
22	20,784059	20,494822	20,211215	19,933109	19,660379	19,392904	19,130563	18,873241	18,620824
23	21,675681	21,361314	21,053315	20,751533	20,455821	20,166036	19,882037	19,603690	19,330861
24	22,562866	22,222423	21,889146	21,562858	21,243387	20,930567	20,624235	20,324232	20,030405
25	23,445638	23,078185	22,718755	22,367145	22,023156	21,686593	21,357269	21,035001	20,719611
26	24,324018	23,928631	23,542189	23,164456	22,795204	22,434208	22,081253	21,736129	21,398632
27	25,198028	24,773795	24,359493	23,954852	23,559608	23,173506	22,796299	22,427747	22,067617
28	26,067689	25,613709	25,170713	24,738391	24,316443	23,904579	23,502518	23,109985	22,726717
29	26,933024	26,448406	25,975893	25,515133	25,065785	24,627520	24,200018	23,782969	23,376076
30	27,794054	27,277919	26,775080	26,285138	25,807708	25,342418	24,888906	24,446825	24,015838

A.2. Tasa interna de retorno

En esta sección calcularemos la tasa interna de retorno de la inversión en un título público.

Supongamos que se emite un bono a diez años que se amortizará en ocho cuotas anuales a partir del tercer año. Además tiene veinte cupones de renta semestral a una tasa del 4%. Queremos hacer una tabla con los valores de la tasa interna de retorno correspondiente a la compra de estos bonos por un valor nominal de $10.000 a una paridad del 90% al 105% con incrementos de 1%.

Ubicaremos en la primera fila la paridad y en la segunda la tasa interna de retorno correspondiente. Para esto escribimos PARIDAD en A1 y TIR en A2. En B1 escribimos 90% y en C1 91%, Usando el autorrelleno para progresiones aritméticas ingresamos las paridades restantes desde D1 hasta Q1. En A3 escribimos el valor nominal de la inversión con signo menos, esto es, -10000.

Para resolver el problema supondremos primero que en la columna B tenemos guardado el valor de los veinte cupones de renta que paga el bono (B5:B24) y en la columna C están guardados los cupones de amortización (C5:C24), donde estos valores serán cero en los períodos que no se paga amortización. En la columna D podemos sumar los valores de B y C, de tal forma que el flujo de cobros sea (D5:D24). Para esto escribimos en D5 la fórmula =B5+C5 y usamos el autorrelleno vertical hasta la celda D24. En la fila 4 escribiremos a partir de la columna D, el monto de la inversión correspondiente a cada paridad. Para esto seleccionamos D4 y escribimos

$$= \$A\$3 * B1$$

luego usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda S4.

Como el flujo de pagos no depende de la paridad, será siempre el mismo que el de las celdas (D5:D24). Lo copiaremos a las columnas correspondientes a las distintas paridades. En E5 escribimos =D5 y usamos el autorrelleno vertical. Ahora seleccionamos la columna E desde la celda E5 hasta la E24, ubicamos el cursor en el borde inferior izquierdo de E24 y cuando cambia a la cruz de trazo fino lo arrastramos horizontalmente hasta la celda S24. Allí lo soltamos y hemos copiado el flujo de cobros.

Finalmente podemos completar la fila correspondiente a la tasa interna de retorno. Escribimos en la celda B2:

$$= \mathrm{TIR}(D4 : D24)$$

y usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda Q2. Si el programa que estamos usando no reconoce la función TIR, puede deberse a que es una versión en inglés. En tal caso debe usarse la versión inglesa IRR, escribiendo $= \mathrm{IRR}(D4 : D24)$.

Con esto hemos terminado el cálculo de la TIR en caso de tener los valores de los cupones de renta y amortización. Veamos ahora como obtener estos.

En la columna C escribiremos los cupones de amortización a partir de C5. Podemos escribir 0 desde C5 a C9 e ingresamos $= -\$A\$3 * 12{,}5/100$ en C10. Esto corresponde al primer cupón de amortización de 12,5% del valor nominal del bono. Seleccionamos a la vez las celdas C9 y C10 y copiamos su contenido (usando el menú o CTRL-c, por ejemplo). Seleccionamos simultáneamente las celdas C11 a C24 y pegamos lo que teníamos copiado. Tenemos así los cupones de amortización.

Para los de renta escribimos en B5 $= -0,04 * A3$ y en B6:

$$= 0,04 * (-\$A\$3 - SUMA(\$C\$5 : C5))$$

Notemos esto calcula el 4% del valor residual de los bonos. Luego seleccionamos la celda B6 y usamos el autorrelleno vertical hasta B24 para completar la tabla de cupones de renta. Ahora se comprende mejor la fórmula utilizada en B6. La suma va calculando el total de lo recibido en amortizaciones hasta cada nuevo período. La primera C esta entre signos $ ya que corresponde al primer período que queda fijo. La segunda C se va actualizando al avanzar las celdas.

En la Figura A.5 mostramos las columnas A hasta la F de la planilla obtenida.

Figura A.5

Tabla con los valores de TIR

PARIDAD	90%	91%	92%	93%	94%
TIR	5%	5%	5%	5%	5%
-10000					
			-9000	-9100	-9200
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	0	400	400	400
	400	1250	1650	1650	1650
	350	0	350	350	350
	350	1250	1600	1600	1600
	300	0	300	300	300
	300	1250	1550	1550	1550
	250	0	250	250	250
	250	1250	1500	1500	1500
	200	0	200	200	200
	200	1250	1450	1450	1450
	150	0	150	150	150
	150	1250	1400	1400	1400
	100	0	100	100	100
	100	1250	1350	1350	1350
	50	0	50	50	50
	50	1250	1300	1300	1300

A.3. Ejercicios

Ejercicio A.1 **¿Cómo se suman diez números ubicados en las casillas B2, C2,. . . , K2?**

Ejercicio A.2 **Realizar una tabla de valores de $A^{-1}_{\overline{n}|r}$, para $r = 0,005 + j\,0{,}00125$, con $0 \leq j \leq 10$ y $1 \leq n \leq 30$.**

Ejercicio A.3 **Se decide invertir en un bono a 8 años, de $10.000 de valor nominal, que paga un cupón semestral de interés a una tasa del 7% anual y se amortiza en un sólo pago final. Realizar una tabla con los valores de la tasa interna de retorno de la inversión para cada valor de compra del bono entre $ 9.000 y $ 10.500 con intervalos de $ 100.**

Apéndice B

La calculadora financiera

Las calculadoras permiten hacer cuentas. Las hay desde muy elementales que sólo realizan las operaciones básicas, hasta las más sofisticadas que pueden graficar funciones. Entre ambos extremos las más usadas son las llamadas científicas que no sólo permiten hacer sumas, multiplicaciones y divisiones sino que también pueden evaluar logaritmos, exponenciales y funciones trigonométricas como seno y coseno.

La llamada calculadora financiera permite hacer todas las operaciones de una científica y le agrega facilidades para el cálculo de estadísticos como el promedio o la varianza y para obtener los valores de una cuota de un préstamo con sistema francés o el valor actual de un flujo de caja.

El costo de una calculadora financiera suele triplicar o cuadruplicar el de una científica y su uso es mucho más específico, lo cual hace que no esté tan extendido. Más aún su manejo no es tan intuitivo como el de una calculadora científica lo cual dificulta su uso. Esto se debe en gran parte a que las funciones con que trata son de varias variables y requieren el ingreso de varios argumentos antes de proceder a su cálculo.

En este apéndice mostraremos en algunos ejemplos el uso de una de las calculadoras financieras más usadas. Casi omitiremos mencionar la marca, pero se trata del modelo FC 100V. Esta calculadora cuenta con varias teclas especiales. Una de ellas es la tecla redonda que posee cuatro triángulos apuntando al sur, norte, este y oeste. A esta tecla la llamaremos navegador, ya que ella nos permite cambiar de línea en el visor hacia arriba o hacia abajo y mover el cursor dentro de una línea para editarla. Notaremos con ▽ o △ cuando se oprima el navegador para bajar o subir una línea respectivamente.

En los ejemplos supondremos que no nos equivocamos. Si en la realidad esto ocurriera, muchas veces uno puede corregir el error usando la tecla DEL para borrar el carácter mal ingresado. Hay que prestar atención al hecho que en la notación norteamericana el punto es nuestra coma decimal, así si ingresamos 10.000; la calculadora lo interpreta como diez y no diez mil. Del mismo modo cuando nos da como resultado 10.350 significa 10 con 350 milésimos. En los ejemplos escribiremos esto último como 10,350.

Otra dificultad con la cual nos podemos encontrar es que un cálculo no sea correcto debido a que está usando valores que nosotros no ingresamos sino que ya estaban en la memoria. Esto se debe a que la calculadora tiene distintos espacios de memoria para registrar los valores de diversas variables. Al encenderla estas variables poseen el último valor asignado a ellas o si nunca fueron usadas, el valor asignado por defecto. Se puede borrar el contenido de las variables, encendiendo y apretando las teclas SHIFT y 9 simultáneamente. Con el cursor se va a la línea [Vars:EXE] y se aprieta EXE AC. Esto deja las variables con su valor por defecto

Ejemplo B.1

Como primera práctica queremos calcular el valor actual del flujo de caja (−10.000; −2.000; 2.000; 3.000; 4.000; 5.000) con una tasa de descuento del 6% anual. Suponemos que los pagos y cobros se realizan en períodos de un año.

Para resolver esto con la calculadora primero la encendemos con la tecla ON en la parte superior derecha, y a continuación ingresamos en el modo **Flujo de Caja** (Cash Flow) presionando la tecla CASH. Esto hace aparecer en el visor lo que se ve en la Figura B.1. Notamos que la segunda línea está ensombrecida y en la Figura B.1 se ve marcada en negro. Esto quiere decir que es la línea activa, lo que hagamos en este momento afectará su contenido. Este se refiere al valor de la tasa de interés. En nuestro caso ingresaremos la tasa de descuento del 6 %, para esto apretamos 6 y luego EXE. Con esto veremos que la segunda linea de la pantalla cambio a [I %=6]. Hemos usado los corchetes para delimitar la línea, estos no aparecen en el visor. El siguiente paso es ingresar el flujo, para ello nos fijamos que la línea ensombrecida diga [CSH=D. editor x] y apretamos la tecla EXE. Esto nos hace aparecer el Editor de Datos con una columna donde se ingresarán uno a uno los datos del flujo de caja. Comenzamos con el primero que por ser negativo requiere el uso de la tecla (-) para ingresarlo. Ojo, no confundir esta tecla (-) con la - de la resta. Así escribimos (-)10.000 y apretamos la tecla EXE. Repetimos esto con los siguientes períodos:

Figura B.1

Modo Flujo de Caja

(-)2.000 EXE   2.000 EXE   3.000 EXE   4.000 EXE   5.000 EXE

Una vez ingresados los datos del flujo salimos del editor con la tecla ESC. Esto nos devuelve a la pantalla del modo Flujo de caja. para obtener el resultado nos ubicamos sobre la línea [NPV:Solve] y apretamos la tecla SOLVE. Así obtenemos el resultado -683,276204. Esto quiere decir que el valor actual (Net Present Value) es negativo y por lo tanto la inversión no es redituable.

Resumimos lo realizado en la siguiente secuencia:

ON CASH 6 EXE ▽ EXE (-)10.000 EXE (-)2.000 EXE 2.000 EXE 3.000 EXE 4.000 EXE 5.000 EXE ESC ▽▽ SOLVE

El modo flujo de caja nos permite también calcular la tasa interna de retorno de un flujo.

Ejemplo B.2

Deseamos saber la tasa interna de retorno que resulta de invertir $ 9.000 en un bono de tipo bullet (es decir que se amortiza en un único pago al final) a 8 años que tiene un valor nominal de $10.000 y paga anualmente un interés del 6 %.

Este bono genera el flujo (-9.000, 600,600, 600,600, 600,600, 600,10.600), para calcular la TIR, procedemos como en el ejemplo anterior: apretamos la tecla CASH para entrar al modo flujo caja, no hace falta ingresar una tasa de interés así que vamos directamente al editor de datos [CSH=D. editor x] y apretamos EXE. A continuación ingresamos el flujo: (-)9.000 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 10.600 EXE

Salimos del editor con ESC y manejamos el cursor hasta ubicar la línea [IRR:Solve] (IRR viene de Internal Rate of Return). Una vez allí apretamos la tecla SOLVE esperamos unos 10 segundos obtenemos el resultado: 7,721821067, así obtenemos que la tasa interna de retorno de la inversión es aproximadamente 7,21% anual. Al volver al modo flujo de caja con la tecla CASH notaremos que la segunda línea a cambiado a [I %=7,721821067] esto es porque la calculadora tiene una memoria dedicada exclusivamente a la variable I% y le ha asignado el valor obtenido para la TIR. En síntesis la sucesión empleada ha sido la siguiente:

ON CASH ▽ EXE (-)9.000 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 600 EXE 10.600 EXE ESC ▽▽▽ SOLVE

Ejemplo B.3

Queremos calcular la cuota mensual de un préstamo de $ 200.000 a 20 años de plazo con una tasa de interés del 12% anual.

Para resolver esto se ingresa en el modo **Interés Compuesto** presionando la tecla CMPD (del inglés CoMPounD interest= interés compuesto). En el visor aparecerán las variables principales de este modo.

La primera línea que debemos editar es [Set:end], la dejamos con el valor *end* ya que indica que los pagos se hacen al vencer el período. En caso de necesitar cambiarla a su otro valor *begin* se aprieta EXE y luego 1. Con el navegador pasamos a la siguiente línea que determina el número de períodos **n**. Como el plazo es 20 años ingresamos 240 EXE. Continuamos con la variable **I%** que guarda el interés anual del préstamo escribimos 12 EXE. Luego le toca el turno a la variable **PV** que es el monto del préstamo (viene del inglés Principal Value), en nuestro caso ingresamos 200.000 EXE. La siguiente variable es **PMT** que es el valor de la cuota (del inglés PayMenT=pago), como este es el valor que se quiere calcular, se oprime ▽ y consideramos la siguiente variable **FV** que es el valor al finalizar los pagos (del inglés Future Value). En nuestro caso se requiere que al cumplir con las 240 cuotas no quede deuda, por lo tanto escribimos 0 EXE. Quedan sólo dos variables: **P/Y** que guarda el número de pagos al año y **C/Y** que contiene el número de veces que el interés se compone al año. Escribimos 12 EXE en ambas.

Una vez fijados los valores de las variables con los datos del problema volvemos con el navegador a la línea con la variable **PMT** y apretamos la tecla **SOLVE**. Aparecerá entonces el valor de la cuota (con un sino menos ya que es un egreso): [**PMT**=-2.202,172267]

Como resumen se escribe a continuación la secuencia de teclas ingresadas:

CMPD ▽ 240 EXE 12 EXE 200.000 EXE ▽ 0 EXE 12 EXE 12 EXE △△△ SOLVE

Ejemplo B.4

Se desea saber la tasa máxima que puede tener un préstamo de $ 200.000 a 20 años si requerimos que la cuota mensual sea de $ 2.000.

Para obtener la solución, ingresamos al modo CMPD y nos dirigimos con el navegador a la línea [PMT=-2.202,172267] (el valor de la cuota quedó guardado desde el ejemplo anterior) allí escribimos (-)2.000 que es el nuevo valor de la cuota. Se tuvo en cuenta que es negativo por ser un egreso y por lo tanto se usó la tecla (-). A continuación volvemos a la línea de la variable tasa [I %=12] y apretamos la tecla SOLVE, en un instante aparece 10,52411087 en el lugar que ocupaba el 12. Es decir la tasa máxima es de un 10,52% anual.

La sucesión de teclas usadas para obtener el resultado, luego de encender la calculadora fue:

CMPD ▽▽▽▽ (-)2000 EXE △△ SOLVE

Ejemplo B.5

Se ha tomado un préstamo de $ 100.000 a 20 años a una tasa del 10,5241% anual por el que se pagan cuotas de $ 1.000. Deseamos calcular el valor que resta pagar del préstamo después de haber pagado la sexagésima cuota.

Para esto conviene usar el modo **Amortización** al cual se ingresa mediante la tecla AMRT. Una vez en este modo ingresamos los siguientes datos: Set:end PM1=1 PM2=60 n=0 I %=10.5241 PV=100000 PMT=(-)1000 V=0 P/Y=12 C/Y=12. A continuación nos ubicamos sobre la línea [BAL=Solve] apretamos la tecla SOLVE y obtendremos BAL=90.342,80723. Esto nos dice que al pagar la cuota 60 nos restan pagar $ 90.342,80723 del capital recibido. Si nos resulta un tanto extraño que después de cinco años, aún debamos el 90% del capital, podemos hacer la siguiente prueba: ver que ocurre si cambiamos la cuota 60 por la 120, 180 o 240. Para ello volvemos a entrar en el modo Amortización y nos dirigimos con el navegador a la línea [PM2=60] e ingresamos 120 EXE. Luego bajamos hasta [BAL:Solve] y apretamos SOLVE. Repetimos estos pasos con 180 y 240 y obtendremos respectivamente: [BAL=74.035,48905], [BAL=46.498,64349] y [BAL=-0,594199902]. Esto nos muestra que a los 10 años aún debemos 74% del préstamo, a los 15 años el 46% y al pagar la última cuota hemos pagado 60 centavos de más.

A continuación va un resumen de las teclas empleadas después que se enciende la calculadora:

AMRT EXE 2 ▽ 1 EXE 60 EXE 0 EXE 10.5241 EXE 100000 EXE (-)1000 EXE 0 EXE 12 EXE 12 EXE SOLVE AMRT▽▽120 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE AMRT ▽▽ 180 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE AMRT ▽▽ 240 EXE ▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE

El modo amortización permite calcular cuál es la parte de interés y cuál es la de amortización que se abona en la cuota **PM1**, como así también cuánto se pagó de interés y cuánto de amortización entre la cuota **PM1** y la **PM2**.

Ejemplo B.6

Bajo las hipótesis del ejemplo anterior deseamos saber cuánto se paga de interés y cuanto de amortización en la sexagésima cuota y cuanto se lleva pagado de interés desde el comienzo del préstamo hasta la misma.

Para lo primero sólo tenemos que cambiar el valor de PM1 a 60 y luego ir a la línea [INT:Solve] y apretar SOLVE. Así obtenemos INT=-794,1195368, esto es, en la cuota 60 se pagan $ 794,12 de interés. Apretamos nuevamente AMRT y 12 veces ▽ hasta llegar a la línea [PRN:Solve] apretamos SOLVE y obtenemos PRN=-205,8804632, el valor del capital amortizado en la cuota 60. Naturalmente la suma de ambos valores obtenidos debe dar el valor de la cuota $1000. Para contestar las últimas dos preguntas debemos cambiar primero PM1 a 1 y PM2 a 60 luego bajamos 10 líneas hasta [∑INT:Solve], apretamos SOLVE y nos aparece: ∑INT=-50.342,80723. Esto nos dice que hemos pagado $ 50.342,81 de intereses. Finalmente volvemos al modo AMRT bajamos 14 líneas hasta [∑PR:Solve] y apretando SOLVE obtenemos ∑PR=-9.657,192773. Notemos que esta cantidad más la calculada en el ejemplo anterior nos da el monto del préstamo con signo menos: -9.657,19277 -90.342,80723 =-100.000. Esto es así porque sumamos lo ya amortizado más lo que resta pagar.

El siguiente es el resumen de teclas apretadas:

AMRT ▽60 EXE ▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽1 EXE 60 EXE ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE
AMRT ▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽▽ SOLVE

B.1. Ejercicios

Escribir la sucesión de teclas que deben usarse para calcular la cuota mensual de un préstamo de $ 100.000 a 10 años de plazo con una tasa de interés del 11% anual. | **Ejercicio B.1**

Apéndice C
Tablas

En esta sección se presentan seis tablas de valores que son de utilidad en la resolución de los ejercicios planteados.

La primera contiene los valores de $A_{\overline{n}|r}$ para r = 0,005 + j0,0025, con $0 \leq j \leq 6$ y $1 \leq n \leq 36$ aproximados con 8 decimales. Recordemos la definición:

$$A_{\overline{n}|r} = \frac{(1-(1+r)^{-n})}{r}$$

esto nos da el valor actual de una anualidad de \$ 1.

Ejemplo C.1

Si deseamos saber el valor presente de una sucesión de 24 pagos de un peso con una tasa de descuento por período del 1 %, buscamos en la fila 24 de la tercera columna $A_{\overline{24}|0,01}$ = 21, 243387.

La segunda tabla contiene los valores inversos de $A_{\overline{n}|r}$ para r = 0, 005 + j0, 00125, con $0 \leq j \leq 8$ y $1 \leq n \leq 36$. Estos valores nos dan la cuota de un préstamo de un peso a una tasa r, a devolver en n períodos.

Ejemplo C.2

Para calcular la cuota de un préstamo \$10.000 al 18% anual en 36 cuotas iguales, multiplicamos 10.000 por el coeficiente de la última fila y la última columna.

$$c = 10.000 A^{-1}_{\overline{36}|18/1200} = 10.000 \times 0,036152 = 361,52$$

En la tercera tabla tenemos los coeficientes $((1+r)^n - 1)/r$, para valores de r = 0,005 + j0,0025, con $0 \leq j \leq 6$ y $1 \leq n \leq 36$. Representan lo que recibiremos si depositamos un peso por período a tasa r durante n períodos.

Ejemplo C.3

Si ahorramos \$ 10 por mes a una tasa del 1% mensual, al cabo de un año tendremos el valor de la fila 12 y tercera columna, multiplicado por 10.

Esto es:

$$C = 10\frac{((1+0,01)^{12} - 1)}{0,01} = 10 \times 12,68250301 \sim 126,83$$

La cuarta tabla contiene los valores $\frac{r}{((1+r)^n - 1)}$ que son inversos de los de la anterior.

Estos coeficientes representan cuánto se debe depositar por período para obtener un peso al cabo de n periodos si la tasa de interés es r.

Ejemplo C.4 Para ahorrar $ 1.000 al cabo de dos años a una tasa del 0,75% mensual, buscamos el coeficiente de la fila 24 y segunda columna.

Calculamos:

$$D = 1.000\frac{0,0075}{((1+0{,}0075)^{24}-1)} = 1.000 \times 0,03818474 = 38,18474$$

Quiere decir que debemos ahorrar cada mes $ 38,18.

Las tablas 5 y 6 contienen los valores de $(1 + r)^n$ y $(1 + r)^{-n}$ respectivamente, y son de mucho uso en el cálculo de interés compuesto y valor presente. En la última fila de cada una se han tabulado $\ln(1 + r)$ y $\log_{10}(1 + r)$ respectivamente.

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	0,9950249	0,9925558	0,990099	0,9876543	0,9852217	0,982801	0,9803922
2	1,9850994	1,9777229	1,9703951	1,9631154	1,9558834	1,9486988	1,9415609
3	2,9702481	2,9555562	2,9409852	2,9265337	2,9122004	2,897984	2,8838833
4	3,9504957	3,9261104	3,9019656	3,878058	3,8543847	3,8309425	3,8077287
5	4,9258663	4,8894396	4,8534312	4,817835	4,782645	4,7478551	4,7134595
6	5,8963844	5,8455976	5,7954765	5,7460099	5,6971872	5,6489976	5,6014309
7	6,862074	6,7946379	6,7281945	6,6627259	6,598214	6,5346414	6,4719911
8	7,8229592	7,7366133	7,6516778	7,5681243	7,4859251	7,405053	7,3254814
9	8,7790639	8,6715764	8,5660176	8,462345	8,3605173	8,2604943	8,1622367
10	9,7304119	9,5995796	9,4713045	9,3455259	9,2221846	9,1012229	8,982585
11	10,677027	10,520675	10,367628	10,217803	10,071118	9,9274918	9,7868481
12	11,618932	11,434913	11,255077	11,079312	10,907505	10,73955	10,575341
13	12,556151	12,342345	12,13374	11,930185	11,731532	11,537641	11,348374
14	13,488708	13,243022	13,003703	12,770553	12,543382	12,322006	12,106249
15	14,416625	14,136995	13,865053	13,600546	13,343233	13,09288	12,849264
16	15,339925	15,024313	14,717874	14,420292	14,131264	13,850497	13,577709
17	16,258632	15,905025	15,562251	15,229918	14,907649	14,595083	14,291872
18	17,172768	16,779181	16,398269	16,029549	15,672561	15,326863	14,992031
19	18,082356	17,64683	17,226009	16,819308	16,426168	16,046057	15,678462
20	18,987419	18,50802	18,045553	17,599316	17,168639	16,752881	16,351433
21	19,887979	19,362799	18,856983	18,369695	17,900137	17,447549	17,011209
22	20,784059	20,211215	19,660379	19,130563	18,620824	18,130269	17,658048
23	21,675681	21,053315	20,455821	19,882037	19,330861	18,801248	18,292204
24	22,562866	21,889146	21,243387	20,624235	20,030405	19,460686	18,913926
25	23,445638	22,718755	22,023156	21,357269	20,719611	20,108782	19,523456
26	24,324018	23,542189	22,795204	22,081253	21,398632	20,745732	20,121036
27	25,198028	24,359493	23,559608	22,796299	22,067617	21,371726	20,706898
28	26,067689	25,170713	24,316443	23,502518	22,726717	21,986955	21,281272
29	26,933024	25,975893	25,065785	24,200018	23,376076	22,591602	21,844385
30	27,794054	26,77508	25,807708	24,888906	24,015838	23,185849	22,396456
31	28,6508	27,568318	26,542285	25,56929	24,646146	23,769877	22,937702
32	29,503284	28,35565	27,269589	26,241274	25,267139	24,343859	23,468335
33	30,351526	29,137122	27,989693	26,904962	25,878954	24,90797	23,988564
34	31,195548	29,912776	28,702666	27,560456	26,481728	25,462378	24,498592
35	32,035371	30,682656	29,40858	28,207858	27,075595	26,007251	24,998619
36	32,871016	31,446805	30,107505	28,847267	27,660684	26,542753	25,488842

Cuadro C.1

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}$

Cuadro C.2

Tabla de valores de $A_{\overline{n}|r}^{-1}$

n	0,50%	0,625%	0,75%	0,875%	1%	1,125%	1,25%	1,375%	1,50%
1	1,005000	1,006250	1,007500	1,008750	1,010000	1,011250	1,012500	1,013750	1,015000
2	0,503753	0,504692	0,505632	0,506572	0,507512	0,508453	0,509394	0,510336	0,511278
3	0,336672	0,337509	0,338346	0,339184	0,340022	0,340861	0,341701	0,342542	0,343383
4	0,253133	0,253918	0,254705	0,255493	0,256281	0,257071	0,257861	0,258652	0,259445
5	0,203010	0,203766	0,204522	0,20528	0,20604	0,2068	0,207562	0,208325	0,209089
6	0,169595	0,170331	0,171069	0,171808	0,172548	0,17329	0,174034	0,174779	0,175525
7	0,145729	0,146451	0,147175	0,147901	0,148628	0,149358	0,150089	0,150822	0,151556
8	0,127829	0,128541	0,129256	0,129972	0,13069	0,131411	0,132133	0,132858	0,133584
9	0,113907	0,114612	0,115319	0,116029	0,11674	0,117454	0,118171	0,118889	0,119610
10	0,102771	0,10347	0,104171	0,104875	0,105582	0,106291	0,107003	0,107717	0,108434
11	0,093659	0,094354	0,095051	0,095751	0,096454	0,09716	0,097868	0,098580	0,099294
12	0,086066	0,086757	0,087451	0,088149	0,088849	0,089552	0,090258	0,090968	0,091680
13	0,079642	0,08033	0,081022	0,081717	0,082415	0,083116	0,083821	0,084529	0,085240
14	0,074136	0,074822	0,075511	0,076205	0,076901	0,077601	0,078305	0,079012	0,079723
15	0,069364	0,070048	0,070736	0,071428	0,072124	0,072823	0,073526	0,074234	0,074944
16	0,065189	0,065872	0,066559	0,06725	0,067945	0,068644	0,069347	0,070054	0,070765
17	0,061506	0,062187	0,062873	0,063563	0,064258	0,064957	0,065660	0,066368	0,067080
18	0,058232	0,058912	0,059598	0,060288	0,060982	0,061681	0,062385	0,063093	0,063806
19	0,055303	0,055983	0,056667	0,057357	0,058052	0,058751	0,059455	0,060165	0,060878
20	0,052666	0,053346	0,054031	0,05472	0,055415	0,056115	0,05682	0,057531	0,058246
21	0,050282	0,050961	0,051645	0,052335	0,053031	0,053731	0,054437	0,055149	0,055865
22	0,048114	0,048793	0,049477	0,050168	0,050864	0,051565	0,052272	0,052985	0,053703
23	0,046135	0,046814	0,047498	0,048189	0,048886	0,049588	0,050297	0,051011	0,051731
24	0,044321	0,045000	0,045685	0,046376	0,047073	0,047777	0,048487	0,049202	0,049924
25	0,042652	0,043331	0,044016	0,044708	0,045407	0,046111	0,046822	0,047540	0,048263
26	0,041112	0,041791	0,042477	0,04317	0,043869	0,044575	0,045287	0,046006	0,046732
27	0,039686	0,040365	0,041052	0,041745	0,042446	0,043153	0,043867	0,044588	0,045315
28	0,038362	0,039042	0,039729	0,040423	0,041124	0,041833	0,042549	0,043271	0,044001
29	0,037129	0,037809	0,038497	0,039192	0,039895	0,040605	0,041322	0,042047	0,042779
30	0,035979	0,03666	0,037348	0,038044	0,038748	0,039460	0,040179	0,040905	0,041639
31	0,034903	0,035584	0,036274	0,036971	0,037676	0,038389	0,039109	0,039838	0,040574
32	0,033895	0,034576	0,035266	0,035965	0,036671	0,037385	0,038108	0,038839	0,039577
33	0,032947	0,033630	0,034320	0,035020	0,035727	0,036443	0,037168	0,037901	0,038641
34	0,032056	0,032739	0,033431	0,034131	0,03484	0,035558	0,036284	0,037019	0,037762
35	0,031215	0,031899	0,032592	0,033293	0,034004	0,034723	0,035451	0,036188	0,036934
36	0,030422	0,031106	0,0318	0,032502	0,033214	0,033935	0,034665	0,035404	0,036152

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,005000	2,007500	2,010000	2,012500	2,015000	2,017500	2,020000
3	3,015025	3,022556	3,030100	3,037656	3,045225	3,052806	3,060400
4	4,030100	4,045225	4,060401	4,075627	4,090903	4,106230	4,121608
5	5,050251	5,075565	5,101005	5,126572	5,152267	5,178089	5,204040
6	6,075502	6,113631	6,152015	6,190654	6,229551	6,268706	6,308121
7	7,105879	7,159484	7,213535	7,268038	7,322994	7,378408	7,434283
8	8,141409	8,213180	8,285671	8,358888	8,432839	8,507530	8,582969
9	9,182116	9,274779	9,368527	9,463374	9,559332	9,656412	9,754628
10	10,228026	10,344339	10,462213	10,581666	10,702722	10,825399	10,949721
11	11,279167	11,421922	11,566835	11,713937	11,863262	12,014844	12,168715
12	12,335562	12,507586	12,682503	12,860361	13,041211	13,225104	13,412090
13	13,397240	13,601393	13,809328	14,021116	14,236830	14,456543	14,680332
14	14,464226	14,703404	14,947421	15,196380	15,450382	15,709533	15,973938
15	15,536548	15,813679	16,096896	16,386335	16,682138	16,984449	17,293417
16	16,614230	16,932282	17,257864	17,591164	17,932370	18,281677	18,639285
17	17,697301	18,059274	18,430443	18,811053	19,201355	19,601607	20,012071
18	18,785788	19,194718	19,614748	20,046192	20,489376	20,944635	21,412312
19	19,879717	20,338679	20,810895	21,296769	21,796716	22,311166	22,840559
20	20,979115	21,491219	22,019004	22,562979	23,123667	23,701611	24,297370
21	22,084011	22,652403	23,239194	23,845016	24,470522	25,116389	25,783317
22	23,194431	23,822296	24,471586	25,143078	25,837580	26,555926	27,298984
23	24,310403	25,000963	25,716302	26,457367	27,225144	28,020655	28,844963
24	25,431955	26,188471	26,973465	27,788084	28,633521	29,511016	30,421862
25	26,559115	27,384884	28,243200	29,135435	30,063024	31,027459	32,030300
26	27,691911	28,590271	29,525632	30,499628	31,513969	32,570440	33,670906
27	28,830370	29,804698	30,820888	31,880873	32,986679	34,140422	35,344324
28	29,974522	31,028233	32,129097	33,279384	34,481479	35,737880	37,051210
29	31,124395	32,260945	33,450388	34,695377	35,998701	37,363293	38,792235
30	32,280017	33,502902	34,784892	36,129069	37,538681	39,017150	40,568079
31	33,441417	34,754174	36,132740	37,580682	39,101762	40,699950	42,379441
32	34,608624	36,014830	37,494068	39,050441	40,688288	42,412200	44,227030
33	35,781667	37,284941	38,869009	40,538571	42,298612	44,154413	46,111570
34	36,960575	38,564578	40,257699	42,045303	43,933092	45,927115	48,033802
35	38,145378	39,853813	41,660276	43,570870	45,592088	47,730840	49,994478
36	39,336105	41,152716	43,076878	45,115506	47,275969	49,566129	51,994367

Cuadro C.3

Tabla de valores de $((1 + r)^n - 1) / r$

Cuadro C.4

Tabla de valores de $r / ((1 + r)^n - 1) / r$

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	0,498753	0,498132	0,497512	0,496894	0,496278	0,495663	0,495050
3	0,331672	0,330846	0,330022	0,329201	0,328383	0,327567	0,326755
4	0,248133	0,247205	0,246281	0,245361	0,244445	0,243532	0,242624
5	0,198010	0,197022	0,196040	0,195062	0,194089	0,193121	0,192158
6	0,164595	0,163569	0,162548	0,161534	0,160525	0,159523	0,158526
7	0,140729	0,139675	0,138628	0,137589	0,136556	0,135531	0,134512
8	0,122829	0,121756	0,120690	0,119633	0,118584	0,117543	0,116510
9	0,108907	0,107819	0,106740	0,105671	0,104610	0,103558	0,102515
10	0,097771	0,096671	0,095582	0,094503	0,093434	0,092375	0,091327
11	0,088659	0,087551	0,086454	0,085368	0,084294	0,083230	0,082178
12	0,081066	0,079951	0,078849	0,077758	0,076680	0,075614	0,074560
13	0,074642	0,073522	0,072415	0,071321	0,070240	0,069173	0,068118
14	0,069136	0,068011	0,066901	0,065805	0,064723	0,063656	0,062602
15	0,064364	0,063236	0,062124	0,061026	0,059944	0,058877	0,057825
16	0,060189	0,059059	0,057945	0,056847	0,055765	0,054700	0,053650
17	0,056506	0,055373	0,054258	0,053160	0,052080	0,051016	0,049970
18	0,053232	0,052098	0,050982	0,049885	0,048806	0,047745	0,046702
19	0,050303	0,049167	0,048052	0,046955	0,045878	0,044821	0,043782
20	0,047666	0,046531	0,045415	0,044320	0,043246	0,042191	0,041157
21	0,045282	0,044145	0,043031	0,041937	0,040866	0,039815	0,038785
22	0,043114	0,041977	0,040864	0,039772	0,038703	0,037656	0,036631
23	0,041135	0,039998	0,038886	0,037797	0,036731	0,035688	0,034668
24	0,039321	0,038185	0,037073	0,035987	0,034924	0,033886	0,032871
25	0,037652	0,036517	0,035407	0,034322	0,033263	0,032230	0,031220
26	0,036112	0,034977	0,033869	0,032787	0,031732	0,030703	0,029699
27	0,034686	0,033552	0,032446	0,031367	0,030315	0,029291	0,028293
28	0,033362	0,032229	0,031124	0,030049	0,029001	0,027982	0,026990
29	0,032129	0,030997	0,029895	0,028822	0,027779	0,026764	0,025778
30	0,030979	0,029848	0,028748	0,027679	0,026639	0,025630	0,024650
31	0,029903	0,028774	0,027676	0,026609	0,025574	0,024570	0,023596
32	0,028895	0,027766	0,026671	0,025608	0,024577	0,023578	0,022611
33	0,027947	0,026820	0,025727	0,024668	0,023641	0,022648	0,021687
34	0,027056	0,025931	0,024840	0,023784	0,022762	0,021774	0,020819
35	0,026216	0,025092	0,024004	0,022951	0,021934	0,020951	0,020002
36	0,025422	0,024300	0,023214	0,022165	0,021152	0,020175	0,019233

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	1,005000	1,007500	1,010000	1,012500	1,015000	1,017500	1,020000
2	1,010025	1,015056	1,020100	1,025156	1,030225	1,035306	1,040400
3	1,015075	1,022669	1,030301	1,037971	1,045678	1,053424	1,061208
4	1,020151	1,030339	1,040604	1,050945	1,061364	1,071859	1,082432
5	1,025251	1,038067	1,051010	1,064082	1,077284	1,090617	1,104081
6	1,030378	1,045852	1,061520	1,077383	1,093443	1,109702	1,126162
7	1,035529	1,053696	1,072135	1,090850	1,109845	1,129122	1,148686
8	1,040707	1,061599	1,082857	1,104486	1,126493	1,148882	1,171659
9	1,045911	1,069561	1,093685	1,118292	1,143390	1,168987	1,195093
10	1,051140	1,077583	1,104622	1,132271	1,160541	1,189444	1,218994
11	1,056396	1,085664	1,115668	1,146424	1,177949	1,210260	1,243374
12	1,061678	1,093807	1,126825	1,160755	1,195618	1,231439	1,268242
20	1,104896	1,161184	1,220190	1,282037	1,346855	1,414778	1,485947
30	1,161400	1,251272	1,347849	1,451613	1,563080	1,682800	1,811362
40	1,220794	1,348349	1,488864	1,643619	1,814018	2,001597	2,208040
50	1,283226	1,452957	1,644632	1,861022	2,105242	2,380789	2,691588
60	1,348850	1,565681	1,816697	2,107181	2,443220	2,831816	3,281031
70	1,417831	1,687151	2,006763	2,385900	2,835456	3,368288	3,999558
80	1,490339	1,818044	2,216715	2,701485	3,290663	4,006392	4,875439
90	1,566555	1,959092	2,448633	3,058813	3,818949	4,765381	5,943133
100	1,646668	2,111084	2,704814	3,463404	4,432046	5,668156	7,244646
110	1,730879	2,274867	2,987797	3,921512	5,143570	6,741957	8,831183
120	1,819397	2,451357	3,300387	4,440213	5,969323	8,019183	10,765163
130	1,912441	2,641540	3,645680	5,027524	6,927643	9,538374	13,122674
140	2,010243	2,846477	4,027099	5,692519	8,039812	11,345366	15,996466
150	2,113048	3,067314	4,448423	6,445473	9,330531	13,494683	19,499603
160	2,221109	3,305284	4,913826	7,298021	10,828462	16,051176	23,769907
170	2,334697	3,561716	5,427921	8,263336	12,566872	19,091983	28,975384
180	2,454094	3,838043	5,995802	9,356334	14,584368	22,708854	35,320831
190	2,579596	4,135808	6,623096	10,593905	16,925754	27,010921	43,055896
200	2,711517	4,456675	7,316018	11,995169	19,643029	32,127992	52,484897
210	2,850184	4,802435	8,081435	13,581780	22,796537	38,214463	63,978797
220	2,995943	5,175020	8,926932	15,378253	26,456311	45,453982	77,989797
230	3,149156	5,576512	9,860887	17,412348	30,703630	54,064989	95,069127
240	3,310204	6,009152	10,892554	19,715494	35,632816	64,307303	115,888735
Ln	0,004988	0,007472	0,009950	0,012423	0,014889	0,017349	0,019803

Cuadro C.5

Tabla de valores de $(1 + r)^n$

Cuadro C.6

Tabla de valores de $(1 + r)^{-n}$

n	0,50%	0,75%	1%	1,25%	1,50%	1,75%	2%
1	0,995025	0,992556	0,990099	0,987654	0,985222	0,982801	0,980392
2	0,990075	0,985167	0,980296	0,975461	0,970662	0,965898	0,961169
3	0,985149	0,977833	0,970590	0,963418	0,956317	0,949285	0,942322
4	0,980248	0,970554	0,960980	0,951524	0,942184	0,932959	0,923845
5	0,975371	0,963329	0,951466	0,939777	0,928260	0,916913	0,905731
6	0,970518	0,956158	0,942045	0,928175	0,914542	0,901143	0,887971
7	0,965690	0,949040	0,932718	0,916716	0,901027	0,885644	0,870560
8	0,960885	0,941975	0,923483	0,905398	0,887711	0,870412	0,853490
9	0,956105	0,934963	0,914340	0,894221	0,874592	0,855441	0,836755
10	0,951348	0,928003	0,905287	0,883181	0,861667	0,840729	0,820348
11	0,946615	0,921095	0,896324	0,872277	0,848933	0,826269	0,804263
12	0,941905	0,914238	0,887449	0,861509	0,836387	0,812058	0,788493
20	0,905063	0,861190	0,819544	0,780009	0,742470	0,706825	0,672971
30	0,861030	0,799187	0,741923	0,688889	0,639762	0,594248	0,552071
40	0,819139	0,741648	0,671653	0,608413	0,551262	0,499601	0,452890
50	0,779286	0,688252	0,608039	0,537339	0,475005	0,420029	0,371528
60	0,741372	0,638700	0,550450	0,474568	0,409296	0,353130	0,304782
70	0,705303	0,592715	0,498315	0,419129	0,352677	0,296887	0,250028
80	0,670988	0,550042	0,451118	0,370167	0,303890	0,249601	0,205110
90	0,638344	0,510440	0,408391	0,326924	0,261852	0,209847	0,168261
100	0,607287	0,473690	0,369711	0,288733	0,225629	0,176424	0,138033
110	0,577741	0,439586	0,334695	0,255004	0,194418	0,148325	0,113235
120	0,549633	0,407937	0,302995	0,225214	0,167523	0,124701	0,092892
130	0,522892	0,378567	0,274297	0,198905	0,144349	0,104840	0,076204
140	0,497452	0,351311	0,248318	0,175669	0,124381	0,088142	0,062514
150	0,473250	0,326018	0,224799	0,155148	0,107175	0,074103	0,051283
160	0,450226	0,302546	0,203507	0,137023	0,092349	0,062301	0,042070
170	0,428321	0,280764	0,184233	0,121017	0,079574	0,052378	0,034512
180	0,407482	0,260549	0,166783	0,106879	0,068567	0,044036	0,028312
190	0,387658	0,241791	0,150987	0,094394	0,059082	0,037022	0,023226
200	0,368797	0,224383	0,136686	0,083367	0,050909	0,031126	0,019053
210	0,350854	0,208228	0,123740	0,073628	0,043866	0,026168	0,015630
220	0,333785	0,193236	0,112021	0,065027	0,037798	0,022000	0,012822
230	0,317545	0,179324	0,101411	0,057431	0,032569	0,018496	0,010519
240	0,302096	0,166413	0,091806	0,050722	0,028064	0,015550	0,008629
-Log	0,002166	0,003245	0,004321	0,005395	0,006466	0,007534	0,008600

Solución de los ejercicios

Capítulo 2

Ejercicio 2.1
Usamos la fórmula $a_n = a_1+(n-1)R$. El enunciado nos dice que $7 = a_3 = a_1+(3-1)R$ y $27 = a_7 = a_1 + (7 - 1)R$. Luego $27 - 7 = a_7 - a_3 = (6 - 2)R$. Así tenemos que $20 = 4R$, es decir $R = 5$, por lo cual $7 = a_1 + 2 \times 5$ y se tiene que $a_1 = -3$. Finalmente, $a_{10} = a_1 + 9R = -3 + 9 \times 5 = 42$.

Ejercicio 2.2
Dada una progresión aritmética $\{a_n\}$, la sucesión que se obtiene descartando los primeros k términos, también forma una progresión aritmética. Entonces podemos suponer en este caso que $a_1 = 13$ y $a_5 = 25$, luego $25 - 13 = a_5 - a_1 = 4R$, de donde obtenemos que la razón debe ser $R = 12/4 = 3$.

Ejercicio 2.3
Calculamos como en el ejercicio anterior y obtenemos la razón $R = 7$. Luego el promedio será: $P = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4 = (7 + 14 + 21 + 28)/4 = 35/2$.

Ejercicio 2.4
Primero calculamos el promedio P en términos de a_1 y R:

$$P = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_1 + (j-1)R) = \frac{1}{n}(na_1 + \frac{n(n-1)}{2}R) = a_1 + \frac{n-1}{2}R$$

De las hipótesis obtenemos que $a_1 = p$ y $R = (f-p)/(n-1)$. Reemplazamos y simplificamos.

Entonces $P = p + (f - p)/2 = (p + f)/2$. Observemos que es independiente de n.

Verifiquemos que usando esta fórmula en el ejercicio anterior obtenemos el mismo resultado:

$$p = 7, f = 28 \text{ luego, } P = (7 + 28)/2 = 35/2$$

Ejercicio 2.5

Vemos que el primer múltiplo de 13 que es mayor que 20 es 26 = 13 × 2 y el mayor múltiplo de 13 que es menor que 400 es 390 = 13 × 30. Debemos calcular entonces la suma S de 13 × 2, 13 × 3, . . . , 13 × 30:

$$S = \sum_{j=2}^{30} 13j = 13(\frac{30(30+1)}{2} - 1) = 6.032$$

Ejercicio 2.6

Para demostrar la afirmación notemos que los números de n dígitos están comprendidos entre el 10^{n-1} y el $10^n - 1$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j=10^{n-1}}^{10^n-1} j &= \frac{(10^n-1)10^n}{2} - \frac{(10^{n-1}-1)10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^n}{2} - \frac{10^{2n-2}-10^{n-1}}{2} \\
&= \frac{10^{2n}-10^{2n-2}}{2} - \frac{10^n-10^{n-1}}{2} \\
&= 10^{2n-3}(\frac{10^3-10}{2}) - 10^{n-2}(\frac{10^2-10}{2}) \\
&= 10^{2n-3}495 - 10^{n-2}45
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.7

Los únicos factores de 10^6, son productos de potencias de 2 y potencias de 5. Cada vez que usamos un dos y un cinco aparecerá un factor diez y por lo tanto un cero. Por lo tanto la única combinación que no produce ceros es: $10^6 = 5^6 \times 2^6 = 15.625 \times 64$

Ejercicio 2.8

a) Dividimos por 4 y tenemos 2009 = 4×502+1 y 2999 = 4×749+3, de donde vemos que los años bisiestos serán: 4 × 503, 4 × 504, . . . , 4 × 749 menos los 7 que son divisibles por 100 pero no por 400. Así tenemos 749 − 502 − 7 = 240 años bisiestos.

b) Como 365 = 7×52+1 y 366 = 7×52+2, cada año que pasa, el día se corre en dos o uno según sea o no bisiesto. Así, en 808 años se correrá en 808 más la cantidad de bisiestos entre 2009 y 2816 (2008 no cuenta pues julio viene después de febrero). Tenemos así un corrimiento de 808 + 196 = 1.004 = 7 × 143 + 3. Quiere decir que se correrá en tres días.

El 9 de julio de 2816 será entonces sábado.

Ejercicio 2.9

La hipótesis nos dice que se trata de dos progresiones aritméticas de razón $R = 2$. Podemos tomar, por ejemplo, $\{a_n\}$ la sucesión de los números pares y $\{b_n\}$ la de los impares.

Ejercicio 2.10

En este caso tenemos $a'_n = a_{n+1} - a_n$, por lo tanto $a_{n+1} = 2a_n$. Podemos tomar, por ejemplo, $a_n = 2^n$.

Ejercicio 2.11

$$\begin{aligned} P_n = \sum_{j=1}^{n}(3j+1) &= 3n(n+1)/2 + n \\ &= n(3n+5)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n = \sum_{j=1}^{n}(4j+1) &= 4n(n+1)/2 + n \\ &= n(2n+3) \end{aligned}$$

Ejercicio 2.12

Tenemos en total $10T_n/60 = 10(2^{65} - 1)/60 = (2^{65} - 1)/6$ minutos.

Ejercicio 2.13

De \$ 100 en mercadería pagamos \$ 85 y el banco nos devuelve \$ 8,5. Por lo tanto pagamos \$ 76,5 en lugar de \$ 100, es decir un 23,5% de descuento.

Ejercicio 2.14

Si el artículo nos costase \$ 121 serían \$ 100 más 21% de IVA y el gobierno nos devolvería \$ 5 de los \$ 121 pagados. Esto es, pagaríamos \$ 116 de los 121 abonados en el comercio, lo cual da un 95,87% .

Ejercicio 2.15

Si ganaban \$ 100 en marzo ganarán \$ 110 y en setiembre \$ 110 + \$ 9,9, es decir, \$ 119,9. Esto da un aumento total del 19,9 %.

Ejercicio 2.16

Probaremos la fórmula por inducción. La fórmula es verdadera para $n = 1$:

$$a_1 = a_1(\frac{a_2}{a_1})^{(1-1)}$$

Asumiendo que vale para $n = k$ veamos que vale para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = qa_k = qa_1(\frac{a_2}{a_1})^{(k-1)} = a_1(\frac{a_2}{a_1})^{(k+1-1)}$$

donde en la última igualdad usamos que $q = a_2/a_1$.

Ejercicio 2.17

a) Los cocientes deben ser potencias de q : $12/2 = 6 = q^k$ y $20/2 = 10 = q^j$ como q divide a ambos, debería ser $q = 2$ pero 6 no es potencia de 2, por lo tanto la terna no puede formar parte de una progresión geométrica de enteros.

b) Aquí $12/3 = 4 = q^k$ y $24/12 = 2 = q^j$, podemos tomar $q = 2$, $k = 2$, $j = 1$ y la terna forma parte de $\{3, 6, 12, 24, \ldots\}$.

Ejercicio 2.18

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 143, 232, 375, 607

b) $\varphi^{11}/\sqrt{5} \sim 88,997755$

Ejercicio 2.19

La longitud de los lados, $a < a\sqrt{\varphi} < a\varphi$, expresada en decímetros puede ser: $(1, \sqrt{\varphi}, \varphi)$; $(1/\sqrt{\varphi}, 1, \sqrt{\varphi})$ o $(1/\varphi, 1/\sqrt{\varphi}, 1)$. Los tres casos se obtienen tomando $a = 1$, $a\sqrt{\varphi} = 1$ y $a\varphi = 1$ respectivamente.

Ejercicio 2.20

Aquiles tardará 10 segundos en hacer los primeros 10 metros, en ese lapso la tortuga recorrió medio metro, que Aquiles recorrerá en 0,5 segundos. Así tardará en alcanzarla $10 + 0,5 + 0,025 + \cdots = 10(1/(1 - 1/20)$ segundos. Esto es 10,526316 segundos.

Ejercicio 2.21

Debemos resolver la ecuación $2 = (1,12)^n$. Es decir $n = \log 2/\log(1,12) = 6{,}1162$. Aproximadamente seis años y un mes.

Capítulo 3

Ejercicio 3.1

a) En este caso la tasa interés aplicada es mensual e igual a $r = 0{,}05 = 5\%$. Puesto que 1 año = 12 meses, se tiene que $m = 12$ y la tasa equivalente anual es entonces T.E.A.= $(1{,}05)^{12} - 1 = 0{,}79585\%$.

b) La unidad de tiempo es el bimestre, y puesto que 1 año = 6 bimestres se tiene que la tasa interés bimestral aplicada es $r = 0{,}10 = 10\%$. La tasa equivalente anual es T.E.A.= $(1{,}10)^6 - 1 = 0{,}77156\%$.

Ejercicio 3.2

Dado que el interés periódico o real aplicado es trimestral, y que un año equivale a 4 trimestres, se denotará $r^{(4)}$ a la tasa nominal anual. La tasa trimestral aplicada es $r = r^{(4)}/4$.

La tasa de interés anual equivalente a r es del 15 %. Esto significa que

$$(1 + \frac{r^{(4)}}{4})^4 = 1 + 0{,}15$$

de donde puede despejarse el valor de la tasa nominal anual: $r^{(4)} = 0{,}1422 = 14{,}22\%$. La tasa trimestral equivalente a 0,15 que rige la operación es entonces $r = r^{(4)}/4 = 0{,}034 = 3{,}4\%$.

Ejercicio 3.3

El interés aplicado es del 0,25 %, es decir, $r = 0{,}0025$. Según las diferentes opciones, el capital final es:

Opción 1. $1.000\ (1{,}0025)^2\ (1 + 0{,}0025/2) = 1.006{,}26251$

Opción 2. $1.000\ (1{,}0025)^{2{,}5} = 1.006{,}26172$

Opción 3. $1.000\ (1{,}0025)^2 = 1.005{,}00625$

Ejercicio 3.4

Los elementos a tener en cuenta son $C_I = 2.500$, $C_F = 2.550$, $n = 5$. La tasa mensual r relaciona estas cantidades según la fórmula de interés simple:

$$2.550 = 2.500\ (1 + 5.\ r)$$

Por lo tanto

$$5\,.r = \frac{2.550}{2.500} - 1 \qquad \text{es decir} \qquad \boxed{r = 0{,}004 = 0{,}4\%}$$

Para determinar el capital final al cabo de los 8 meses, se aplica la fórmula

$$C_F = 2.500\ (1 + 8 \cdot 0{,}004)$$

que arroja un resultado de \$ 2.580.

Ejercicio 3.5

Salvo que se exprese lo contrario, se asumirá un tipo de interés compuesto. En este caso los datos son C_I=20.000, $r = 0{,}15\%$ y $n = 2$. La fórmula a aplicar es $C_F = C_I\ (1 + r)^2$.

El capital final así obtenido es de \$ 20.060.045.

Ejercicio 3.6

Si r es la tasa semestral, entonces la T.N.A. es $r^{(2)} = 0{,}1$, por lo que $r = r^{(2)}/2 = 0{,}05 = 5\%$. La capitalización durante tres años arroja un capital final en pesos igual a

$$C_F = 59.500\ (1{,}05)^3 = 68.878{,}6875$$

por lo que el interés obtenido es de \$ 9.378,69. Se han redondeado los decimales a dos dígitos, considerando que la unidad monetaria mínima es el centavo.

Ejercicio 3.7
La tasa trimestral r es del 2,5 %, es decir, r = 0,025. Los elementos a tener en cuenta son C_F = 105.600, n = 26 (26 trimestres), y la fórmula que relaciona los datos y incógnita es la del interés compuesto.

La solución al problema es que debe depositarse un capital de $ 55.570,39.

Ejercicio 3.8
Dado que un mes equivale a 30 días, la fórmula aplicada es

$$5.304{,}50 = 5.000\ (1 + r)^2$$

De aquí se obtiene que r = 0,03, lo que corresponde a una tasa del 3% mensual.

Ejercicio 3.9
Este problema es similar al del Ejemplo 3.16. La solución es 25 meses, es decir, 2 años y un mes.

Capítulo 4

Ejercicio 4.1
El plazo de la operación, esto es, el tiempo que transcurre desde el 4 de setiembre al 22 de octubre, es de 48 días. El equivalente en meses es 1,6 meses. La tasa mensual de descuento es d = 2% = 0,02, por lo que el valor efectivo E, calculado según el descuento simple racional es

$$E = \frac{N}{1+dt} = \frac{2.730}{1+0{,}02\cdot(1{,}6)} \simeq \$\ 2.645{,}35$$

y si se calcula según el descuento comercial es

$$E = N\,(1-dt) = 2.730\,(1-0{,}02\cdot(1{,}6)) = \$\ 2.642{,}64$$

Nótese que el valor descontado según el descuento racional es mayor que por el descuento comercial.

Ejercicio 4.2
En esta situación se considera que la unidad de tiempo es 90 días. Por lo tanto, la tasa de descuento es

$$d = \frac{d^{(4)}}{4} = \frac{0{,}27}{4} = 0{,}0675 = 6{,}75\%$$

Entonces, el descuento sobre el documento es por 10 752 · 0,0675 = 725,76, y el efectivo a cobrar es 10.752 − 725,76 = $ 10.026,24.

La tasa de interés para los 90 días es

$$r = \frac{d}{1-d} = 0{,}0724 = 7{,}24\%$$

por lo que la T.E.A. es igual a

$$r_4 = (1{,}0724)^4 - 1 = 0{,}322 = 32{,}2\%$$

La tasa de descuento equivalente anual está dada por

$$d_4 = 1 - (1-d)^4 = 0{,}244 = 24{,}4\%$$

que también podría calcularse a partir de la T.E.A.: $d_4 = \frac{r_4}{1+r_4} = \frac{0{,}322}{1{,}322} = 0{,}244 = 24{,}4\%$.

Si la tasa nominal anual fuera del 23%, entonces la tasa de interés para 90 días sería del 6.25 %. Esto equivale a una tasa de descuento para 90 días de

$$d = \frac{0{,}0625}{0{,}9375} = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

Para obtener un valor efectivo de $ 10.026,24 para esta tasa de descuento, el valor nominal *N* deberá cumplir

$$N \cdot (1 - 0{,}067) = 10.026{,}24 \qquad \text{es decir} \qquad N = \frac{10.026{,}24}{0{,}933} = \$\ 10.746{,}24$$

Ejercicio 4.3

Si el descuento es simple comercial, entonces el valor efectivo se obtiene restando al valor nominal el proporcional a 78 días. Como la tasa es trimestral, se debe expresar el tiempo en términos de trimestres: 78 días = $\frac{78}{90}$ = 0,87 trimestres. Luego el valor nominal cumple que:

$$890 = N \cdot (1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

de donde sale que

$$N = \frac{890}{1 - 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 957{,}47$$

Si el descuento es simple racional, entonces la fórmula a aplicar es

$$890 = N \cdot (1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87)$$

por lo cual

$$N = \frac{890}{1 + 0{,}081 \cdot 0{,}87} = \$\ 831{,}41.$$

Ejercicio 4.4

Sea N el valor nominal del cheque. Se sabe que el descuento D cumple $D = N/6$, y por lo tanto el valor efectivo es $E = 5/6N$. Como el tipo de descuento es racional se tiene que

$$\frac{5}{6}N = \frac{N}{1+8\,d}$$

Por lo tanto, la tasa de descuento mensual cumple

$$1+8\,d = 1{,}2 \qquad \text{que implica } d = \frac{0{,}2}{8} = 0{,}025 = 2{,}5\%.$$

Capítulo 5

Ejercicio 5.1

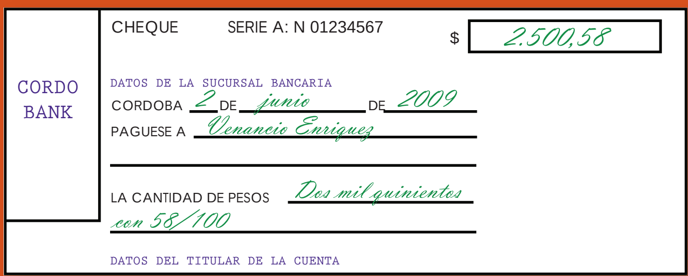
Los distintos elementos que aparecen en el cheque son:

- SuBanco: banco en el que radica la cuenta bancaria.
- Domicilio del banco.
- 31 de mayo: fecha en la que se libra el cheque.
- 26 de noviembre de 2007: fecha a partir de la cual puede cobrarse el cheque. Este campo no aparece en un cheque común, ya que el mismo puede cobrarse inmediatamente.
- María Susana del Valle: nombre del portador del cheque.
- Juan Carlos Gonzalez: titular de la cuenta. También se indica su número de cuenta corriente, dirección y número de CUIT: 20-00000000-5.
- $ 1.256.71: monto del cheque, escrito en números. También el cheque posee un espacio para escribirlo en letras: mil doscientos cincuenta y seis con 70/100.
- Dorso del cheque: nombre, DNI, domicilio y firma del beneficiario del cheque.

Ejercicio 5.2

El cheque debe completarse según muestra la siguiente figura:

Ejercicio 5.2



Ejercicio 5.3

Los datos que pueden identificarse son:

- fecha y hora de emisión del comprobante: 2 de mayo de 2009, a las 10:12:42.
- denominación de la tarjeta de débito: MAESTRO.
- denominación de la entidad en la que se ha efectuado la compra: TIENDAS S.A., junto con su dirección y CUIL.
- importe de la compra: $ 156,86
- tipo de cuenta: C.A. $, (Caja de Ahorro en pesos).
- número de factura a la que corresponde la transacción: 0000-00000000

Ejercicio 5.4

Pueden identificarse los siguientes elementos.

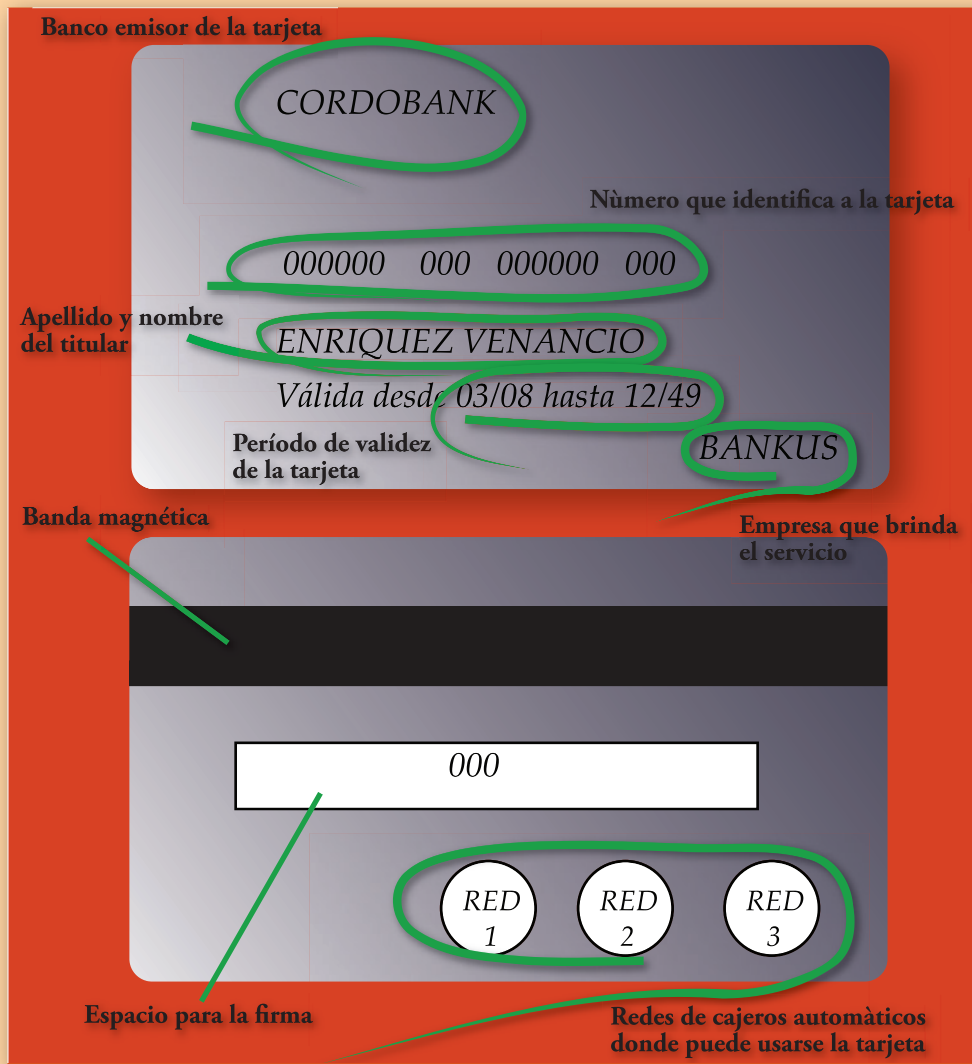


Figura 5.4

Datos en una tarjeta de débito

Capítulo 6

Ejercicio 6.1

La fórmula aplicar es $V_F = 3.000 \cdot s_{\overline{7}|r}$, para $r = 0{,}08$, $r = 0{,}1075$ y $r = 0{,}1729$. Las soluciones son, respectivamente: (a) \$ 26.768,41, (b) \$ 29.125,07 y (c) \$ 35.633,96.

Ejercicio 6.2

La situación de Juan es equivalente a tener que pagar el capital acumulado por una renta de 5 cuotas vencidas, iguales a c = \$ 250, sujetas a una tasa de interés $r = 0{,}144/12 = 0{,}012 = 1{,}2\%$. Por lo tanto, Juan deberá pagar en el siguiente mes un total en pesos de:

$$250\, s_{\overline{5}|,012} = 250 \frac{(1{,}012)^5 - 1}{0{,}012} = 1.280{,}36$$

es decir \$ 1.280,36.

Ejercicio 6.3

En este caso se enuncia una tasa nominal anual del 8% con capitalización trimestral. Esto significa que la tasa real aplicada es del 2% trimestral. Dado que cada año es de 4 trimestres, el número total de cuotas al cabo de 10 años es 40. La fórmula a aplicar es

$$10.000 = c \cdot s_{\overline{40}|0,02}$$

de donde puede despejarse el valor de c: $c = 165{,}56$, aproximadamente.

Si al cabo de 4 años el banco cambia su tasa al 6%, entonces la tasa trimestral será del 1,5%. Ahora bien, al cabo de los 4 años se ha formado un capital V_1 igual a

$$V_1 = 165{,}56 \cdot s_{\overline{16}|0,02} = \$\ 3.085{,}92$$

Este capital, capitalizado durante 6 años más arroja un valor final igual a $V_2 = 3.085{,}92 \cdot (1{,}015)^{24} = 4411{,}33$, es decir que faltan 10.000 – 4411,33 = \$ 5. 588,67.

Por lo tanto, la renta de los últimos 6 años deberá ser tal que capitalizada, a una tasa de interés de 0,015 trimestral arroje un valor final de \$ 5.588,67. La fórmula a plantear es la siguiente:

$$5.588{,}67 = c_1 \cdot s_{\overline{24}|,0,015}$$

que da como resultado una cuota de \$ 195,18. Claramente, la cuota debe ascender puesto que la tasa de interés es menor.

Resumiendo, el Sr. Martínez deberá pagar 16 cuotas de \$ 165.56 y luego 24 cuotas iguales a \$ 195,18.

Ejercicio 6.4

En este caso se desconoce el número n de cuotas y la tasa de interés r a la que está sujeta la renta. Los datos se relacionan según las fórmulas:

$$5.000 \cdot a_{\overline{n}|r} = 62.311,05171 \qquad \text{y} \qquad 5.000 \cdot (1+r) \cdot a_{\overline{n}|r} = 65.425,50430$$

siendo $a_{\overline{n}|r} = \dfrac{1-\nu^n}{r}$.

Despejando de ambas fórmulas $a_{\overline{n}|r}$ e igualando las expresiones resultantes, se tiene:

$$\frac{62.311,05171}{5.000} = \frac{65.425,50430}{5.000 \cdot (1+r)}$$

de donde resulta $r = 0{,}05 = 5\%$, aproximadamente, y $a_{\overline{n}|r} = 12{,}46221034$. Así,

$$\frac{1-(1{,}05)^{-n}}{0{,}05} = 12{,}46221034 \qquad \text{es decir} \qquad n = 20.$$

En resumen, la tasa es del 5% anual y la renta es de 20 cuotas.

Ejercicio 6.5

Se tiene una renta de cuotas constantes y vencidas de valor c = \$ 1.000. La tasa de interés mensual es del 3 %, es decir, $r = 0{,}03$. El valor final V_F se obtiene aplicando la fórmula $V_F = c \cdot s_{\overline{6}|0{,}03}$.

El cálculo a efectuar es:

$$1.000 \cdot s_{\overline{6}|0{,}03} = 1.000 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} = 1.000 \cdot 6{,}46841 = \$\ 6.468{,}41$$

es decir que el valor acumulado es de \$ 6.468,41.

Ejercicio 6.6

El valor del electrodoméstico es igual al valor del pago inicial sumado al valor actual de la renta. La tasa de interés mensual es $r = 0{,}27/12 = 0{,}0225 = 2{,}25\%$. La renta es de 8 cuotas vencidas, y la última cuota difiere de las siete primeras. Así, el valor actual de esta renta está dada por:

$$V_A = 160 \cdot a_{\overline{7}|0{,}0225} + 230 \cdot \frac{1}{1{,}0225^8} = 1218{,}14$$

Luego, el valor del electrodoméstico es \$ 1.400 + \$ 1.218,15, es decir \$ 1.618,14.

Ejercicio 6.7

Para comparar las tres ofertas se debe calcular el valor de cada una en un determinado momento, y elegir la de menor valor. Una posibilidad es calcular el valor al momento de hacer la compra.

Para el caso (a), el valor es \$ 40.000.

Para el caso (b), el valor en pesos es 19.000 + 5.000 · $a_{\overline{5}|0,04}$ = $ 41.259,11162, es decir que es menos conveniente que (a).

Para (c) hay una renta de cuotas anticipadas más un último pago. La tasa sobre la renta es del 2% trimestral, por lo que el valor del auto según esta oferta es 2.000 · 1,02·$a_{\overline{9}|0,02}$+25. 000· $\frac{1}{1,02^4}$ = $ 39.747,10.

Por lo tanto, la opción más conveniente es la (c).

Ejercicio 6.8

Para que las rentas sean equivalentes, el valor final al primer año de la renta de cuotas mensuales anticipadas debe ser de $ 8.000. La ecuación a plantear es entonces

$$8.000 = c \cdot 1{,}09 \cdot s_{\overline{12}|0,09}$$

donde *c* es el valor de la cuota mensual. Despejando *c* se obtiene *c* = $ 364,41

Ejercicio 6.9

Se trata de una renta de cuotas anuales vencidas de $ 20.000, diferida en 5 años. El valor presente está dado por:

$$V_A = \frac{1}{1{,}06^5} \cdot 20.000 \cdot a_{\overline{25}|0,06} = 191.049{,}3473$$

Capítulo 7

Ejercicio 7.1

El sistema de amortización aplicado es el francés, puesto que todas las cuotas son iguales. En primer lugar, se debe calcular el número de cuotas. Puesto que $V = c\ a_{\overline{n}|r}$, se tiene que

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{1.000.000}{162.745{,}40} = 6{,}1445669$$

que corresponde a n = 10.

Si el préstamo fue concedido hace 5 años, para cancelar la deuda el deudor deberá pagar la quinta cuota conjuntamente con el valor actual de las cinco cuotas restantes. Este último es igual a:

$$V_A^{(5)} = 162.745{,}40 \cdot a_{\overline{5}|0,1} = 616.933{,}11$$

<u>Conclusión</u>

El deudor deberá pagar $ 616.933,11 + $ 162.745,40 = $ 779.678,51.

Ejercicio 7.2

Para resolver este ejercicio no es necesario construir toda la tabla de amortización, aunque sí es una forma posible. Las soluciones son las siguientes:

1. Se obtiene resolviendo $c = V / a_{\overline{n}|r}$, para $V = 1.000.000$, $n = 4$ y $r = 0{,}1$. La respuesta es $c = 315.470{,}8037$.

2. Al comenzar el tercer año, se paga la segunda cuota, y se adeudan la tercera y cuarta cuota. Por lo tanto, el monto adeudado está dado por:

$$V_A^{(2)} = 315.470{,}8037 \cdot a_{\overline{2}|0,1} = \$\ 547.511{,}3122$$

3. Las cuotas de amortización reales están dadas por $v_i = c \cdot \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}}$. Por lo tanto, la tercera cuota de amortización real es:

$$v_3 = 315.470{,}8037 \cdot \frac{1}{(1{,}1)^2} = \$\ 260.719{,}6725$$

4. Las cuotas de interés son iguales a $s_i = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)^{4+1-i}})$. Por lo tanto, la cuarta cuota de interés es igual a:

$$s_4 = c \cdot (1 - \frac{1}{(1{,}1)}) = \$\ 28.679{,}16$$

5. El capital amortizado en los tres primeros años es igual al monto del préstamo menos la cuarta cuota de amortización. Dado que $v_4 = c - s_4$, entonces

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1.000.000 - (315.470{,}8037 - 28.679{,}16) = \$\ 713.208{,}3563.$$

Ejercicio 7.3

Se tiene que el valor de la i-ésima cuota de amortización es $v_i = c\,\nu^{\,n+i-1}$, con $\nu = 1/1{,}1$, donde n es el número de cuotas y c es el valor de la cuota total. Por lo tanto, la última cuota de amortización está dada por $v_n = c \cdot \nu$. Conocido el valor de v_n, es posible obtener el valor de c :

$$c = \frac{v_n}{\nu} = 1.479{,}504 \cdot 1{,}1 = \$\ 1.627{,}4544$$

El valor del préstamo se relaciona con el valor de la cuota por la fórmula $V = c \cdot a_{\overline{n}|r}$, de donde puede despejarse el valor de $a_{\overline{n}|r}$:

$$a_{\overline{n}|0,1} = \frac{10.000}{1.627{,}4544} = 6{,}1445$$

Esto dice que:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{(1{,}1)^n}}{0{,}1} &= 6{,}1445 \\ 1 - 0{,}61445 &= \frac{1}{(1{,}1)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1{,}1)^n &= \frac{1}{0{,}38555}\\ n\log(1{,}1) &= -\log(0{,}38555)\end{aligned}$$

A este punto, puede utilizarse un logaritmo de cualquier base. Para el caso del logaritmo natural se obtiene $c = \frac{-0{,}9530}{0{,}0953} = 10$. Es decir que el número de cuotas de la anualidad es $n = 10$.

Ejercicio 7.4

Para resolver este ejercicio puede confeccionarse el cuadro de amortización y buscar los datos pedidos en el problema, o bien utilizar las fórmulas correspondientes que se derivaron en este capítulo. Es conveniente utilizar la segunda alternativa ya que implica menor número de cálculos y en consecuencia es menor el tiempo de resolución y disminuye la probabilidad de error en las cuentas.

Se trata de un sistema de amortización alemán, ya que las cuotas de amortización son constantes.

Esto indica que cada cuota de amortización es igual a la décima parte del préstamo: $v_i = 1.000$, para $i = 1, 2, \ldots, 10$. La capitalización es semestral, por lo que la tasa de interés por semestre es

$$r = \frac{r^{(2)}}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 = 5\%$$

El pago del octavo semestre es la suma de la cuota de amortización más los intereses sobre el saldo adeudado. Con la séptima cuota se habrán pagado \$ 7.000 del préstamo, por lo que el saldo es de \$ 3.000. Esto implica que en el octavo semestre se pagará una cuota de interés igual a $s_8 = 3.000 \cdot 0{,}05 = 1.500$. Por lo tanto el pago será de \$ 1.000 + \$ 1.500 = \$ 2.500.

El capital adeudado luego de pagar la segunda cuota es 8/10 del préstamo, es decir \$ 8.000.

Ejercicio 7.5

En este caso se trata de un sistema de amortización francés con tasa mensual del 1,25 %. Cada cuota tiene un valor $c = 85.000/a_{\overline{18}|0{,}0125} = \$\ 5.302{,}71$.

a) El Sr. Domínguez no ha pagado la cuota 10, y de la cuota 11 sólo paga los intereses. Eso significa que al momento del pago de la cuota 12 adeuda:

1. una cuota $c = v_{10} + s_{10}$, correspondiente a la cuota 10, de dos meses atrás,
2. la cuota v_{11} de un mes atrás,
3. la cuota 12.

Lo adeudado en las cuotas 10 y 11 debe ser capitalizado dos meses y un mes, respectivamente;por lo que se deberá pagar sobre esta deuda la cantidad $c \cdot 1{,}0125^2 + v_{11} \cdot 1{,}0125$. Usando que $v_i = c \cdot \nu^{n+1-i}$, siendo n el número de cuotas y $\nu = 1/1{,}0125$, se tiene que la deuda es de

$$5.302{,}71 \cdot (1{,}0125^2) + 5.302{,}71 \cdot \frac{1}{1{,}0125^{16-11}} = 10.352{,}46$$

es decir de \$ 10.352,46.

Por otro lado, corresponde pagar también la cuota 12, cantidad que debe sumarse a lo anterior.

Así, para regularizar su deuda, el Sr. Domínguez debe pagar 10.352,46 + 5.302,71 = \$ 15.655,17.

b) Si en cambio el Sr. Domínguez desea disminuir el valor de las cuotas 10 a 18 en un 10 %, entonces junto con la cuota 9 deberá pagar el valor actual del 10% de la anualidad restante, o lo que es lo mismo, el 10% de dicho valor actual. Como restan pagar 9 cuotas, el valor actual de la anualidad restante es $V^{(9)} = 5.302{,}71 \cdot a_{\overline{9}|0{,}0125} = 44.873{,}36$, por lo cual el Sr. Domínguez deberá hacer un pago extraordinario de \$ 4.487,34.

Ejercicio 7.6

Dado que las cuotas decrecen en progresión aritmética, se trata de un sistema de amortización alemán. La razón de la progresión es $h = -200$, y a su vez $h = -r \cdot X/n$, donde $r = 0{,}08$ y $n = 10$. Por lo tanto

$$X = \frac{10 \cdot 200}{0{,}08} = \$\ 25.000$$

Las componentes del cuadro de amortización en el séptimo año son:

1. cuota de amortización: $v_7 = 25.000/10 = \$\ 2.500$;
2. cuota de intereses: $s_7 = 4 \cdot 2.500 \cdot 0{,}08 = \$\ 800$;
3. cuota total: $c_7 = v_7 + s_7 = \$\ 3.300$;
4. saldo adeudado: $V^{(7)} = 3 \cdot 2.500 = \$\ 7.500$.

Ejercicio 7.7

Este caso tiene la particularidad de no tener cuotas equiespaciadas en el tiempo. Por lo tanto no pueden emplearse las fórmulas que se derivaron para el sistema alemán, y conviene entonces construir un cuadro de amortización.

Las cuotas de amortización son de \$ 1.000, así que las cuotas de intereses serán sobre \$ 3.000 la primera, sobre \$ 2.000 la segunda y sobre \$ 1.000 la tercera.

Las tasas equivalentes al 2% cada 30 días son: a) del $(1{,}02)^3 - 1 = 0{,}061$ a 90 días, b) del $(1{,}02)^{31/30} - 1 = 0{,}0206$ a 31 días y c) $(1{,}02)^{32/30} - 1 = 0{,}0213$ a 32 días. Estas tasas serán las que se aplicarán sobre el saldo adeudado a lo largo de los tres períodos, respectivamente:

Cuadro C.4

Tabla de valores de r / $((1 + r)^n - 1) / r$

Pago a los	Capital adeudado a l comienzo del período	Intereses a pagar	Amortizació real a pagar	Cuota a pagar
90 días	$ 3.000	$3.000 \cdot 0{,}061 = 183$	$ 1.000	$ 1.183
121 días	$ 2.000	$2.000 \cdot 0{,}0206 = 41{,}20$	$ 1.000	$ 1.041,20
153 días	$ 1.000	$1.000 \cdot 0{,}0213 = 21{,}30$	$ 1.000	$ 1.021,30

Capítulo 8

Ejercicio 8.1

a) Para comparar debemos calcular el valor actual de ambas posibilidades: en el caso del pago al contado su valor actual es $ 10.000. En la segunda opción tenemos que la tasa de descuento semestral es del 7,5 %, entonces:

$$VA = 5.000 + 2.500(1{,}075)^{-1} + 2.500(1{,}075)^{-2} + 2.500(1{,}075)^{-3} = \$\ 11.501{,}31$$

Vemos que la segunda opción será preferible ya que nos da un mayor valor actual.

b) En este caso la tasa de descuento semestral es del 12% y debemos recalcular el valor de la segunda opción:

$$VA = 5.000 + 2.500(1{,}12)^{-1} + 2.500(1{,}12)^{-2} + 2.500(1{,}12)^{-3} = \$\ 11.004{,}58$$

En este caso seguimos prefiriendo la segunda opción.

Ejercicio 8.2

a) Si llamamos r a la tasa de descuento semestral que hace equivalentes a ambas ofertas, tenemos la ecuación:

$$10.000 = 5.000 + 2.500(1 + r)^{-1} + 2.500(1 + r)^{-2} + 2.500(1 + r)^{-3}$$

Vemos entonces que r corresponde a la TIR del flujo (—5.000, 2.500, 2.500, 2.500), esto es, 23,3752% .

b) En este caso si llamamos P al pago inicial tenemos la ecuación:

$$10.000 = P + 2.500(1{,}12)^{-1} + 2.500(1{,}12)^{-2} + 2.500(1{,}12)^{-3} = P - 5.000 + 11.004{,}58$$

De donde obtenemos: $P = \$\ 3.995{,}42$

Ejercicio 8.3

Un bono de \$ 100 como en el ejemplo, cuando es comprado por su valor nominal produce el flujo (−100, 7, 7, 107). Si lo compramos al 50% tendremos el flujo (−50, 7, 7, 107). Debemos calcular la TIR de este flujo y eso nos da $r = 37{,}45\%$

Ejercicio 8.4

a) El cálculo de la TIR no cambiará si dividimos todos los términos del flujo de caja de la inversión por 100. Así basta calcular la TIR del flujo:

$$(-100, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

Que da como resultado 5% semestral.

b) En este caso tenemos el flujo:

$$(-90, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

que tiene una tasa interna de retorno de 5,8621 %.

c) Aquí calculamos la TIR del flujo:

$$(-105, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 105)$$

que da 4,6112 %.

Ejercicio 8.5

a) Podemos calcular la cuota con la fórmula: $c = 100.\,000 / ((1 - 1{,}05^{-20}) / 0,\,05)$. Esto nos da $c = 8024,\,26$

b) Si usamos la ecuación $R_k = c(1 - (1 + r)^{k-n})/r$ que fue desarrollada en el texto, tenemos:

$$R_6 = 8.024{,}26(1 - 1{,}05^{-14})/0{,}05 = 79.429{,}26$$

por lo tanto después de pagar la sexta cuota debemos aún \$ 79.429,26.

c) Para obtener el usufructo U_6 usaremos las ecuaciones desarrolladas en el texto:

$$\begin{aligned} U_6 + N_6 &= c\sum_{j=1}^{20-6}(1+0,03)^{-j} \\ \frac{0,03}{0,05}U_6 + N_6 &= R_6 \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que la tasa semestral de mercado es de 3 %. Reemplazamos c y R_6 por los valores obtenidos en el inciso anterior y restamos miembro a miembro las igualdades y obtenemos:

$$(1-\frac{0,03}{0,05})U_6 = 8024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,03)^{-j} - 79.429,26$$

Así tenemos que U_6 = 2,5(8024,26 × 11,296 − 79.429,26) = $ 28.033,40 es el usufructo buscado.

d) En este caso, consideramos la fórmula usada en el inciso anterior y realizamos el cambio de 0,03 por 0,075% :

$$(1-\frac{0,075}{0,05})U_6 = 8.024,26\sum_{j=1}^{14}(1+0,075)^{-j} - 79.429,26$$

Entonces tenemos que U_6 = −2(8.024,26 × 8,49 − 79.429,26) = $ 22.620,18 es el usufructo buscado.

Ejercicio 8.6

Si desarrollamos una suma del tipo de la tratada, se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-k}(a_{j-1}-a_j)b^{-j} &= a_0b^{-1}+a_1(b^{-2}-b^{-1})+a_2(b^{-3}-b^{-2})+\cdots-a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1}+a_1b^{-2}(1-b)+a_2b^{-3}(1-b)+\cdots-a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1}-(b-1)(a_1b^{-2}+a_2b^{-3}+\cdots+a_{n-k-1}b^{k-n})-a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1}-(b-1)\sum_{j=2}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0b^{-1}b-a_0b^{-1}b+a_0b^{-1}-(b-1)\sum_{j=2}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n} \\
&= a_0-(b-1)\sum_{j=1}^{n-k}a_{j-1}b^{-j}-a_{n-k}b^{k-n}
\end{aligned}$$

Ahora usamos $a_l = R_{k+l}$ y $b = 1 + r_m$ y tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - r_m\sum_{j=1}^{n-k}R_{k+j-1}(1+r_m)^{-j} - R_n(1+r_m)^{k-n}$$

Usando que $R_n = 0$ se tiene el primer resultado. Por otra parte usando la igualdad $A_{k+j} = R_{k+j-1} - R_{k+j}$ y la definición de N_k tenemos:

$$N_k = \sum_{j=1}^{n-k}A_{k+j}(1+r_m))^{-j} = \sum_{j=1}^{n-k}(R_{k+j-1}-R_{k+j})(1+r_m)^{-j} = R_k - \frac{r_m}{r}\sum_{j=1}^{n-k}rR_{k+j-1}(1+r_m)^{-j}$$

así obtenemos la ecuación $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$.

Ejercicio 8.7

Primero usamos la fórmula para la nuda propiedad con n = 84, k = 24, c = 100, r = 0,01, r_m = 0,005:

$$
\begin{aligned}
N_{24} &= 100(1,01)^{-61}\sum_{j=1}^{60}\left(\frac{1,01}{1,005}\right)^j \\
&= \$\,3.818,45
\end{aligned}
$$

Con la ayuda podemos calcular $R_{24} = \frac{100(1-(1+0,01)^{24-84})}{0,01} = 4.495,50$. De la fórmula $N_k = R_k - \frac{r_m}{r}U_k$, , probada en el ejercicio anterior, tenemos:

$$
\frac{0,005}{0,01}U_{24} = R_{24} - N_{24} = 4.495,50 - 3.818,45 = \$\ 677,05
$$

Luego U_{24} = \$ 1.354,10 es el usufructo.

Ejercicio 8.8

Sabemos que el número de cuotas pagadas k cumple $3252,13 = R_k = \frac{100(1-1,0125^{k-60})}{0,0125}$. Luego, $1 - 1,0125^{k-60} = 3.252,13/8000$, es decir, $1,0125^{k-60} = 1 - 3.252,13/8.000$. Entonces $k - 60 = \log(1 - 3.252,13/8.000)/\log(1,0125) = -42$.

Por lo tanto $k = 60 - 42 = 18$ y nos quedan por pagar 42 cuotas.

Capítulo 9

Ejercicio 9.1

Como vimos en el ejemplo 9.1 la tasa buscada es independiente del valor del crédito. En este caso la tasa de interés mensual es de $r_m = 20/12\%$ y la correspondiente tasa anual será:

$$
r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/60)^{12} - 1 = 21,94\%
$$

Ejercicio 9.2

Este casos es similar al anterior con $r_m = 15/12\%$. Entonces la tasa anual será:

$$
r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = (1 + 1/80)^{12} - 1 = 16,08\%
$$

Ejercicio 9.3

El interés total que pagaremos es $12 \times 2.000/100 = 240$. Este se suma al monto del crédito y se reparte en 12 cuotas iguales de $c = (2,000 + 240)/12 = \$\ 186,67$.

Sabemos que en el sistema francés con tasa mensual r tenemos $cA_{\overline{12}|r} = 2.000$. Luego debemos resolver la ecuación

$$
A_{\overline{12}|r} = 2.000/186,67
$$

de la cual resulta $r = 1,79\%$ que corresponde a una tasa anual de 21,45 %.

Ejercicio 9.4
En este caso pagamos un interés total de $ 100 y al repartirlo en diez cuotas estas tendrán un valor de c = 1.100/10 = 110. Para ver la tasa equivalente resolvemos la ecuación

$$A_{\overline{10}|r} = 1.000/110$$

de donde r = 1,77% que corresponde a una tasa anual de 21,26 %.

Ejercicio 9.5
Un rápido cálculo nos indica que si depositamos $ 500.000 al 12% anual obtendremos una renta de $ 5.000 por mes y al cabo de 200 meses seguiremos siendo dueños de los $ 500.000 de capital. Luego nos conviene la oferta contado.

Ejercicio 9.6
En realidad recibimos $ 2.000 – $ 200 = $ 1.800 a pagar en 10 cuotas de $ 200. para calcular la tasa mensual equivalente resolvemos:

$$A_{\overline{10}|r} = 1.800/200$$

lo cual da r = 1,96% y la tasa anual correspondiente será de 23,55 %.

Ejercicio 9.7
El interés que nos descuentan es 1.000 × 12/100 = $ 120. Entonces recibimos $ 880 y lo pagamos en cuotas iguales de $ 83,33. Resolvemos entonces $A_{\overline{12}|r} = 880/83,33$, de donde obtenemos una tasa mensual r = 2,02% que corresponde a una tasa anual del 24,24 %.

Ejercicio 9.8
Calculamos el valor de la cuota $c = 1.000/A_{\overline{12}|0,01} = 88,85$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de $ 1.000 – $ 88,85 = $ 911,15 pagadero en 11 cuotas de $ 88,85. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{11}|r} = 911,15/88,85$, lo cual da 1,18% mensual o 14,25% anual.

Ejercicio 9.9
Calculamos el valor de la cuota $c = 3.000/A_{\overline{24}|(1/120)} = \$\ 138,43$. Ahora calculamos la tasa correspondiente a un préstamo de 3.000 – 138,43 = $ 2.861,57 pagadero en 23 cuotas de 138,43. Para esto resolvemos la ecuación: $A_{\overline{23}|r} = 2.861,57/138,43$, lo cual da 0,90% mensual o 10,90% anual.

Ejercicio 9.10
El pago p que realizamos es

$$p = 1.000.000(1 + 10/1200)^{-240} = \text{U\$S } 136.461,51$$

Ejercicio 9.11
El estudiante recibe $p = 1,5 - (10/100)1,5 = 1,35$ y deberá devolver 1,5 rublos. Por lo tanto el interés mensual r satisface la ecuación $(1 + r)1,35 = 1,5$, de donde

$$r = 1,5/1,35 - 1 = 0,1111$$

es decir un 11,11% mensual.

Ejercicio 9.12
Nos acreditarán 300(5/121) = $ 12,40.

Ejercicio 9.13
Recordemos que si gastamos $ 100 en enero, $ 2 correspondieron a pan y $ 1 a leche fluida. En febrero gastamos $ 4 en pan y $ 1,50 en leche. Si el resto se mantuvo igual, el total del gasto fue $ 102,5 ($ 2 más en pan y 50 ctvs. más en leche). El valor del índice de febrero es entonces 102,5.

Capítulo 10

Ejercicio 10.1
Para calcular la probabilidad de que sumen 7, listamos los casos favorables:

(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)

esto da un total de 7 casos favorables sobre un total de 36 posibles. Entonces tenemos una probabilidad $p = 7/36$ de obtener el 7.

Para calcular la probabilidad de obtener un número par, en lugar de listar todos los casos favorables, razonamos que tenemos las siguientes posibilidades para los dos dados: (par, par); (impar, impar); (impar, par) y (par, impar). De estas, sólo las dos primeras producen resultado par. Como cada dado tiene tres caras pares y tres impares, el número de casos favorables es de $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$. Entonces, tenemos una probabilidad de $18/36 = 0,5$ de obtener un resultado par.

Ejercicio 10.2
Tenemos 12 figuras, 3 por cada uno de los cuatro palos. Luego la probabilidad de dar vuelta una figura será de $12/52 \sim 0,23$

Ejercicio 10.3
Si sale el 48 obtenemos una ganancia de $69 = 70 - 1$ y esto ocurre con una probabilidad de 1/100. Si no sale perdemos un peso, y esto ocurre con probabilidad 99/100. El resultado esperado en 100 veces es ganar una vez 69 y perder 1 las restantes 99. Así ter-

minaríamos con: $69 - 99 = -30$, es decir, una pérdida de \$ 30 es lo que esperamos. En el caso de tres cifras tenemos una probabilidad de 1/1.000 de ganar 499 y 999/1.000 de perder un peso. En 100 juegos tenemos un valor esperado de $100(499 \times 1/1.000 + (-1)999/1.000) = -50$, esto es, esperamos una pérdida de \$ 50.

Ejercicio 10.4

Si la apuesta tiene un costo de $\$c$, obtenemos $70 - c$ con una probabilidad de 1/100 y perdemos c con probabilidad 99/100. El valor esperado es entonces $V = (70 - c)/100 - c\,99/100 = 70/100 - c$. El valor justo es el que hace cero a V, por lo tanto $c = 70/100$ o 70 centavos.

Ejercicio 10.5

En este caso obtenemos $500 - c$ con una probabilidad de 1/1.000 y perdemos c con una probabilidad de 999/1.000. Así el valor esperado V es $(500 - c)/1.000 - c\,999/1.000 = 500/1.000 - c$. De aquí obtenemos que $c = 0{,}5$ es el valor justo que anula el valor esperado de la ganancia.

Ejercicio 10.6

Si jugamos un peso al 13 ganamos 35 pesos si sale, lo cual tiene una probabilidad de 1/37 y perdemos un peso con probabilidad 36/37. Por lo tanto el valor esperado de la apuesta es:

$$V = 35 \times 1/37 - 1 \times 36/37 = -1/37$$

Por lo tanto en 100 jugadas esperamos una pérdida de alrededor de \$ 100/37.

En el caso de jugar a rojo tenemos una ganancia de un peso con probabilidad 18/37 y una pérdida de un peso con probabilidad 19/37, así tenemos:

$$V = 1 \times 18/37 - 1 \times 19/37 = -1/37$$

de donde la pérdida esperada en 100 jugadas es igual a la anterior: $100/37 \sim 2{,}70$.

Ejercicio 10.7

Planteamos la ecuación:

$$(36 - c) \times 1/37 - c \times 36/37 = 0$$

de donde $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.8

En este caso la ecuación a resolver es:

$$(2 - c) \times 18/37 - c \times 19/37 = 0$$

por lo tanto $c = 36/37 \sim 0{,}97$

Ejercicio 10.10

Si el 20 de febrero la acción vale \$ 16 o \$ 20, perdemos los \$ 2 pagados por la opción. Si la acción vale \$ 23 utilizamos la opción la compramos a \$ 20 y la vendemos a \$ 23 con lo cual ganamos \$ 3, pero hay que restar los dos pesos pagados por la opción y se tiene una ganancia neta de \$ 1.

Ejercicio 10.11

Si la acción vale \$ 13, perdemos \$ 1,20 pagados por la opción. Si vale \$ 16 ganamos un peso pero al restarle \$ 1,20 el resultado neto es una pérdida de 20 centavos. En el caso que la acción valga \$ 20 tendremos una ganancia de \$ 5 al hacer uso de la opción y una ganancia neta de \$ 3,80 al restar el costo de la opción.

Ejercicio 10.12

Definamos $E(V_2 - K)^- = E(V_2 - K) - E(V_2 - K)^+$ y recordemos que $E(V_2 - K) = E(V_2) - K$. Observemos que al igual que en el ejemplo 10.13

$$E(V_2-9)^- = (10(1-p)^2-9)(1-p)^2 = (10(1-p)^2-10)(1-p)^2+(1-p)^2 = E(V_2-10)^-+(1-p)^2$$

Luego

$$E(V_2-9)^+ = E(V_2-9) - E(V_2-9)^- = E(V_2-10)+1-E(V_2-10)^- - (1-p)^2 = E(V_2-10)^+ + p(2-p)$$

En el ejemplo citado se obtuvieron los valores: $E(V_2 - 10)^+ = (6r + 2)^2/2$ y $p = \frac{6r+2}{5}$, así:

$$\begin{aligned} E(V_2-9)^+ &= \frac{(6r+2)^2}{2} + (\frac{6r+2}{5})(2 - \frac{6r+2}{5}) \\ &= (6r+2)(\frac{(6r+2)}{2} + \frac{1}{5}(2 - \frac{6r+2}{5})) \\ &= (6r+2)(\frac{23(3r+1)}{25} + \frac{2}{5}) \\ &= \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11) \end{aligned}$$

Por lo tanto $c = \frac{6}{25}(3r+1)(23r+11)(1+r)^{-2}$.

Capítulo 11

Ejercicio 11.1

Toda función cuyo crecimiento porcentual por unidad en x es constante, es una función exponencial. Como además $q^s = e^{s\ln(q)}$, entonces cualquier función exponencial se puede escribir de la forma

$$f(x) = a\, e^{r\,x}$$

para algún a y algún $r > 0$, ambos positivos puesto que $f(0)$ es positivo y además $f(x)$ es creciente.

Como $f(x+1) = a\, e^{r\,(x+1)} = f(x)\, e^r$, y $f(x)$ crece un 25% por unidad en x, debe cumplirse

$$e^r = 1{,}25$$

es decir, $r = \ln(1{,}25) = 0{,}2231$.

El valor de a puede calcularse a partir del dato $f(0) = 0{,}5$, y usando que $f(0) = a$. Por lo tanto la solución es

$$f(x) = 0{,}5\; e^{0;2231\, x}$$

Ejercicio 11.2

Este caso es similar al del Ejercicio 11.1, sólo que se trata de una exponencial decreciente. Por lo tanto $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = a\, e^{r\,x}$$

con $a = 3$ pues $f(0) = 3$, y $r < 0$ ya que $f(x)$ es decreciente; decrece un 20% cada dos unidades. Esto indica que $f(x + 2) = 0{,}80\, f(x)$ y también $f(x + 2) = f(x)\, e^{2\,r}$, luego debe ser $e^{2\,r} = 0{,}80$, es decir

$$r = \frac{\ln(0{,}8)}{2} = -0{,}1115$$

La solución es entonces:

$$f(x) = 3\; e^{-0{,}1115\, x}$$

Ejercicio 11.3

La tasa de interés nominal anual es $r = 0{,}059$. Por lo tanto, si se deposita un capital inicial C, el monto obtenido en t años será $C(t) = C\, e^{0{,}059\, t}$. En este caso, la incógnita es C, la cantidad de años es $t = 5$ y el monto final es $C(5) = 12.\,000$. Por lo tanto

$$C = \frac{12.000}{e^{0{,}059\,5}} = \$\ 8.934{,}38$$

es decir que se deberá realizar un depósito inicial de \$ 8.934,38.

Ejercicio 11.4

Si la capitalización es diaria y con un año de 360 días, entonces la tasa equivalente anual está dada por

$$(1 + \frac{0{,}063}{360})^{360} - 1 = 0{,}065021$$

Si la capitalización es continua, entonces la tasa equivalente anual es $e^{0{,}063} - 1 = 0{,}065026$.

Como puede observarse, una capitalización diaria produce un interés muy cercano al de una capitalización continua, y por lo tanto el monto al cabo de un año por un capital de 3.000 será muy similar. En efecto:

para la capitalización diaria:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065021 = 3.195{,}063$$

para la capitalización continua:

$$C = 3.000 \cdot 1{,}065026 = \$\ 3.195{,}078$$

Apéndice A

Ejercicio A.1

Se ubica en un casillero distinto de los que se pretende sumar y se escribe $= SUMA(B2 : K2)$

Ejercicio A.2

Para escribir una tabla de valores de $A^{-1}_{\overline{n}|r}$, para $r = 0{,}005 + j0{,}00125$, con $0 \leq j \leq 10$ y $1 \leq n \leq 30$ podemos efectuar los mismos pasos que en la sección 1 y a continuación escribimos el valor 1,625 en la celda K1 y el 1,75 en la celda L1. Una vez hecho esto podemos usar la función de autorrelleno horizontal para rellenar las celdas K2 y L2 partiendo desde la J2 y repetir esto para todas las filas hasta la 31 donde llenamos K31 y L31 a partir de J31. Así obtenemos la tabla requerida.

Ejercicio A.3

Llenamos la fila 1 desde A1 hasta Q1 y la fila 2 desde A2 hasta Q2 de la misma forma que en el ejemplo de la sección 2. También en C3 escribimos el valor nominal con un signo menos, es decir −10.000. A continuación en la columna B desde la celda B5 hasta la celda B12 escribimos el flujo de pagos del bono: 700; 700; 700; 700; 700; 700; 700; 10.700. Usando el autorrelleno horizontal lo extendemos hasta la columna Q. En la celda B4 ponemos la fórmula $= \$A\$3 * B1$ y usando autorrelleno horizontal la extendemos hasta la columna Q.

Finalmente podemos completar la fila correspondiente a la tasa interna de retorno. Escribimos en la celda B2:

$$= \mathrm{TIR}(B4 : B12)$$

y usamos el autorrelleno horizontal hasta la celda Q2.

Apéndice B

Ejercicio B.1

Seguimos los pasos del Ejemplo B.3 y obtenemos la siguiente sucesión:

CMPD ▽ 120 EXE 11 EXE 100000 EXE ▽ 0 EXE 12 EXE 12 EXE ∆∆∆ SOLVE