Movimientos lineales básicos

Capítulo
5

A esta altura tenemos las herramientas necesarias para analizar cualquier movimiento, y además hemos visto algunos ejemplos. Podemos analizar específicamente detalles de los movimientos más simples y típicos, tanto para conocerlos como para lograr una comprensión mejor y más profunda sobre el significado de estas leyes.

5.1. Discusión general básica

Vimos en muchos ejemplos cómo la rapidez del movimiento depende de la fuerza resultante a lo largo del mismo, mientras que la curvatura de la trayectoria, cuando la hay, depende de la fuerza resultante en la dirección transversal.

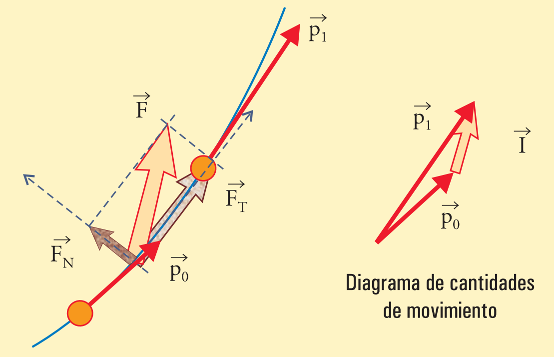


Fig. 5.1. Caso de un intervalo con componente tangencial de la fuerza resultante en el mismo sentido del movimiento. La rapidez *aumenta*. Además se muestra una componente normal de la fuerza desviando el movimiento hacia la izquierda.

Apoyándonos en la independencia de las acciones en las diferentes direcciones del espacio, juntaremos todos los elementos para tratar cualquier caso general.

Denominaremos *tangencial*, e indicaremos con el subíndice T, a la dirección del movimiento en cada instante, es decir a la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto correspondiente, y *normal*, o *transversal*, (indicada con el subíndice N) a la dirección perpendicular a la anterior en cada instante.

Las figuras 5.1, 5.2, y 5.3, ilustran varios casos. En ellas, se eligió un intervalo supuesto de duración suficientemente corta como para que la fuerza resultante sea más o menos constante en él. Dicha fuerza resultante está indicada con un vector hueco, y descompuesta según las direcciones tangencial (T) y normal (N). En cada figura se agrega un diagrama de cantidades de movimiento correspondiente al intervalo considerado, que ilustra la aplicación de la Ley del Impulso a la situación.

En todos los casos, la trayectoria se curva hacia donde apunta la componente normal de la fuerza aplicada. El vector impulso (representado también con una flecha hueca en cada diagrama de cantidades de movimiento) tiene tamaño proporcional y exactamente la

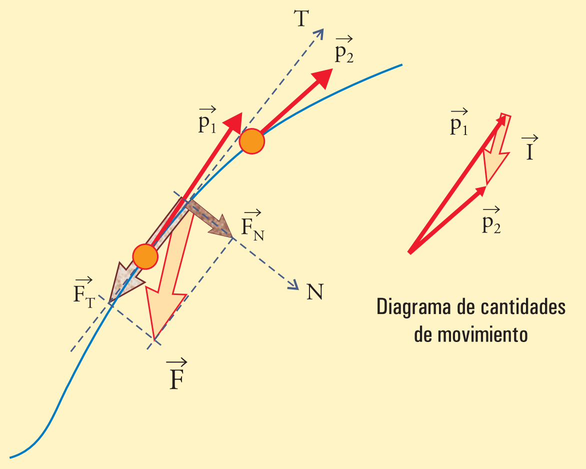


Fig. 5.2. Caso de un intervalo con componente tangencial de la fuerza resultante en sentido opuesto al movimiento. La rapidez *disminuye*. Además se muestra una componente normal de la fuerza desviando el movimiento hacia la derecha.

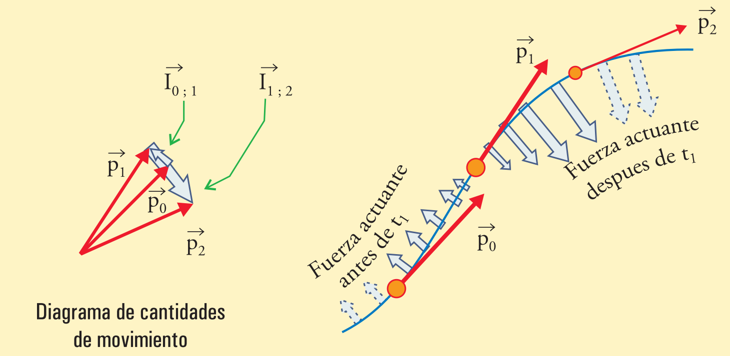


Fig. 5.3. Caso en que la trayectoria se recorre uniformemente. Sólo existe fuerza resultante normal actuando de manera de lograr la curvatura o desviación del movimiento.

misma dirección y sentido, que la fuerza resultante dibujada sobre la trayectoria.

La ley del impulso para las fuerzas tangenciales

Si adoptamos el criterio (arbitrario pero usual y conveniente) de elegir como *positivo el sentido del movimiento*, podremos hablar siempre de p_T y v_T positivos, es decir que p_T será igual al módulo de $\vec{p}$, y correspondientemente v_T será lo mismo que el módulo de $\vec{v}$ (recordar que $\vec{v}$ y $\vec{p}$ no tienen componente normal).

Con esta convención nunca tendremos el caso de p_T o v_T negativos, y consideraremos positivas las fuerzas tangenciales hacia adelante, y negativas hacia atrás.

En estas condiciones, el principio fundamental de la dinámica, escrito para la componente tangencial, dirá:

$$\begin{aligned} F_T\Delta t &= \Delta v \\ &= m\Delta v \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Expresión que indica directamente lo que sucede con el módulo de p o de v (módulos de $\vec{p}$ y $\vec{v}$), a partir de características de la componente tangencial de las fuerzas aplicadas.

Por ejemplo digamos que, si $F_T>0$, es decir hacia adelante, entonces $\Delta p>0$, lo que significa que *el módulo de $\vec{p}$, o de $\vec{v}$, aumenta*. Y viceversa, $F_T<0$ significará *hacia atrás con respecto al movimiento*, y entonces $\Delta p<0$, indicará que *el módulo de p, o de v, disminuye*, o sea que F_T está frenando al móvil.

La ley del impulso para las fuerzas normales

Consideremos un movimiento en el cual actúa una fuerza estrictamente normal, es decir, sin componente tangencial, de manera que la trayectoria se desvía un ángulo $\Delta\theta$ en un lapso Δt, sin que cambie la rapidez del movimiento.

Ya sabemos que para lograr esto la fuerza debe ir continuamente cambiando de dirección para mantenerse siempre perpendicular a la trayectoria, y sólo falta averiguar el módulo necesario para producir cierta desviación. En la próxima figura analizamos los vectores para un ángulo $\delta\theta$, que se supone suficientemente pequeño como para poder ignorar el cambio en la dirección de F , así obtendremos el módulo de la fuerza en ese instante; luego la fuerza se mantiene aplicada con ese mismo módulo todo el tiempo que sea necesario para completar la desviación $\Delta\theta$ que se quiera.

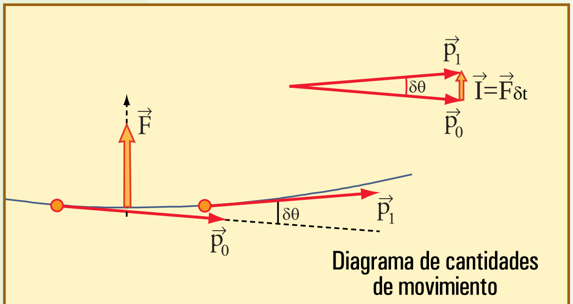


Fig. 5.4. Esquema para calcular la fuerza normal capaz de producir una desviación.

En la figura no se puede mostrar el ángulo tan pequeño como debería ser, pero es posible imaginarlo, y en esas condiciones, en el diagrama vectorial de la derecha vale (recordar que el valor de un ángulo expresado en radianes, es el cociente del arco sobre el radio, y en el caso de ángulo muy pequeño queda un pequeño triangulito en el cual el arco es lo mismo que el lado pequeño):

$$\delta\theta = \frac{F\,\delta t}{p} \qquad (5.2)$$

De aquí podemos despejar el valor que debe tener la fuerza para lograr esta desviación:

$$F = p\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$= p\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (5.3)$$

Si denominamos *velocidad angular*, ω, a la desviación por unidad de tiempo, tenemos otras expresiones útiles:

$$\boxed{\begin{array}{l} F = \omega\, p \\ F = m\,\omega\, v \end{array}} \qquad (5.3')$$

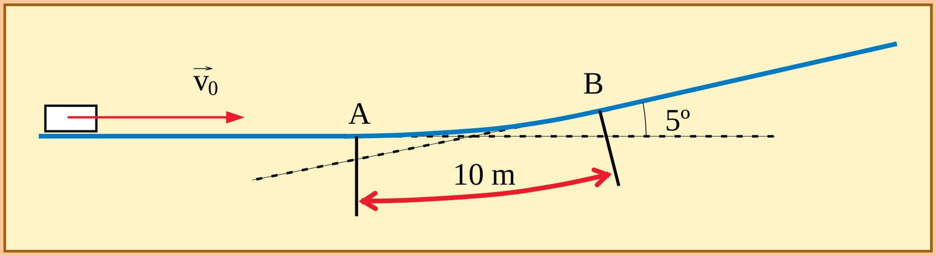
En donde $\omega = \delta\theta/\delta t$, o, en valores medios, $\Delta\theta/\Delta t$, es la velocidad angular.

Ejemplo 1

Un automóvil de 1.000 kg (incluida la masa de los ocupantes) viaja por una carretera rectilínea horizontal a razón de 20 m/s. En el punto A la carretera se curva suavemente hacia arriba, de manera que 10 m más adelante, en el punto B, continúa en línea recta con pendiente positiva, formando 5° con la horizontal.

Suponga para tener valores aproximados que las fuerzas de rozamiento valen unos 1.500 N = 1,50 kN, redondeando a tres cifras significativas, ya que más no tendría sentido.

Calcule la reacción normal del piso mientras el automóvil viaja horizontalmente, inmediatamente después de pasar por A, y después de B, mientras viaja en línea recta por la pendiente. ¿Qué sentirían los pasajeros?



Desarrollo

En el tramo horizontal de la pista, dado que el automóvil viaja con velocidad constante, todas las fuerzas están equilibradas, y la resultante es nula. En particular, en la dirección vertical tenemos el peso (P = m g)
(P = 9.800 N)
equilibrado con la reacción normal del piso, que por lo tanto debe valer 9,80 kN. Y en la dirección horizontal tenemos el rozamiento de 1,50 kN equilibrado con la fuerza impulsora aplicada por el piso a las ruedas motrices (reacción a la acción hacia atrás de estas ruedas sobre el piso) también de 1,50 kN.

El equilibrio también vale para el tramo posterior a B, en el cual habrá dos cambios:

- En la dirección tangencial habrá una componente tangencial del peso, $P_T \cong 9{,}80 \times \text{sen}5°$
  $P_T \cong 0{,}854$ kN,

Ya sabemos que el efecto de las fuerzas tangenciales es independiente de la presencia o ausencia de fuerzas las normales, y viceversa. Así es que los cálculos que hay que hacer para aplicar la ley del impulso para las fuerzas tangenciales en casos de trayectorias curvas (en las cuales además hay fuerza normal resultante) son exactamente los mismos que se han mostrado en los casos de movimientos rectilíneos (sin fuerza normal resultante).
Por ello en este momento podemos prescindir de ejemplos de aplicación de la ley del impulso tangencial, y en cambio sí es interesante analizar el siguiente ejemplo de aplicación de ley del impulso para las fuerzas normales.

que deberán ser compensados con un aumento de 0,854 kN en la fuerza motriz, que deberá pasar a valer 1,50+0,85 = 2,35 kN.

• En la dirección normal, las fuerzas tendrán una leve disminución, ya que

$P_N \cong 9{,}80 \times \cos 5^o$

$P_N \cong 9{,}76$ kN

(dado que la pendiente es pequeña, la disminución resulta casi imperceptible, del 0,4 %).

Pero en la curva debe haber una resultante no nula, que debe ser normal, hacia arriba, para lograr la desviación de la cantidad de movimiento, y debe valer, según (5.2):

$F_R = m\, v\, \Delta\theta/\Delta t$.

Para calcular debemos expresar la desviación en radianes:

$\Delta\theta = 5^o$

$\Delta\theta = \dfrac{5 \times 2 \times \pi}{360}$

$\Delta\theta \cong 0{,}0873$ rad, y calcular el tiempo demorado:

$\Delta t = 10$ m / 20 (m/s)

$\Delta t = 0{,}50$ s.

La fuerza resultante, inmediatamente después de pasar A debe valer

$F_R \cong 1.000 \text{ kg} \times 20 \text{ m/s} \times \dfrac{0{,}0873}{0{,}5 \text{ s}}$

$F_R \cong 3{,}49$ kN.

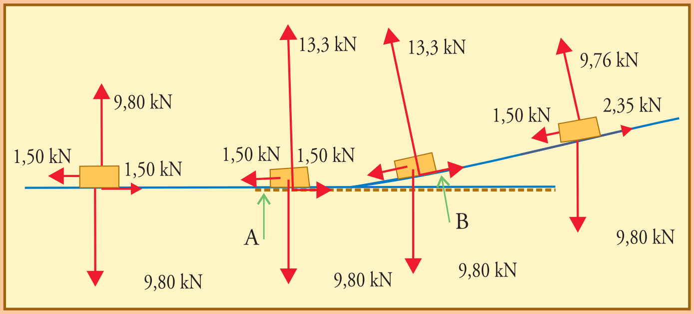
La reacción normal del piso debe valer en este punto:

$R_N = P_N + F_R$

$R_N \cong 9{,}80 + 3{,}49$

$R_N \cong 13{,}3$ kN.

Dado que a lo largo del tramo AB puede despreciarse tanto la variación de la componente normal del peso, como la diferencia entre proyectar sobre la dirección normal, o la dirección vertical, podemos decir que la reacción normal del piso debe mantener aproximadamente constante el valor aumentado de 13,3 kN a lo largo de todo el tramo, y durante los 0,5 s que dura, los pasajeros sentirán un aumento (proporcional a la masa de cada uno) en la fuerza con que el asiento los sostiene. Dado que esa fuerza es reacción a la que cada uno ejerce contra el asiento, los pasajeros tendrán la sensación de un aumento (temporal) de peso.



5.2. Movimientos rectilíneos

En estos movimientos la trayectoria es una línea recta, que contiene la dirección tangencial y todos los vectores interesantes para el movimiento, es decir vector desplazamiento, velocidad, cantidad de movimiento, y fuerza (resultante). Si arbitrariamente sobre esta línea ubicamos el eje *x* (equivalentemente podría elegirse el *y*), ganamos enormemente en comodidad ya que en ese caso sólo tendremos que considerar la componente *x* de todos los vectores que intervienen, pudiendo prescindir de las otras, como se ve a continuación.

Cada vector podría ser descripto con las dos componentes que corresponden, pero al elegir el eje x sobre la trayectoria la componente y es siempre nula:

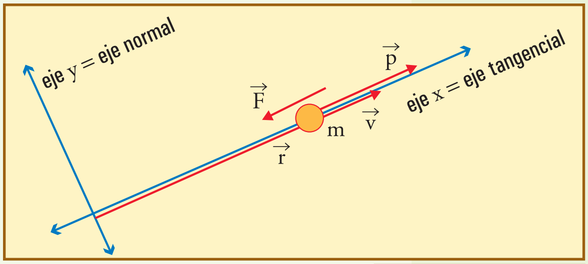


Fig. 5.5. Elección típica de ejes para un movimiento rectilíneo. El vector fuerza se dibujó arbitrariamente de manera de representar una fuerza que está frenando al móvil y debe estar claro que es la fuerza **resultante de todas las acciones exteriores en ese instante.**

posición: $r = (x\ ;\ 0)$

velocidad: $v = (vx\ ;\ 0)$

$$v = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$$

$$v = \frac{(\delta x ; 0)}{\delta t}$$

$$v = \left(\frac{\delta x}{\delta t} ; 0\right)$$

cantidad de movimiento: $p = (p_x\ ;\ 0)$
$p = (m\ v_x\ ;\ 0)$

fuerza (resultante): $F = (\ F_x\ ;\ 0)$

Dado que todas las operaciones que debemos efectuar con vectores (suma, resta, y multiplicación por números) se efectúan por separado sobre cada componente, entonces podemos sobreentender la componente *y*, y escribir todas las expresiones sólo para la componente *x*. De este modo, sin olvidar que siempre trabajamos con la componente del vector que corresponda, podremos escribir simplemente *funciones*.

Se destacan casos típicos que analizamos en detalle a continuación.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

En este caso la fuerza resultante es nula, y el cuerpo mantiene inalterada su cantidad de movimiento, y con ella su velocidad:

$$F_x = 0 \Rightarrow p_x = cte \Rightarrow v_x = \Delta x/\Delta t$$
$$v_x = cte$$

Para este movimiento sólo tenemos expresiones simples. Todas se obtienen a partir de la definición de velocidad:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$v_x = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado}$$
$$v_x = valor\ constante \qquad (5.4)$$

O lo que es lo mismo: $\Delta_x = v_x\ \Delta t$
$$\Delta_x = cte \times \Delta t \qquad (5.5)$$

Esto se lee diciendo que *la distancia recorrida es directamente proporcional al intervalo de tiempo transcurrido*, y la velocidad es la *constante de proporcionalidad*.

Si queremos expresar la posición x, en función de t, reemplazamos $\Delta x = x - x_0$, y obtenemos, $x = x_0 + v_x \Delta t$, en donde, si se toma (arbitrariamente) $t_0 = 0$, entonces $\Delta t = t$, y se tiene la expresión más habitual, que caracteriza a una *función lineal* de t:

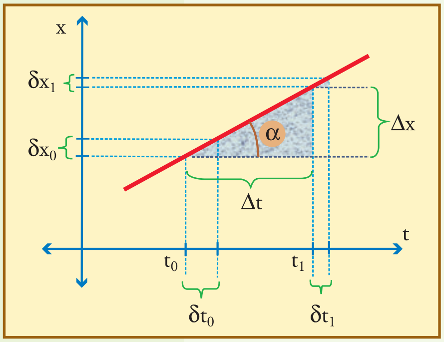


Fig. 5.6. Función x(t) lineal. Los triángulos sombreados, al ser todos semejantes, sirven para ver que los cocientes $\delta x/\delta t$ tienen igual valor en los distintos instantes: $\delta x_1 / \delta t_1 = \delta x_0 / \delta t_0 = \Delta x / \Delta t$

$$x = x_0 + v_x t \qquad (5.6)$$

En nuestras aplicaciones prácticas es probable que sólo necesitemos utilizar la definición de velocidad (5.4), y según el caso, despejar de ella (5.5). Pero ésta es una buena ocasión para familiarizarnos con el manejo de funciones y representaciones gráficas, porque al conectarnos con los conceptos estudiados en Matemática, esto nos permite ganar claridad en la visión global de las situaciones, y habilidad para el tratamiento de movimientos más complicados.

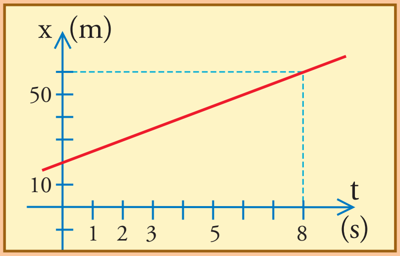
Para este caso puede interesarnos mostrar en una gráfica como varía la posición *x* en función de t, y por ser una función lineal, su representación gráfica es una línea recta, como se ve en la figura 5.6.

Esta figura es útil porque permite obtener la velocidad, $\Delta x / \Delta t$, como pendiente de la gráfica. Como se muestra en la figura, todos los cocientes $\Delta x / \Delta t$ que se realicen en distintos instantes, con intervalos grandes o pequeños, dan el mismo valor de velocidad, como corresponde a una función lineal. Si la gráfica fuese curva, eso no significaría que la trayectoria es curva, sino que su pendiente, o sea, la velocidad del movimiento, va cambiando, como veremos en otros movimientos.

Para cualquiera de los triángulos rectángulos sombreados en la figura 5.6, la pendiente está dada por los cocientes $\Delta x/\Delta t$, los cuales también definen la función trigonométrica denominada *tangente del ángulo* α: $\text{tg}\alpha = \Delta x / \Delta t$.
Esta pendiente se debe calcular con las unidades de cada eje: *[longitud/tiempo]= [velocidad]*, para obtener la velocidad del móvil con las unidades correspondientes. No debe calcularse la función $\text{tg}\alpha$ a partir del ángulo medido sobre la figura, a menos que se utilice una escala tal que la unidad de las abscisas (tiempo) ten-ga exactamente el mismo tamaño en la figura que la de las ordenadas (distancia).

Ejemplo 1

Obtenga la velocidad y la función x(t) a partir de la siguiente gráfica.



Desarrollo

Primeramente agregamos a la figura un triángulo con un Δt arbitrario y el correspondiente Δx.

La velocidad resulta

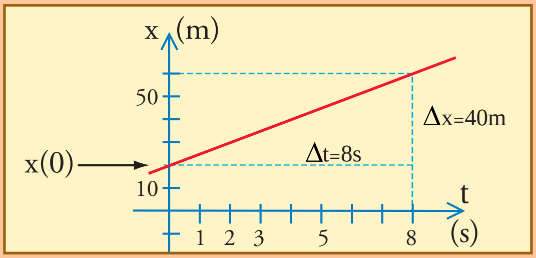
v = pendiente

$$v = \frac{40 \text{ m}}{8 \text{ s}}$$

v = 5 m/s;

y con ella tenemos la constante de proporcionalidad. Ahora, para escribir la función falta x(0), que es el valor de x en $t_0 = 0$ s, o sea el valor de ordenada donde la gráfica corta al eje de ordenadas, y lo obtenemos de la figura: x(0) = 20 m.

Entonces: $x(t) = 20 \text{ m} + 5 \text{ (m/s)} \cdot t$



Nota 1. Funciones y representaciones gráficas

Esta es una ocasión en la cual el estudio de los movimientos se relaciona con el estudio de diversas funciones, y conviene revisar alguna nomenclatura de matemática, aplicada concretamente a nuestros fines.

Ya hemos dicho que con las coordenadas (x ; y) *formamos el vector que nos indica la posición de un punto en un sistema de ejes cartesianos que hemos elegido de referencia.*

Si el punto es móvil, entonces la posición va cambiando, y tenemos que ir considerando distintas posiciones para cada instante: así, un vector $(x_1 ; y_1)$ corresponderá al instante t_1, otro vector $(x_2 ; y_2)$ corresponderá al instante t_2, etc. Cada componente del vector posición, a su vez, indica la posición referida al eje correspondiente: para el eje x, x_1 *es la posición en el instante t_1,* x_2 *en t_2, etc, mientras que de manera similar, para el eje* y, y_1, y_2, *etc., son las posiciones en t_1, t_2, etc.*

Es decir que para cada eje la posición va variando con el tiempo de manera que define una función de t. Así, para el eje x, *tenemos la función posición* $x(t)$, *en la que t es la variable independiente, y* x *es la dependiente; y para el eje* y *tenemos* $y(t)$, *con y variable dependiente y t siempre variable independiente.*

Cada una de estas funciones puede representarse gráficamente, cuando conviene para comprender mejor alguna situación. *Es decir, cualquier variable se puede representar gráficamente en función de cualquier otra, pero nosotros sólo haremos algunas representaciones gráficas típicas, y siempre, por razones físicas, será t la variable independiente (desde el punto de vista matemático cualquiera de las variables se podría elegir como independiente).*

*En nuestras aplicaciones, los diagramas con ejes (*x, y*)* **no son representaciones gráficas de funciones**, *sino que* **son dibujos que muestran algo que está ubicado en el espacio**. *Estos ejes no indican variables que dependen una de otra.*

*Así, por ejemplo, en un diagrama con ejes (*x, y*), dibujamos una recta para mostrar una trayectoria rectilínea, una curva como las de la figura 4.1 ó 4.3, para mostrar la trayectoria de una piedra arrojada oblicuamente, y una circunferencia sería la trayectoria de un punto con movimiento circular.*

Ahora bien, estos dibujos no pueden mostrar cómo ocurre el movimiento a medida que el tiempo transcurre. Para eso recurriremos a las representaciones gráficas en función del tiempo: colocaremos la variable independiente, t, en abscisas, y en ordenadas la variable que querramos mostrar cómo depende de t. Puede ser $x(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $F(t)$, $F_x(t)$, *etc. Cualquier variable que interese en determinada situación, podrá ser graficada en función del tiempo.*

Para ir familiarizándonos de a poco, como hemos dicho, sólo graficaremos algunas pocas cosas de interés.

Hemos comenzado con movimientos que ocurren en el eje x. *No interesa graficar* y *en función del tiempo, ya que* y *se mantiene constantemente nulo. Sí puede interesar graficar la función* $x(t)$, *la cual, para el movimiento simple que estamos viendo, es una recta.*

Esta gráfica es una recta porque la función $x(t)$ *es lineal, y de la gráfica podemos obtener información tal como el valor de la velocidad. Aunque la trayectoria fuese curva, la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo sería recta siempre que la velocidad fuese constante.*

Y si la gráfica no fuese recta, eso no indicaría trayectoria curva, sino que indicaría que va cambiando la velocidad.

Debemos reflexionar sobre estas ideas al analizar los ejemplos que se presentan, aprovechando al mismo tiempo para revisar todas las nociones adquiridas en Matemática relacionadas con las representaciones gráficas de funciones, especialmente las nociones de función lineal, y pendiente de una gráfica.

Ejemplo 2

Escribir la función y(t) de un móvil que viaja uniformemente en línea recta a lo largo del eje y, suponiendo que en $t_0 = 0$ s pasa por el lugar y(0) = 60 m, acercándose hacia el origen, al cual llega en $t_1 = 6$ s. Realizar la gráfica y(t).

Desarrollo

Para escribir la función y(t) debemos averiguar la velocidad. A partir de los datos esto es fácil:

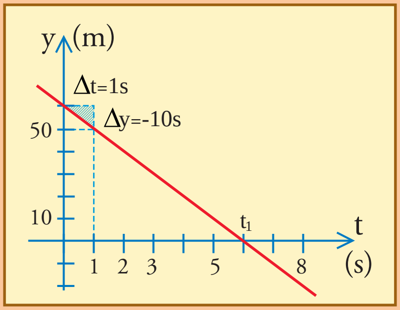
$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$v = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}$$

$$v = \frac{0m - 60m}{6s - 0s}$$

$$v = \frac{-60\ m}{6\ s}$$

$$v = -10\ m/s;$$



Aunque hemos omitido el subíndice, se sobreentiende que hemos calculado v_y, la componente y del vector velocidad. Dado que ya tenemos el término independiente, y(0) = 60 m; entonces la función y(t) es

$$y(t) = 60\ m - 10\ (m/s)\cdot t$$

Para realizar la gráfica, podemos trazar una recta que pasa por los dos puntos dados, pero como ejercicio aquí queremos trazarla a partir de la pendiente.

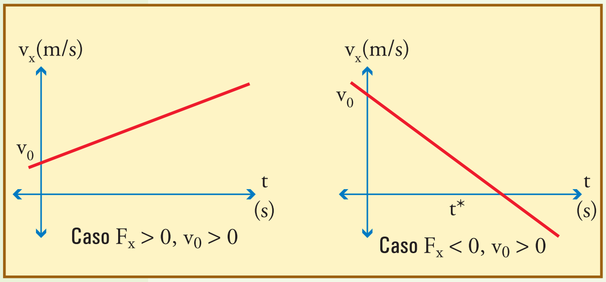
Para ello tenemos la primer posición en $t_0 = 0$, es decir marcamos el punto $y_0 = 60$ m en el eje de ordenadas, y a partir de allí, una pendiente de -10 m/s, significa que por cada segundo la ordenada debe disminuir en 10 m; en 6 segundos se recorren los 60 metros que faltan para el origen.

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Como veremos inmediatamente, éste es el caso que tiene lugar cuando se aplica una fuerza tangencial constante. Efectivamente en este caso el impulso aplicado es proporcional al tiempo, y la cantidad de movimiento varía linealmente con el tiempo:

$$F_x = cte \ ; \ I_x = F_x \ \Delta t$$
$$p_x = p_0 + F_x \ \Delta t \qquad (5.7)$$

Dividiendo esta expresión por la masa, se tiene automáticamente la expresión para la velocidad, que también debe ser una función lineal del tiempo:



$$v_x = v_0 + (F_x/m)\times \Delta t \qquad (5.8)$$

Nótese cómo en el caso de este movimiento, la velocidad y no la posición, es la que varía linealmente con el tiempo. Ahora nos resulta interesante graficar la velocidad en función del tiempo, aplicando las mismas ideas relacionadas con la función lineal. Como vemos a continuación, tenemos gráficas parecidas a las anteriores, pero con un significado totalmente diferente.

Observando esta última gráfica de $v_x(t)$, encontramos que: dado que la fuerza se mantiene orientada hacia los x negativos en todo momento, mientras $v_x > 0$, es decir hasta $t = t^*$, la fuerza tiene sentido contrario al movimiento y por lo tanto está frenando al móvil. Precisamente en $t = t^*$ es que éste se detiene, y a partir de ese instante la v_x es negativa y por lo tanto la fuerza resulta a favor del movimiento y hace aumentar el valor absoluto de la velocidad.

Por otra parte, dado que la gráfica es una recta, queda claro que el movimiento es simétrico respecto del instante de la detención, y esperando un cierto tiempo después de t^*, la velocidad tiene el mismo valor absoluto que tenía el mismo tiempo antes de t^*.

• La aceleración

Si recordamos la definición de aceleración $a = \Delta v / \Delta t$, según la Ley del Impulso resulta: $a = F/m$, para este caso a es un vector constante que también tiene la misma dirección del movimiento. Esto significa que en todas las expresiones anteriores se puede reemplazar (F/m) por a, obteniendo expresiones como:

$$v_x = v_0 + a\, \Delta t \qquad (5.9)$$

Cálculo de la distancia recorrida

Aquí se nos presenta un problema interesante: ¿cómo calculamos la distancia recorrida, o la posición, en cada instante?

La posición es una función x(t) tal que $v_x = \delta x/\delta t$, de donde podemos depejar $\delta x = v_x\, \delta t$.

Si esta expresión fuera válida para un intervalo cualquiera, no sólo para los pequeños, escribiríamos $\Delta x = v_x\, \Delta t$, esto diría que x es una función lineal de t (esto es lo que hicimos con el MRU, al pasar de la expresión (5.4) a la (5.5)).

Ahora eso no corresponde, porque vx no es constante: no vale lo mismo al comenzar el intervalo, al medio, o al final.

Hagamos un paréntesis para aprender una interesante manera de resolver este problema.

La distancia cuando la velocidad va cambiando, y el área bajo una gráfica

Cuando la velocidad varía no podemos aplicar $\Delta x = v_x\, \Delta t$ para calcular la distancia recorrida en un intervalo cualquiera (t_0, t_1), suponiendo que éste no es muy pequeño, simplemente porque no está determinado el valor de la velocidad que habría que utilizar.

No obstante, en un intervalo suficientemente pequeño, siempre vale calcular la distancia recorrida (que es muy pequeña) aplicando $\delta x = v_x\, \delta t$, si colocamos el valor v_x que corresponde a ese intervalo.

Ahora bien, si subdividimos el intervalo total en muchísimos intervalos suficientemente pequeños, siempre podremos expresar la distancia total recorrida como la suma de todas las distancias recorridas en cada uno de los intervalos pequeños. Claro que no intentaremos hacer este cálculo efectivamente en la práctica, porque si la cantidad de intervalos pequeños es muy grande, el procedimiento podría resultar tremendamente tedioso, y tal vez hasta imposible.

Pero tiene valor como idea.

Es decir, ahora tenemos el problema de averiguar el resultado de esta suma de toda una enorme cantidad de pequeñas distancias, pero *sin hacerla realmente*.

Para solucionar este problema recurrimos a un truco con la ayuda de las representaciones gráficas.

Consideremos una gráfica de la velocidad en función del tiempo de un movimiento cualquiera, como la de la figura 5.7. Si trazamos líneas verticales subdividiendo el intervalo (t_0 , t_1) en muchos intervalitos de duración δt suficientemente pequeña cada uno, el espacio bajo la gráfica, hasta el eje horizontal, queda subdividido en rectángulos (o trapecios rectangulares) muy angostos, cuya base, o ancho es δt, y cuya altura es el valor de v_x allí, en ese el intervalo. Si ahora, para calcular δx, efectuamos el producto v_x δt, obtenemos el área de cada rectángulo.

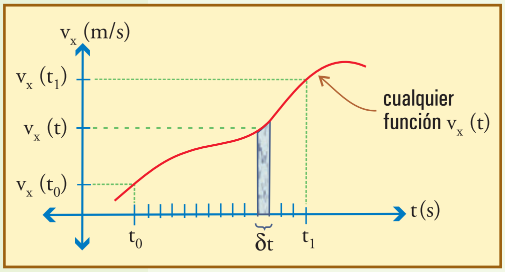


Fig. 5.7. Si para cualquier intervalo de base δt, multiplicamos la base por la altura v_x(t) en algún punto intermedio, obtenemos el área sombreada, que a la vez debe ser la distancia δx recorrida en ese lapso. Si δt es suficientemente pequeño se puede considerar un instante, y la altura del rectangulito es la velocidad en ese instante.

Esto significa que la suma de todas las distancias δx recorridas en todos los intervalos, es lo mismo que la suma de todas las áreas de todos estos delgados rectángulos, y *eso es lo mismo que el área total bajo la gráfica*.

Es decir que *con el concepto* de que la distancia total es la suma de un número inmenso de pequeñas contribuciones (suma que nunca podríamos efectuar en la práctica), llegamos a la conclusión de que lo que necesitamos es saber calcular el área de una figura geométrica. Obsérvese el poder de manipular ideas!.

De manera que en general, para la distancia recorrida (en x) por un móvil en el intervalo cualquiera desde t_0 hasta t_1, con una velocidad dada por cualquier función v_x(t), siempre vale:

$$\Delta x = \text{“área” bajo la gráfica, entre } t_0 \text{ y } t_1$$

“Área” está entre comillas porque no es la verdadera área geométrica de la figura, sino que se calcula con las escalas de cada eje, con dimensiones de tiempo en el eje de abscisas, y de velocidad en el de ordenadas: este área resulta con dimensiones de longitud ya que es una distancia.

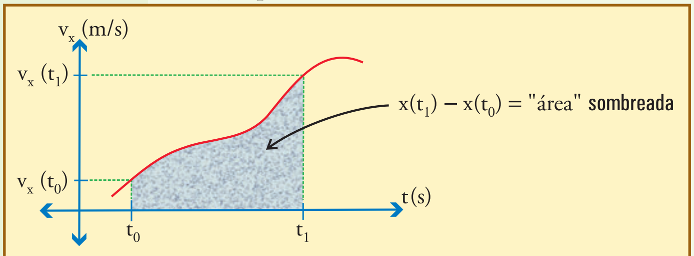


Fig. 5.8. Para cualquier velocidad v_x(t) dada por una gráfica, la distancia recorrida queda determinada por el área sombreada.

Vale notar que si en vez de hablar de la componente *x* del vector velocidad, hablamos de su módulo, v(t) (suponiendo que lo tenemos graficado en función del tiempo), dado que éste se refiere a la distancia recorrida en el espacio, y no sobre el eje *x*, ahora tendremos que el área de la gráfica de v(t), en cualquier intervalo, representa *la distancia recorrida en el espacio a lo largo de la trayectoria*.

Velocidad media

La definición (2.3’) de velocidad media (referida al eje x) $v_{m,x} = \Delta x / \Delta t$, según se discute en el Capítulo 4, es válida para cualquier movimiento. Esto se interpreta dicendo que la velocidad media (siempre referida al eje x), $v_{m,x}$, es aquella que el móvil debería haber mantenido constante durante todo el intervalo considerado, para recorrer la misma distancia (en el mismo tiempo).

Dado que ahora sabemos que para cualquier movimiento Δx es el área bajo la gráfica de la función $v_x(t)$, podemos decir:

$$v_{m,x} = \frac{\text{área bajo } v_x(t)}{\Delta t} \qquad (5.10)$$

Esto se puede interpretar en la figura 5.9 viendo que si dibujamos una línea de altura (constante) igual a $v_{m,x}$, queda un rectángulo cuya área, dada por el producto $v_{m,x} \times \Delta t$, debe ser, según (5.10), igual al área bajo la gráfica de la función $v_x(t)$. Ahora podemos decir que la velocidad media $v_{m,x}$, de un movimiento cuya velocidad va variando según lo indica la función $v_x(t)$ cualquiera, en cualquier intervalo Δt, es la altura de un rectángulo que tiene la misma área que queda bajo la curva representativa de la función $v_x(t)$.

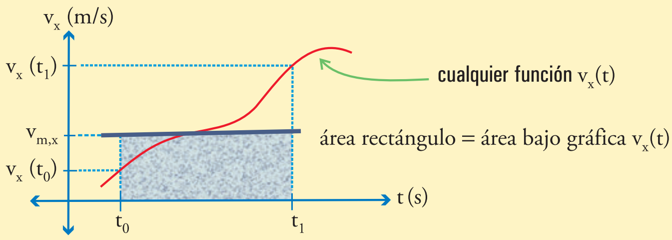
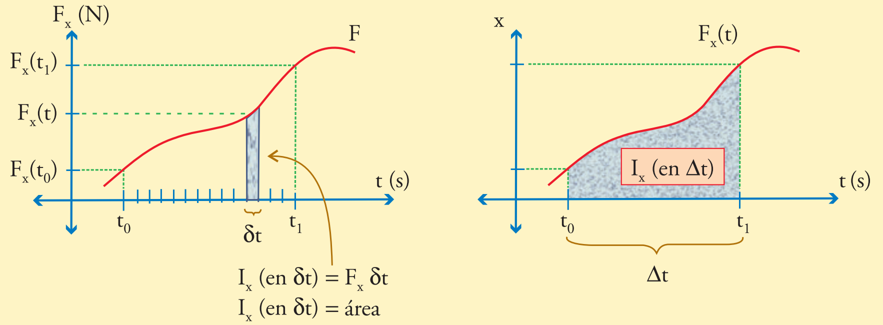


Fig. 5.9. La $v_{m,x}$ define un rectángulo de la misma área que la figura entre la $v_x(t)$ y el eje de abscisas.

• Impulso y fuerza media

Si aplicamos las mismas ideas al cálculo del impulso que aplica una fuerza que va cambiando en el tiempo, suponiendo que conocemos la gráfica de la componente x en función del tiempo, $F_x(t)$, obtenemos que el impulso aplicado en un intervalo debe ser igual al "área" de la gráfica correspondiente (figura 5.10).

Fig. 5.10. Cuando F_x varía en el tiempo según la gráfica $F_x(t)$, el impulso que aplica (en x) está dado por el "área" entre la gráfica y el eje de abscisa en el intervalo que sea. Las unidades de esta área serán las del eje de ordenadas por las del eje de abscisas, es decir, N·s.



Si dividimos el impulso total del intervalo (es decir el área) por Δt, obtenemos la altura de un rectángulo que tendría la misma área, o sea obtenemos el valor de la fuerza media, que es la que siendo constante aplicaría el mismo impulso (en el mismo tiempo):

$$F_{m,x} = \frac{I_{x(en\,\Delta t)}}{\Delta t} \qquad (5.11)$$

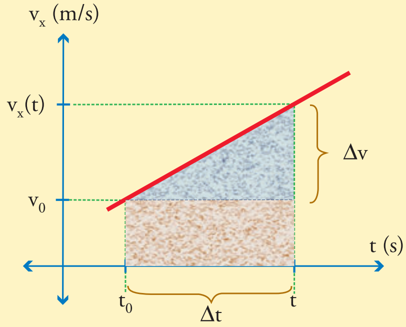
O también (puesto que vale para cualquier eje):

$$\text{vector fuerza media} = \frac{\vec{I}_{(en\,\Delta t)}}{\Delta t} \qquad (5.11')$$

Distancia recorrida en el MRUV

Luego de estos conceptos generales, podemos volver al problema particular de determinar la distancia recorrida en un movimiento en el cual la velocidad varía linealmente.

En este caso debemos calcular el área de triángulos o trapecios.



Cálculo por medio de rectángulo + triángulo:

$$\text{Área total} = v_0 \,.\, \Delta t + \frac{1}{2}\,\Delta v \,.\, \Delta t$$

Cálculo por medio del trapecio:

$$\text{Área total} = \frac{1}{2}(V_0 + v)\,.\,\Delta t$$

Fig. 5.11. Se muestran opciones para calcular el área correspondiente a una gráfica lineal de $v_x(t)$.

En la figura se muestra que hay más de una forma de calcular el "área", o sea Δx (el subíndice *x* está sobreentendido en todo lugar en donde falte). Todas las formas son equivalentes, pero unas pueden ser más cómodas que otras según sean los datos que se posean.

Las expresiones que más se utilizan son:

- Reemplazando $\Delta v = a\,\Delta t$, en rectángulo + triángulo:

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \tfrac{1}{2}\,a\,(\Delta t)^2 \qquad (5.12)$$

Expresión en la cual se pone de relieve que Δx es función cuadrática del tiempo.

- Reemplazando $\Delta t = \Delta v / a$, en trapecio:

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}\,(v + v_o)\times\{(v - v_o)/a\}$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad (5.13)$$

O también:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x \qquad (5.13')$$

- La expresión para el área del trapecio tal cual está en la figura:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2}\times\Delta t$$

$$\Delta x = v_{promedio}\,\Delta t \qquad (5.14)$$

En donde $v_{promedio}$ es el promedio entre la velocidad inicial y la final.

Para el movimiento en el que la velocidad varía uniformemente (no es así en otros), la velocidad media, definida como $\Delta x/\Delta t$, es lo mismo que el promedio entre la velocidad inicial y la final.

Podría parecer que en esta expresión (5.14) Δx depende linealmente de t, pero eso no es así, ya que $v_{promedio}$ no es constante, sino que también aumenta linealmente con el tiempo.

Cuando la fuerza se aplica en sentido contrario a la velocidad el móvil se va frenando, y si la fuerza se mantiene aplicada luego de que el móvil se detiene, el movimiento se reinicia instantáneamente en el sentido de la fuerza, es decir en sentido contrario al del movimiento inicial. En este caso Δx no sirve para saber la distancia recorrida, *ya que sólo indica la* diferencia entre la posición inicial y la final. *Si en particular hacemos $\Delta x = 0$ en (5.13) o (5.13'), obtenemos $v^2 = v_0^2$. Esto muestra nuevamente que el movimiento es simétrico respecto del punto de detención: si teniendo velocidad v_0 en x_0, el móvil avanza en contra de la fuerza hasta una posición x^* en la cual se detiene e invierte la marcha, cuando luego pasa por la misma coordenada ($x_1 = x_0$), lo hace con la misma velocidad cambiada de signo ($v_1 = -v_0$).*

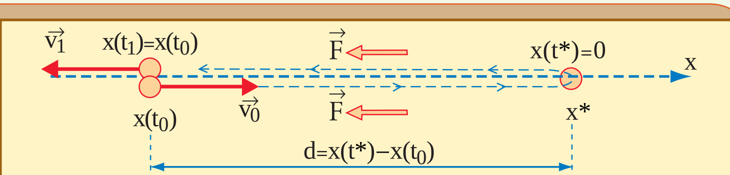


Fig. 5.12. Móvil que avanza una distancia d contra la fuerza. Ésta lo detiene y luego lo acelera, y al cabo de la distancia d el móvil tiene la misma velocidad inicial, con signo opuesto. Pero Δx ya no indica la distancia recorrida.

Algunas representaciones gráficas típicas, para las diversas condiciones que se indican, son las siguientes:

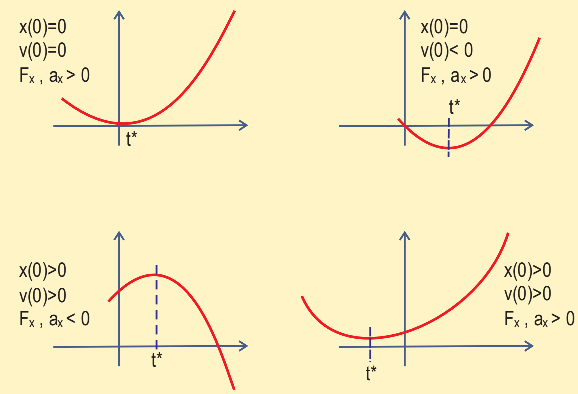


Fig. 5.13. Algunos casos de gráficas x(t).

Para los razonamientos físicos se suele descomponer el movimiento en dos fases: hasta que se detiene ($v = 0$), y luego comenzando allí desde el reposo ($v_0 = 0$).
De esta manera, ignorando los signos y la distinción entre v_0 y v (que luego se deciden para cada caso), todo se puede resolver con dos expresiones muy simples:

$d = ½\, a\, (\Delta t)^2$ (5.12')
$v^2 = 2\, a\, d$ (5.13')

Nótese que:

- El signo de x(0) se refiere a dónde corta la gráfica al eje vertical.
- El signo de v(0) indica cómo corta la curva al eje vertical (con pendiente hacia arriba o hacia abajo).
- El signo de F_x (que es el mismo de a_x) indica si la curva aumenta o disminuye de pendiente a partir de un instante cualquiera. O también si el movimiento se *inicia* hacia los x positivos o hacia los x negativos *a partir del instante de velocidad nula (t*)*.

Ejemplo

Un automóvil de 800 kg de masa que viaja a 20 m/s debe detenerse en un semáforo que está 55 m más adelante.

a) Calcular la fuerza mínima necesaria, suponiendo que se la comienza a aplicar cuando faltan 50 m para el semáforo, y se mantiene constante.
b) Calcular el tiempo demorado para frenar.
c) Calcular la velocidad cuando faltan 2 m para el semáforo.
d) Graficar posición y velocidad en función del tiempo.

Desarrollo

a) Aplicamos $v^2 = 2\, a\, d \Rightarrow a = \dfrac{v^2}{2\, d}$

$$a = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}}$$

$$a = 4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F = m\, a$$
$$F = 3.200 \text{ N}$$

En estos cálculos v se refiere a la velocidad inicial, y a es el módulo de la aceleración. Si se hubiera utilizado la expresión completa (5.13) se hubiera obtenido la aceleración negativa, y luego la fuerza también hubiera resultado con signo menos, porque obviamente debe aplicarse hacia atrás.

b) Aplicamos la Ley del Impulso: $3.200\ N \times \Delta t = 800\ kg \times 20\ m/s \rightarrow \Delta t = 5\ s.$

Otra forma es aplicar $\Delta t = \dfrac{d}{v_m}$

$$\Delta t = \frac{50\ m}{10\ (m/s)}$$

$$\Delta t = 5\ s.$$

c) Aplicamos $v^2 = 2\ a\ d$, considerando el movimiento desde el punto para el que se calcula la velocidad, y d la distancia hasta el punto de velocidad nula (semáforo), o sea: d = 2 m. Resulta $v^2 = 2 \times 4\ (m/s^2) \times 2\ m$

$$v^2 = 16\ m^2/s^2 \rightarrow v = 4\ m/s$$

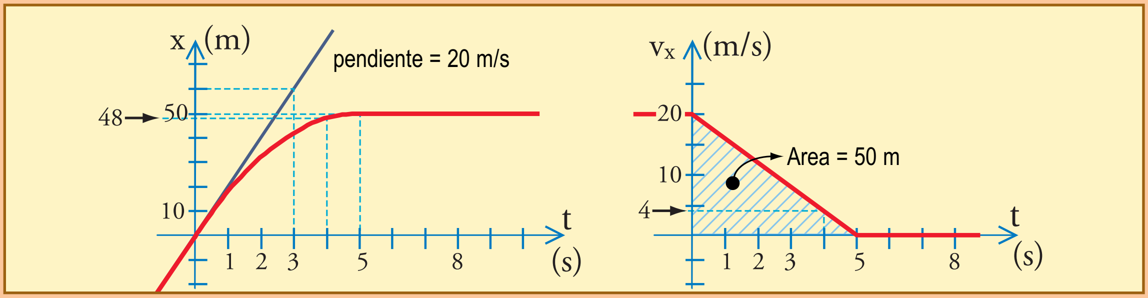
(dado que la aceleración es $4\ m/s^2$, esta velocidad se alcanza 1 s antes de la detención). Con la expresión completa, (5.13), hubiera sido $v^2 = v_0^2 + 2\ a\ d$, en donde d hubiese sido la distancia desde el punto inicial hasta el punto para el que se calcula la velocidad, o sea d = 48 m. De manera que el cálculo debería haber sido

$$v^2 = 20^2 + 2 \times (-4) \times 48$$

$$v^2 = 16\ m^2/s^2 \Rightarrow v = 4\ m/s.$$

Obviamente, de las dos maneras obtenemos el mismo valor.

d)



Movimiento oscilatorio

Este es un caso para el cual no podremos hacer cálculos hasta más adelante, pero son muy importantes los razonamientos cualitativos que plantearemos ahora, así como algunas conclusiones a las que llegaremos. Es importante entender que saber física significa poder hacer estos razonamientos antes de hacer cuentas.

Consideremos un cuerpo de masa “m” que se mueve horizontalmente, sin fricción, en el extremo de un resorte de constante elástica “k”. El movimiento es a lo largo del eje x, cuyo origen se elige en la posición de equilibrio del resorte (figura 5.13).

Las fuerzas verticales están equilibradas entre sí (peso y reacción normal del piso), y en ausencia de rozamiento la resultante es exactamente la fuerza que el resorte aplica al cuerpo, la única que se necesita considerar. Esta fuerza tiene un valor y un sentido que va cambiando según el grado de estiramiento instantáneo del resorte: es una fuerza elástica dada por $F_x = -\ k\ x$, que tiende a llevar al cuerpo hacia la posición de equilibrio.

Analicemos el movimiento a partir de una condición inicial arbitraria como la siguiente: un agente externo mantiene al cuerpo en un valor negativo de x ($x_0 < 0$, o sea resorte comprimido), y en t = 0 lo suelta.

Tenemos un cuerpo que parte del reposo impulsado por una fuerza que inicialmente vale k x_0, y que va disminuyendo a medida que el resorte se aproxima a su posición de equilibrio.

Es importante la siguiente idea: **aunque la fuerza va disminuyendo la velocidad va aumentando**, porque la fuerza siempre es hacia adelante. Aún si la fuerza desapareciera, la velocidad no tendría que disminuir. Una imagen que ayuda es pensar en cuando se empuja un automóvil: se comienza aplicándole una fuerza grande para iniciar el movimiento, y a medida que la velocidad aumenta se va disminuyendo la fuerza, pero mientras sea hacia delante, por pequeña que sea, contribuirá con un pequeño aumento de la velocidad.

Bien, el caso es que la velocidad no aumentará tanto como si fuera una fuerza constante (MRUV), pero necesariamente aumentará hasta que el cuerpo llegue a x = 0.

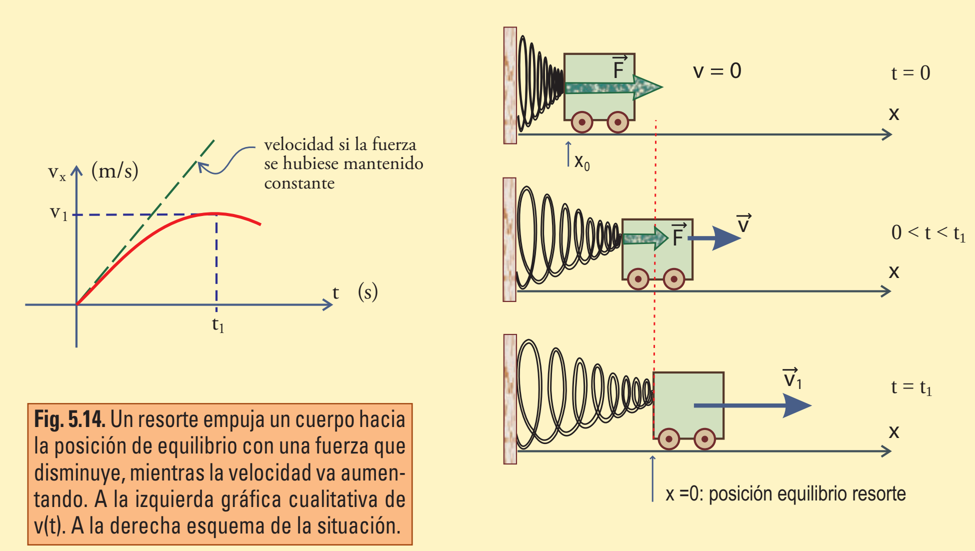


Fig. 5.14. Un resorte empuja un cuerpo hacia la posición de equilibrio con una fuerza que disminuye, mientras la velocidad va aumentando. A la izquierda gráfica cualitativa de v(t). A la derecha esquema de la situación.

En el instante que denominaremos t_1 en el cual el resorte alcanza su longitud de equilibrio (x = 0), la fuerza exactamente se ha anulado y el cuerpo ha alcanzado la velocidad que llamamos v_1. Aunque esa es la posición de equilibrio, el cuerpo obviamente no puede quedarse allí, ya que se está moviendo, y allí exactamente no hay fuerza que lo frene -y aunque la hubiera el cuerpo seguiría avanzando, necesitaría un tiempo y una distancia para frenarse-. Efectivamente eso es lo que sucede: el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y comienza a frenarse por acción de la fuerza elástica que crece negativamente a partir de allí. Esto significa que al pasar la posición de equilibrio recién empieza a disminuir la velocidad, o sea: la velocidad v_1 es la **máxima** que alcanzará este cuerpo.

Luego el cuerpo deberá detenerse en algún lugar x_2, ya que la fuerza que lo frena crece mientras el cuerpo avanza.

Y este es un buen momento para interrumpir con una pregunta:

¿Dónde/cuándo se detendrá el cuerpo?

Mientras hacemos un alto, tratemos de responder y reflexionemos sobre las siguientes opciones.

a) Se detendrá cuando se termine su fuerza de avance.

b) Se detendrá cuando la fuerza (que es negativa) iguale a la velocidad (en valor absoluto).

c) Se detendrá cuando la fuerza del resorte (que es negativa) iguale a la fuerza del cuerpo (en valor absoluto).

d) Se detendrá cuando el impulso aplicado por la fuerza de frenado (que es negativo) iguale a la cantidad de movimiento $m\ v_1$.

"Son todas absurdas excepto la correcta, pero pueden ser tentadoras. Quien encuentre algo de tentador en a), b), o c), debería revisar sus ideas más básicas, además de leer los comentarios sobre estas respuestas al final del capítulo."

No estamos en condiciones de determinar el valor de t_1 ni de t_2, pero sí de afirmar que se llegará a un instante tal que $I_x(t_1 \rightarrow t_2) = -m\ v_1$, y en ese instante será $v_2 = 0$. Además es fácil imaginar, por la simetría del proceso (más adelante podremos demostrarlo) que $t_2 - t_1 = t_1$, y que $x_2 = -x_1$.

Una vez que el cuerpo se detiene en x_2 es claro que no puede permanecer allí porque el resorte está estirado, aplicando una fuerza hacia el origen. De manera que el movimiento se reinicia instantáneamente, ahora con velocidad creciendo negativamente, y se repite exactamente lo mismo que ocurrió desde la partida, pero en sentido contrario, ya que la fuerza que aplica el resorte es exactamente igual, salvo el signo, para el resorte estirado o comprimido. Así es que en $t_3 = t_2 + t_1$ el cuerpo pasará por la posición de equilibrio con $v_3 = -v_1$, y en

$t_4 = 2\ t_2$

$t_4 = 4\ t_1$,

se detendrá por un instante en la posición inicial, para recomenzar y repetir exactamente todo indefinidamente (en la suposición de no haber rozamientos ni influencias extrañas).

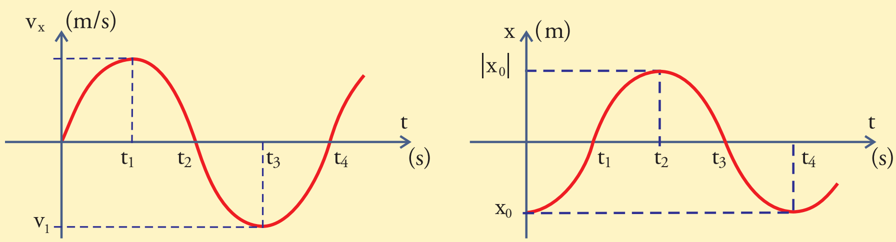


Fig. 5.15. Funciones v(t) y x(t) para una masa en el extremo de un resorte. Nótese cómo la velocidad, es máxima justo cuando el móvil pasa por la posición de fuerza nula, x=0.

Este movimiento es *periódico*, de período

$T = 2\ t_2$

$T = 4\ t_1$;

se denomina *período*, T, al tiempo transcurrido en el cual todo se repite, y *frecuencia*, f, al número de veces que se repite cada ciclo completo por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (5.15)$$

Se denomina *elongación* a la posición con respecto a la posición de equilibrio (x para este caso), y *amplitud* de la oscilación al máximo valor de la elongación ($|x_0|$ para este caso).

Aún no podemos efectuar cálculos analíticos; aunque sabemos que el impulso aplicado por el resorte en cada cuarto de período, desde la máxima elongación hasta la posición de equilibrio, es igual a la cantidad de movimiento adquirida: $I(0;\, t_1) = p_1$

$$= m\, v_1 \,,$$

no estamos en condiciones de calcular ese impulso, porque no conocemos la función F_x (t). Si la conociéramos tal vez podríamos calcular el impulso como el área bajo la gráfica. Pero aunque sabemos que $F_x = -k\, x$, no conocemos la función x(t), de la cual *lo único que sabemos* es que debe tener un representación gráfica como la de la figura 5.14.

También podemos determinar que, si aumentamos la masa del cuerpo, para igual posición inicial, deberá tardar más en llegar a la posición de equilibrio, mientras que deberá tardar menos si aumentamos la constante k del resorte, ya que eso haría que aplique fuerzas mayores. Esto nos permite decir que el período aumentará con m, y disminuirá con k.

Aunque no tenemos las herramientas matemáticas para averiguar más detalles, esta explicación cualitativa es suficientemente valiosa aún sin fórmulas y cálculos numéricos.

En el Apéndice 4 veremos que las funciones x(t) y v_x(t) mostradas en la figura 5.14, son funciones seno o coseno, que se denominan funciones *"armónicas"*.

Pero a través de este tratamiento debe sernos posible analizar cualquier fuerza de tipo *restaurador* (que empuja hacia una posición de equilibrio), aunque no sea exactamente elástica (proporcional a la elongación), y debemos saber que siempre encontraremos que la partícula sometida a esta fuerza realizará oscilaciones periódicas. En general la función x(t) será *más o menos parecida* a una función armónica, sin serlo exactamente.

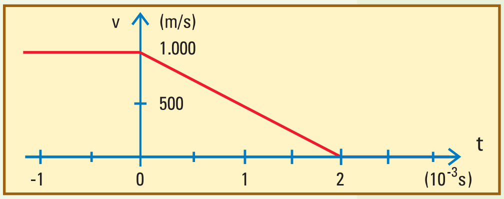
Por ejemplo: podemos pensar en la bolita de un péndulo, o en una bolita que rueda por la parte más baja de una pista o canaleta curvada hacia arriba.

El movimiento de cualquier cuerpo sometido a una fuerza restauradora es oscilatorio, y si la fuerza es elástica las oscilaciones son armónicas.

EJERCICIOS CAPÍTULO 5

▲ Ejercicio 5.1

Un proyectil de masa m = 20 g , que viaja con velocidad constante $\vec{v}_o$ a lo largo de *x*, hace impacto en un determinado instante en una pila de arena en la cual penetra una cierta distancia hasta detenerse, como puede deducirse a partir del siguiente gráfico de la velocidad v(t) del proyectil:



a) Encuentre la distancia penetrada por el proyectil en la arena a partir del gráfico presentado.

b) Calcule el módulo de la fuerza $\vec{F}$ que frena al proyectil en este proceso.

c) Calcule el impulso comunicado por el proyectil al blanco.

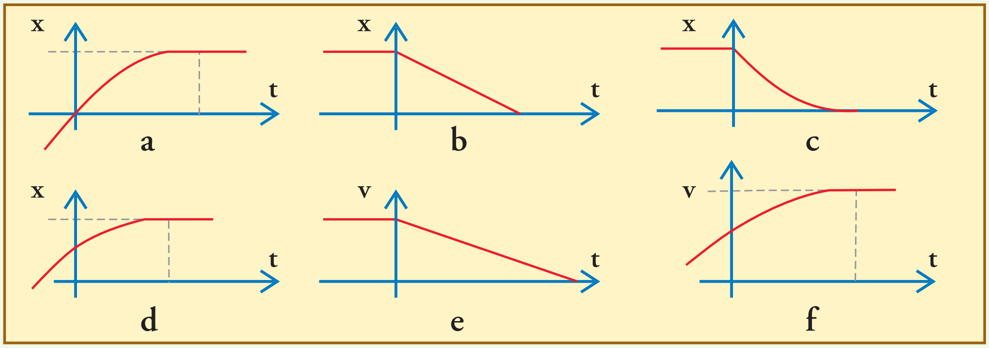
▲ Ejercicio 5.2

Un automóvil de masa m = 900 kg se desplaza a una velocidad de 72 km/h. En un momento determinado se aplican los frenos, como resultado de lo cual actúa una fuerza neta sobre el vehículo, hacia atrás, de 12.000 N.

a) Esquematice la situación planteada, dibujando cualitativamente los vectores que intervienen en el problema.

b) Determine la distancia que recorre el automóvil hasta detenerse.

c) Determine cuáles de los siguientes gráficos podrían ser correctos para el caso en que finalmente el automóvil queda detenido. Para todos los correctos indique valores importantes sobre ambos ejes. Indique qué representan $t = 0$, y $x = 0$, según su elección.



▲ Ejercicio 5.3

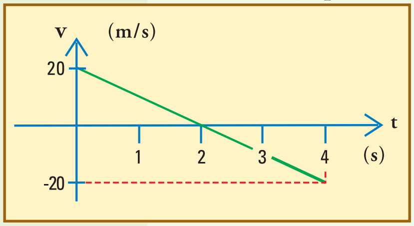
Una persona arroja oblicuamente una piedra de 200 g de masa, hacia un muro vertical de 10 m de altura que está a 20 m de distancia. La persona arroja la piedra desde aproximadamente 1,30 m de altura (lo que le permite su brazo), imprimiéndole un impulso de 4 Ns, en una dirección que forma 30° con la horizontal.

a) Despreciando la resistencia del aire determine dónde (a qué altura) choca la piedra contra el muro (o si es que no llega a él, o si pasa por encima sin tocarlo).

b) Suponiendo que al chocar la piedra rebota de diversas maneras, explique lo que puede decirse acerca de la fuerza y del impulso aplicado a la pared por este proyectil.

▲ Ejercicio 5.4

Considere la siguiente gráfica v(t). Considere que se refiere a un movimiento rectilíneo vertical, y que se ha elegido positivo el sentido de movimiento hacia arriba.



a) Elija la opción correcta, y justifique su elección:

Esta gráfica corresponde aproximadamente al movimiento de:

1) Un yo-yo que baja y sube.
2) Una pelota arrojada verticalmente hacia arriba.
3) Una pelota que se deja caer desde una altura de 20 m.

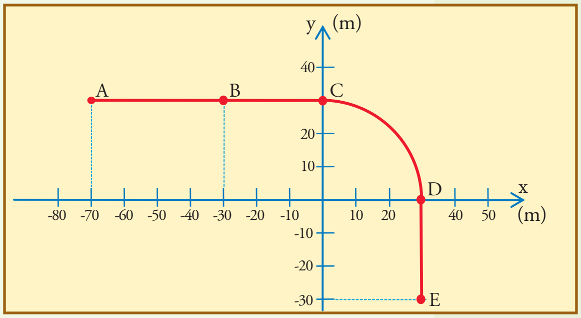
b) La gráfica anterior muestra que, durante los 4 s ilustrados, la fuerza neta que ha actuado sobre el móvil :

1) Ha sido constante, orientada hacia abajo.
2) Ha estado orientada hacia arriba, ha ido disminuyendo hasta anularse, y luego ha aumentado gradualmente, orientada hacia abajo.
3) Ha sido constante, orientada hacia arriba.

Elija la opción que le parezca más razonable, y justifique su elección.

▲ Ejercicio 5.5

Un cuerpo de masa $m = 30$ kg que está en reposo en A se pone en movimiento en t_0 = 0 s siguiendo la trayectoria dibujada. El cuerpo aumenta gradualmente de velocidad hasta pasar por B en t_B = 20 s. A partir de allí el movimiento se mantiene uniforme; el cuerpo pasa por C en t_C = 27,5 s, y continúa así hasta pasar por D, en donde comienza a frenarse gradualmente hasta quedar detenido en E.



a) Calculando los valores correspondientes, dibuje los vectores velocidad y escríbalos como par ordenado, en cada uno de los puntos indicados (A, B, C, D, y E).

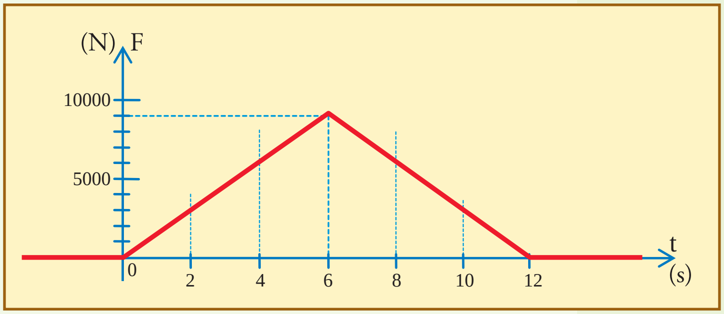
b) Calcule en qué instante pasará el móvil por D, y en qué instante llegará a E.

c) Indique en qué intervalos debe haber fuerza neta (resultante) actuando sobre esta partícula para mantener este movimiento. Explique las características de esta fuerza, y calcule su módulo. Dibújela cualitativamente ubicada en varios puntos sucesivos sobre la trayectoria.

d) Por medio de un diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento, encuentre los vectores impulso aplicados al cuerpo por la fuerza resultante en cada uno de los tramos indicados (AB, BC, CD, y DE). Comente la relación entre cada vector impulso y la fuerza correspondiente en ese tramo, calculada en c).

▲ Ejercicio 5.6

Sobre un cuerpo de masa m = 1.000 kg, que está en reposo sobre una pista horizontal, se aplica en t=0 una fuerza también horizontal cuyo valor es tal que la fuerza neta (resultante) tiene el valor indicado en el siguiente gráfico F = F(t).



a) Calcule el valor del impulso aplicado al cabo de los 12 segundos que actúa la fuerza, y con él calcule la cantidad de movimiento y la velocidad del cuerpo en t = 12 s.

b) Especule y reflexione acerca de las características generales de este movimiento. Indique especialmente qué sucede con la velocidad hasta t = 6 s, entre 6 s y 12 s, y después de los 12 s. Muestre sus conclusiones al respecto en una gráfica aproximada de v(t).

c) Dibuje aproximadamente la gráfica de la velocidad en función del tiempo, desde t=0 en adelante, <u>obteniendo sus valores por intervalo</u>, y compárela con la gráfica anterior.

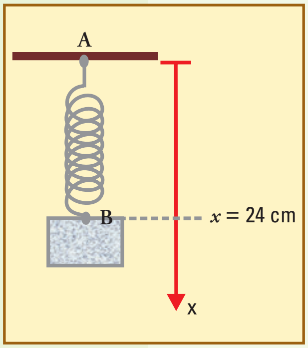
Su gráfica, a pesar de la aproximación del método, debe indicar sin lugar a dudas si la velocidad aumenta o disminuye y si lo hace linealmente o no en algún intervalo, y qué pasa luego de los 12 s.

▲ Ejercicio 5.7

Un cuerpo se cuelga suavemente de un resorte de constante elástica k = 400 N/m y 15 cm de longitud en equilibrio, el cual queda estirado (en reposo) hasta una longitud x = 24 cm, como se ilustra.

a) Complete la figura indicando (calcule los valores que hagan falta)

a1 : el vector que indica la fuerza con la cual el cuerpo tira del resorte en B (calcule



su valor).

a2 : el vector que indica la fuerza con el cual el resorte tira del cuerpo en B, y el que corresponde a la fuerza con la cual el resorte tira de su anclaje en A (indique valores).

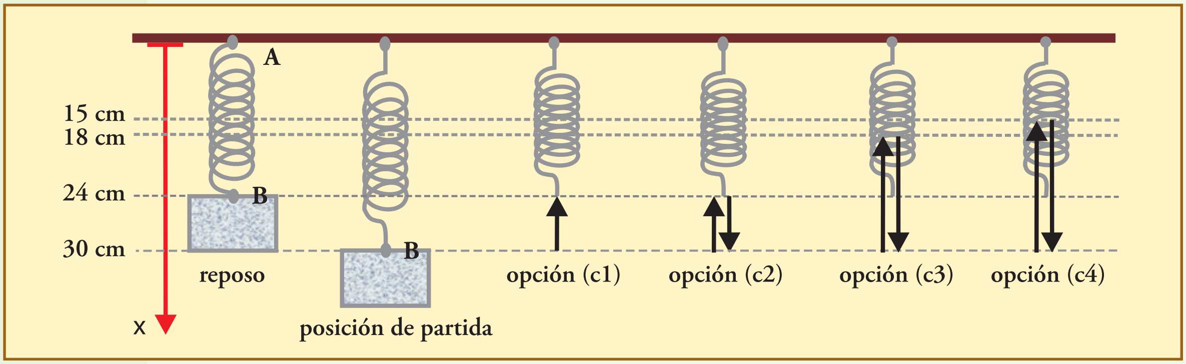
a3 : el vector que indica la fuerza del campo gravitatorio sobre el cuerpo (indique su valor).

b) calcule la masa de este cuerpo.

c) Un agente tira del cuerpo hasta que el extremo del resorte llegue a x = 30 cm (como se muestra en la figura), y allí lo suelta.

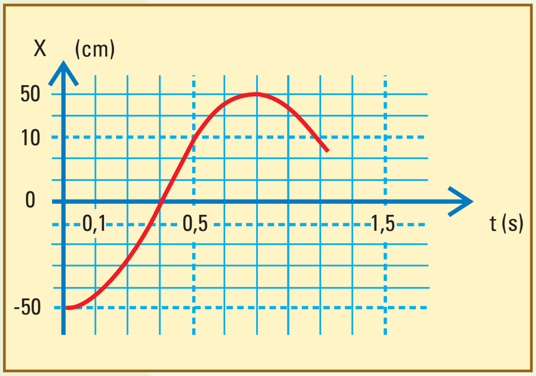
Elija la opción correcta acerca de lo que hará el cuerpo, justificando su elección.

c1) El cuerpo retornará a la posición de equilibrio (x = 24 cm).
c2) El cuerpo oscilará con el punto B entre 24 y 30 cm.
c3) El cuerpo oscilará con el punto B entre 18 y 30 cm.
c4) El cuerpo oscilará con el punto B entre 15 y 30 cm.



▲ **Ejercicio 5.8**

Un cuerpo oscila a lo largo del eje x, sobre una superficie lisa, horizontal y sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 20 N/m, de tal manera que un trozo de la gráfica x(t) obtenida en un cierto intervalo de tiempo es la indicada en la figura (luego el movimiento continúa, aunque no se haya continuado la gráfica).



a) Calcule a partir de la gráfica el período y la frecuencia del movimiento.

b) Calcule a partir de la gráfica la distancia recorrida por el cuerpo desde t = 0,2 s hasta t = 0,3 s, y con eso calcule la velocidad media en ese intervalo.

c) A partir de la gráfica estime la velocidad máxima (tenga en cuenta que debe ser un valor muy parecido a su resultado anterior) y compare con lo que se obtiene aplicando: $v_{máx} = \omega \times$ amplitud.

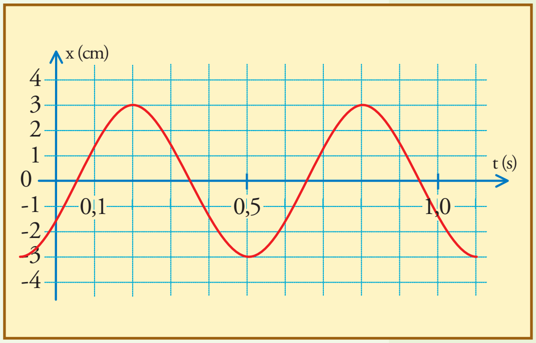
d) Calcule aproximadamente según la gráfica y los demás datos, el valor de la fuerza actuante (aplicada por el resorte) en los instantes t = 0,2 s , y 0,3 s.

e) Para cada uno de los dos instantes considerados, 0,2 s y 0,3 s, diga hacia dónde actúa la fuerza e indique cuál es el efecto que está produciendo sobre el movimiento, seleccionando

para ello alguna de estas afirmaciones (luego justifique y muestre en un esquema):
I. En ese instante la fuerza está haciendo que el móvil permanezca detenido.
II. En ese instante el resorte no está aplicando fuerza.
III. En ese instante la fuerza está haciendo aumentar el módulo de la velocidad del móvil.
IV. En ese instante la fuerza está haciendo disminuir el módulo de la velocidad del móvil.

▲ Ejercicio 5.9

Considere la siguiente gráfica x(t), correspondiente a las oscilaciones de cierto cuerpo sujeto al extremos de un resorte de constante elástica k = 20 N/m, deslizando sin rozamiento sobre una pista horizontal.



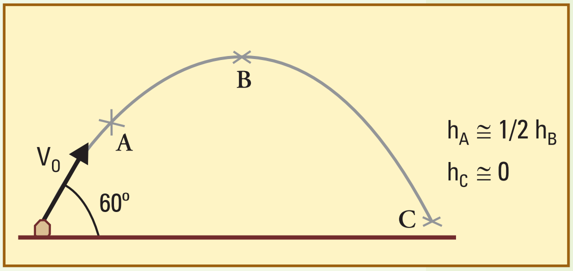
a) Obtenga el período de las oscilaciones a partir de la gráfica, y calcule la masa del cuerpo.
b) Defina algún instante que considera inicial, y según él, invente (y escriba) las condiciones iniciales correspondientes para esta oscilación.
c) Señale en la gráfica cuáles son los instantes de fuerza neta actuante nula, cuáles los de fuerza neta actuante máxima, cuáles los de velocidad máxima y cuándo la masa se detiene.
d) Realice un esquema mostrando la ubicación espacial de la masa en t = 0, en t = 0,2 s, y en t = 0,35 s, y dibuje allí, cualitativamente, los vectores velocidad, y fuerza neta actuante.
e) Calcule la velocidad máxima de dos maneras distintas, y compare los valores obtenidos (deben coincidir aceptablemente).
f) Aplicando la Ley del Impulso calcule el impulso aplicado sobre la masa entre 0,05 s y 0,35 s ; luego, entre 0,35 y 0,50 s ; y finalmente entre 0,50 y 0,80 s. A partir de alguno de estos valores adecuado para ello calcule la fuerza media que aplica el resorte en una elongación desde una posición de equilibrio hasta volver a ella, y compare con la fuerza máxima que actúa.

▲ Ejercicio 5.10

Se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil de masa m = 1,5 kg, con una velocidad inicial de 180 m/s. Desprecie la resistencia del aire.
a) Calcule la altura máxima que puede alcanzar el proyectil, y el tiempo demorado en alcanzarla.
b) Calcule la altura máxima que puede alcanzar el proyectil, y el tiempo demorado, en el caso de ser lanzado oblicuamente a 50º por encima de la horizontal. Indique la velocidad en el punto más alto.

▲ Ejercicio 5.11

En un gran ambiente en el cual se ha hecho el vacío, se arroja oblicuamente una piedra de masa m = 2 kg, con una velocidad inicial de 30 m/s orientada como muestra la figura:



a) Calcule la altura máxima alcanzada (h_B).
b) Calcule y escriba como pares ordenados los vectores velocidad en A, en B, y en C.
c) Dibuje la fuerza resultante actuante sobre el proyectil

en A, y en B, mostrando cualitativamente sus componentes normal y tangencial, y explicando cuál es el efecto de cada una sobre el movimiento en ese instante.

d) Realice un diagrama vectorial de impulsos y cantidades de movimiento correspondiente a cada uno de los tramos (OA, AB, y BC), indicando los valores de cada vector. Comente la relación entre cada vector impulso y la fuerza resultante en ese tramo.

▲ Ejercicio 5.12

Considere un satélite de 50 kg en órbita circular alrededor de la Tierra, a 1.000 km por encima de su superficie. El satélite ha sido puesto en órbita en algún momento anterior que no interesa: en el momento considerado ya está en órbita describiendo un movimiento circular uniforme.

Datos a considerar: $M \cong 6{,}0\times10^{24}$ kg (masa de la Tierra); $R_T \cong 6.370$ km (radio terrestre); $G \cong 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2 (constante de gravitación universal).

a) Realice un esquema mostrando la situación y las fuerzas actuantes sobre el satélite.

b) Calcule la velocidad que debe tener el satélite para mantenerse en esta órbita, y a partir de ella calcule el período del movimiento.

c) Calcule la intensidad del campo gravitatorio en la zona de la órbita, y compárelo con el valor en la superficie de la Tierra. Elabore alguna explicación sobre la ingravidez que se observa en los filmes de situaciones orbitales.

d) La llamada Tercera Ley de KEPLER dice que si se considera un conjunto de cuerpos en órbita alrededor de un mismo astro central, se encontrará que los cuadrados de los períodos de revolución de los distintos cuerpos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas (las cuales, según otra ley, son elipses con el astro central en uno de los focos).

Un caso particular simple, es el caso en el que las elipses no tienen excentricidad, y son circunferencias bien centradas, cuyo radio es lo mismo que el semieje mayor.

Muestre con los cálculos anteriores cómo surge esta ley para este caso de órbitas circulares, y cómo, a partir del período de revolución de los satélites y del radio de la órbita, puede calcularse la masa del astro central.

e) Aplique lo anterior para calcular la masa de la Tierra a partir de los datos de la órbita de la Luna (alrededor de la Tierra): $T \cong 27{,}322$ días; $R_O \cong 384.400$ km (la órbita no es exactamente circular, pero es bastante parecida).

Comentarios sobre las preguntas.

a) Un cuerpo no tiene “fuerza de avance”. Eso no existe. Fuerza es lo que el resorte le aplica, en este caso tirando de él para frenarlo. Por acción y reacción el cuerpo tira del resorte hacia adelante con una fuerza de exactamente la misma intensidad en todo momento.

b) Una fuerza nunca puede igualar a una velocidad, ya que son cosas de diferente naturaleza y dimensión.

c) Vale el mismo comentario a).

d) Obviamente hay que aplicar la Ley del Impulso: $m\,v_2 = m\,v_1 + I_{x(t1\rightarrow t2)}$ e igualar esta expresión a cero.

Capítulo 6

Trabajo y energía

A comienzos del siglo XVIII ocurrió algo nuevo en la faz de la Tierra: el hombre inventó máquinas que trabajaban por él usando el poder del fuego.
Las máquinas eran alimentadas con carbón, y gracias a lo que se llamó la *fuerza motriz del fuego*, hacían el *trabajo*: primero bombearon agua para desagotar las minas de carbón, luego movieron cosas, después comenzaron a propulsar vehículos, y definitivamente pusieron en marcha una revolución, la *Revolución Industrial*.
En el proceso de tratar de que las máquinas hicieran más cosas con menos gasto de carbón se desarrolló uno de los conceptos más fecundos de la física, el concepto de energía, que luego desbordó el marco de la física, y ahora trata con todas las ciencias.
En este capítulo realizaremos un abordaje simplificado de este concepto, *dentro del marco de la mecánica*, y en el Apéndice 6 ampliaremos la explicación de los procesos históricos que tuvieron lugar, y del significado general de la energía.

6.1. Trabajo mecánico

Introducción a la idea de trabajo

En la base misma del concepto de trabajo hay una idea estrechamente relacionada con las necesidades de la Revolución Industrial: la idea de *desplazar un objeto una cierta distancia por medio de la aplicación de una fuerza*, expresada a través del *producto de ambos*:

Todo trabajo realizado implica la utilización de cierta cantidad de *energía*, por ahora imaginémosla como *algo que inevitablemente hay que gastar* para realizar estos procesos. Algo que se necesita tener previamente para hacer el trabajo, en cantidad proporcional a la cantidad de trabajo que se desea realizar.

Una fuerza se puede mantener aplicada durante un tiempo ilimitado, sin gastar nada. Por ejemplo, con un tornillo ajustado, o con un cuerpo pesado que se coloca sobre algo para mantenerlo aplastado. Se entiende que puede haber cierto "gasto" para ajustar el tornillo, o para colocar el cuerpo pesado en el lugar deseado, pero nada debe gastarse luego, mientras la fuerza permanece aplicada durante años.

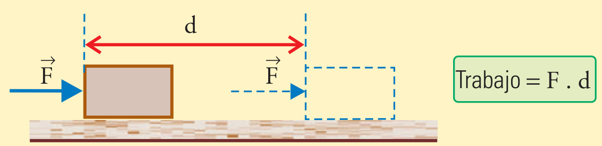


Fig. 6.1. Esquema de una fuerza que desplaza un cuerpo y realiza un trabajo.

Pero ésta no es la situación cuando es necesario aplicar fuerza para *desplazar* un objeto. En esos casos habrá que gastar algo que, por ahora, llamaremos energía pero definiremos con más detalle más adelante.

Tendremos que tener presente que, como organismos biológicos que somos, tendemos a hacer distintas interpretaciones del esfuerzo que se requiere de nosotros. Medimos esas interpretaciones a través de nuestra sensación, y eso puede llevar a confusiones porque hay más de una forma legítima de interpretar lo que es un trabajo. Por ello en función de lo que vamos a plan-tear en el marco de la física, no debemos confundir las siguientes ideas:

1 **TRABAJO MECÁNICO**	2 **TRABAJO BIOLÓGICO**
Es el realizado por una fuerza o sistema de fuerzas, según definiciones que desarrollaremos en esta sección.	*Es una denominación sin rigor científico, utilizada frecuentemente para designar la energía utilizada por un organismo viviente al intentar realizar un trabajo mecánico u otros procesos parecidos.*

La idea (2) es más compleja y difícil de precisar, no nos ocuparemos de ella. No obstante, si se quisiera profundizar, de todas maneras habría que tener previamente bien definida la idea (1).

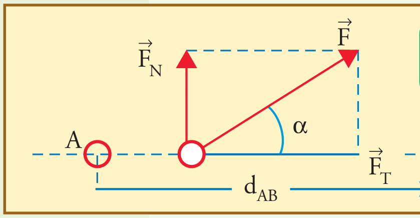
• Trabajo mecánico

Cuando se diseña una máquina que debe mover un cuerpo se trata de que aplique la fuerza de la mejor manera posible, es decir, bien alineada con el movimiento que se quiere producir.

No obstante, sabemos que la dirección del movimiento de un cuerpo no tiene porqué coincidir en todo instante con la de la fuerza resultante, ni con la de alguna fuerza particular que le aplica algún agente determinado. Por lo tanto, la definición de trabajo hecho por una fuerza debe servir para el caso general, y debe contemplar cualquier orientación de la fuerza respecto del movimiento.

Comencemos considerando el caso de un móvil que sufre un desplazamiento rectilíneo bajo la acción de un sistema de fuerzas que se mantienen constantes en todo el intervalo (oportunamente extenderemos las ideas para cualquier caso general). De todo el sistema de fuerzas elegimos una cualquiera para definir el trabajo que realiza. La definición vale para cada fuerza, y es independiente de que haya o no otras fuerzas actuando.

El trabajo mecánico W hecho por la fuerza F aplicada sobre un punto mientras éste se desplaza desde A hasta B en una dirección que forma un ángulo α con la fuerza, es el producto de la distancia recorrida por la componente *tangencial* de la fuerza:



$$W_{AB} = F_T\, d_{AB}$$
$$W_{AB} = F d_{AB} \cos\alpha$$

Si bien en la definición de trabajo intervienen dos vectores (fuerza y desplazamiento), es importante notar que el trabajo no es vector, es una cantidad escalar, que puede tener signo positivo, o negativo. Una fuerza con componente tangencial positiva ($\alpha < 90^\circ$) hace trabajo positivo, el cual suele denominarse *motriz*, mientras que si esta componente es negativa ($\alpha > 90^\circ$), el trabajo es negativo, y suele denominarse *resistente*.

Según la definición, una fuerza perpendicular al desplazamiento no hace trabajo, y eso se justifica en virtud de la relación entre trabajo y energía que vamos a plantear más adelante.

La unidad SI de trabajo es el *joule*, símbolo *J*, denominado así en honor al físico inglés James Prescott JOULE (1818-1889), uno de los "descubridores" de la conservación de la energía:

$$1\ J = 1\ N \times 1\ m$$
$$1\ J = 1\ N{\cdot}m$$

Ésta es una unidad pequeña, ya que equivale aproximadamente al trabajo que se hace levantando una pesa de 100 g a una altura de 1m, veremos más adelante la equivalencia con otras unidades de trabajo o energía de uso común.

Se utiliza casi universalmente la letra W para designar el trabajo (por trabajo en inglés, "work"). En algunos textos puede verse L, por "lavoro", que es trabajo en italiano. No utilizaremos la T, de nuestro idioma, porque la reservamos para el tiempo, de manera que adheriremos al uso inglés.

Ejemplo 1

Un cuerpo de 6 kg de masa está apoyado sobre el piso en el punto A.

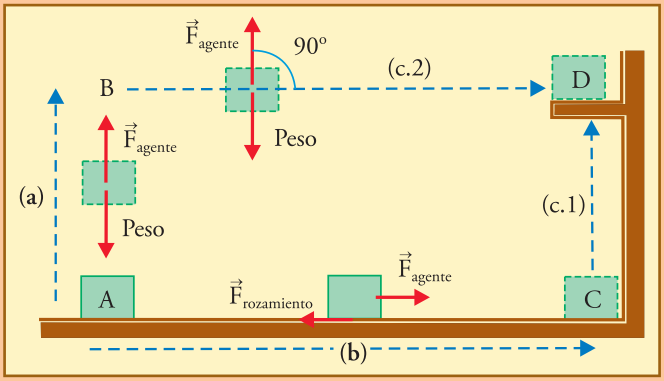
a) Calcular el trabajo que hace un agente externo para levantar el cuerpo hasta el punto B, a 1,80 m de altura sobre A.

b) Considere que un agente arrastra este cuerpo una distancia (horizontal) de 5 m hasta el punto C, suponiendo que entre el cuerpo y el piso se produce una fuerza de rozamiento de 4 N. Calcule el trabajo hecho por el agente, y el trabajo hecho por la fuerza de rozamiento.

c) Considere que el agente lleva este cuerpo hasta dejarlo colocado en una repisa en D, 1,80 m por encima del punto B de las siguientes dos maneras:

c.1) Arrastra el cuerpo hasta C y allí lo levanta verticalmente hasta la repisa.

c.2) Levanta el cuerpo hasta B, y luego lo lleva directamente a la repisa.



Desarrollo

a) El agente sólo debe equilibrar al peso, de valor: m g ≅ 59 N. La fuerza se aplica en la misma dirección y sentido que el desplazamiento, por lo cual: $W_{AB} \cong 59\ N \times 1{,}80\ m$

$$W_{AB} = 106\ J$$

b) Ahora el agente sólo debe equilibrar el rozamiento:

$$F_{agente} = 4\ N,$$
$$W_{agente}(AC) = 4\ N \times 5\ m$$
$$W_{agente}(AC) = 20\ J.$$

El rozamiento es opuesto al desplazamiento: $F_{rozamiento} = 4\ N$, pero $\alpha = 180º$; entonces

$$W_{rozamiento}(AC) = -\ 4\ N \times 5\ m$$
$$W_{rozamiento}(AC) = -\ 20\ J.$$

c.1) El agente debe hacer sucesivamente lo calculado en b) más lo calculado en a): 20 J + 106 J = 126 J.

c.2) Ahora el agente debe hacer sucesivamente lo calculado en a) más el trabajo para llevar el cuerpo horizontalmente a 1,80 m de altura (trayecto BD). Pero para esto último el agente aplica una fuerza que equilibra al peso, sin componente tangencial ($\alpha = 90^\circ$), y no realiza trabajo.

Por lo tanto el trabajo del agente para ABD, es el mismo que para AB: 106 J.

En este punto vale la pena discutir si puede ser correcto considerar que el trabajo es nulo para transportar un cuerpo de 6 kg a 1,80 m de altura a lo largo de 5 m. Según la definición corresponde decir $W_{BD} = 0$, pero, ¿no correspondería cambiar esa definición?

No corresponde cambiar, está bien así, y ya hemos comentado algo sobre esto. Para una persona puede ser cansador transportar este cuerpo a 1,80 m de altura. Como también sería cansador si le pidieran que simplemente lo mantuviese fijo en D durante cierto tiempo Δt, hasta que vayan a comprar la repisa.

Pero eso no interesa en la definición de *trabajo mecánico hecho por una fuerza*. La fuerza que aplica el agente para sostener el cuerpo, cansándose, también podría ser aplicada por un soporte, que lo podría sostener indefinidamente. Y el transporte BD podría hacerse con un riel adecuado sin esfuerzo alguno. Sólo habría que trabajar para subir el cuerpo hasta B (106 J), pero no para mantenerlo allí, o transportarlo hasta D. Incluso el riel podría tener rozamiento, y el agente debería hacer trabajo en el transporte BD, tal como ocurre en el AC, pero sería *para vencer el rozamiento*, y no tendría que ver con la fuerza vertical.

Es decir, algunas cosas se pueden hacer bien, sin gastar, o se pueden hacer mal, con mucho gasto. Veremos muchas veces que las componentes de las fuerzas perpendiculares a los movimientos siempre pueden ser aplicadas por dispositivos que, si son adecuados, no gastan para ello.

6.2. Teorema del trabajo y la energía cinética

Consideremos un intervalo AB de la trayectoria de un cuerpo prácticamente puntual. Si bien lo que vamos a demostrar es válido para el movimiento del centro de masa de cualquier cuerpo, aunque éste no sea rígido ni puntual, es útil simplificar las ideas pensando que hablamos de una partícula de masa m concentrada en un punto, porque ése es un caso simple para el cual este teorema va a ser válido siempre sin ninguna restricción, por lo que sirve para guiar muchos razonamientos sobre sistemas más complicados.

Tenemos que el trabajo de la fuerza resultante vale $W_{AB} = F_T\, d_{AB}$. Si la trayectoria es curva, se entiende que AB es la longitud recorrida a lo largo de la curva.

Ahora bien, consideremos el caso más simple en que F_T se mantiene constante (si F_T varía, todo sigue siendo válido para intervalos suficientemente pequeños); para este caso el movi-miento es uniformemente variado (aunque no fuese rectilíneo), y la distancia recorrida es $d_{AB} = ½\,(v_A + v_B)\,\Delta t$, de manera que:

$$W_{AB} = F_T\, d_{AB}$$

$$W_{AB} = \frac{(v_A + v_B)}{2} F_T\, \Delta t$$

Según la ley del impulso para la fuerza tangencial (5.1), tenemos que $F_T\,\Delta t = m\,(v_B - v_A)$, de manera que la expresión para el trabajo queda:

$$W_{AB} = \frac{m(v_A + v_B)(v_B - v_A)}{2}$$

$$W_{AB} = \frac{m\,(v_B^2 - v_A^2)}{2} \qquad (6.2)$$

Esta expresión es muy importante porque nos dice que el trabajo de la fuerza resultante se manifiesta como una variación de la cantidad ½ m v^2, que se denomina *energía cinética*, que significa *energía de movimiento*:

$$\boxed{Ec = \frac{mv^2}{2}} \tag{6.3}$$

$$\boxed{W_{AB} = Ec_B - Ec_A} \tag{6.4}$$

$$\boxed{Ec_B = Ec_A + W_{AB}} \tag{6.5}$$

La energía cinética debe tener la misma unidad que el trabajo (J), ya que de lo contrario no podrían igualarse, sumarse o restarse; y esto se verifica fácilmente si se recuerda que la unidad de fuerza es: $[N] = [kg][m]/[s]^2$.

Nota 1. Energía cinética como capacidad para hacer trabajo

Si la cantidad dada por (6.3) es una energía, le corresponde el nombre de cinética, dada la forma en que depende del movimiento. Ahora bien, ¿por qué le llamamos energía?

A partir de la idea inicial de que la energía es algo que los sistemas deben "gastar" (y previamente tener) para hacer un trabajo, esta cantidad Ec sería merecedora de esa denominación (energía) si pudiéramos probar que perdiendo esa cantidad ΔEc, el móvil podrá hacer esa misma cantidad de trabajo sobre otro sistema.

Ahora bien, en las situaciones típicas con $W < 0$, en las que algún agente intenta detener un cuerpo en movimiento, como la que discutimos a continuación, eso es muy fácil de probar.

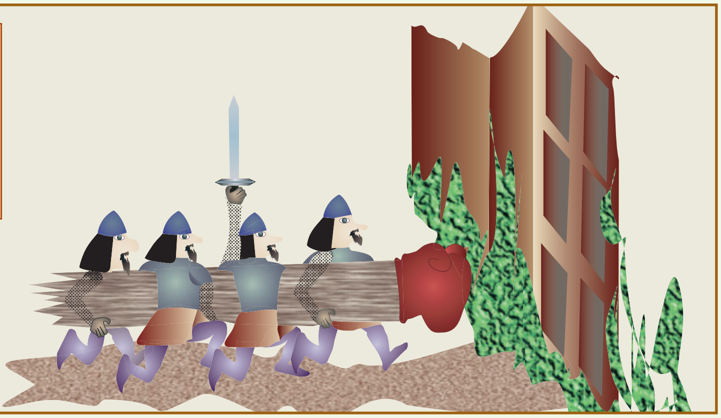
Efectivamente, para detener un cuerpo que tiene energía cinética Ec_A, el agente tendrá que aplicarle una fuerza hasta que realice un trabajo $W_{AB} = -Ec_A$

$$W_{AB} = -F\, d_{AB}$$

Es decir que **el móvil siempre recorrerá una distancia antes de detenerse** *($d_{AB} > 0$). Además, lo hará aplicando una fuerza igual a la que se le aplique a él (principio de acción y reacción), y por lo tanto hasta detenerse avanzará haciendo una cantidad positiva de trabajo $W_{AB} = Ec_A$. Esto da pie para decir que,* en estas situaciones puramente mecánicas y simples, *la energía cinética es la capacidad del móvil para hacer trabajo.*

En las próximas figuras vemos la ilustración de una situación a la que se le puede aplicar esta idea.

Fig. 6.2. Los soldados tratan de derribar una puerta con un ariete. Éste, un tronco de gran masa, acumula energía cinética gracias al trabajo de los hombrecitos en la carrera previa.



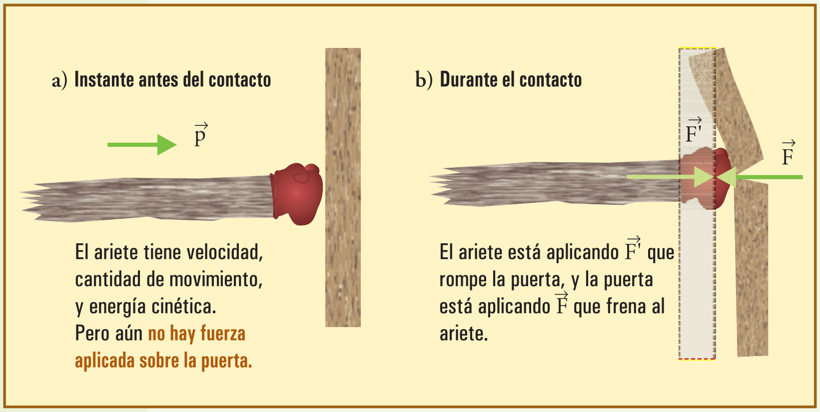


Fig. 6.3. El ariete es detenido por la fuerza $\vec{F}$ que le aplica la puerta. Pero ello no puede ocurrir sin que el ariete deforme (y tal vez rompa) al obstáculo aplicándole la fuerza $\vec{F}'$, y avanzando la distancia necesaria para hacer un trabajo igual a la energía cinética que tenía antes del contacto.

Lo mismo es el caso de golpear con un martillo: si el cuerpo en movimiento encuentra un obstáculo muy duro, le aplicará una fuerza tan grande como sea necesaria para que se desplace la distancia suficiente hasta que el producto *fuerza* × *distancia*, iguale a la energía cinética que el cuerpo debe perder, es decir la que posee inicialmente.

Por otra parte, considerando expresión W = ΔEc, para el caso W > 0, podemos decir que *el trabajo hecho sobre el sistema es energía transferida al mismo*.

Esta es una idea fundamental que podremos profundizar a lo largo de este capítulo, comenzando por el siguiente ejemplo.

Ejemplo desarrollado

Considere un cuerpo de 5 kg que en t_A tiene una velocidad de 3 m/s, y que es empujado durante 10 s, hasta t_B, por una fuerza resultante de 4 N (constante) alineada con la trayectoria.

a) Calcule la velocidad que adquiere el móvil y la distancia recorrida en estos 10 s.

b) Verifique la expresión (6.4), aprovechando para reflexionar sobre el significado de los conceptos.

Desarrollo

a) El movimiento es rectilíneo. Aplicamos la ley del impulso:

$$\begin{aligned} 4\text{ N}\times 10\text{ s} &= 5\text{ kg}\times(v_B - 3\text{ m/s}) \\ v_B &= 11\text{ m/s}; \\ d &= \tfrac{1}{2}(v_A+v_B)\,\Delta t \\ d &= 70\text{ m} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} W &= 4\text{ N}\times 70\text{ m} \\ W &= 280\text{ J} \;; \\ Ec_A &= \tfrac{1}{2}\,5\text{ kg}\times(3\text{ m/s})^2 \\ Ec_A &= 22{,}5\text{ J} \\ Ec_B &= \tfrac{1}{2}\,5\text{ kg}\times(11\text{ m/s})^2 \\ Ec_B &= 302{,}5\text{ J}. \end{aligned}$$

De manera que por un lado podemos verificar la expresión (6.4): 302,5 – 22,5 = 280.

Por otro lado, veamos qué interpretamos acerca de la energía:

El cuerpo tenía inicialmente 22,5 J de energía, y luego pasa a tener 302,5 , es decir 280 J más, cuando se hace sobre él un trabajo de 280 J.

Esto nos dice que todo el trabajo (positivo) hecho sobre el cuerpo ha sido almacenado por éste como energía cinética, y podemos interpretar que cada joule positivo de trabajo que se haga sobre él, es un joule que se le transfiere.

La energía cinética, que depende exclusivamente de la velocidad, o sea del movimiento, es una energía mecánica. Las energías mecánicas son las que se expresan en términos de variables mecánicas: posiciones y velocidades. Veremos otras.

Nota 2. La energía cinética es un escalar positivo

La expresión (6.3) muestra que la energía cinética es siempre positiva independientemente del sentido del movimiento. No puede ser negativa, y sólo puede ser cero si el cuerpo está en reposo. Si un sistema tiene varias partes en movimiento, una parte no puede cancelar la contribución a la energía cinética de otra parte: todas las partes aportan contribuciones de signo positivo. Es claro que no es un concepto vectorial. La energía cinética es un escalar absolutamente independiente de la orientación del movimiento.

Nota 3. Energía cinética de traslación

En un sistema de muchas partículas animadas cada una de diferente velocidad, podríamos expresar la energía cinética total como:

$$Ec = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \qquad (6.6)$$

Si el sistema es un cuerpo rígido, el movimiento más simple es el de traslación pura, en el cual todos los puntos tienen exactamente el mismo movimiento (el mismo vector velocidad). En este caso, todas las v_i^2 saldrían factor común en la suma (6.6), que se transformaría en:

$$Ec_{(traslación\ pura)} = \frac{m v_{CM}^2}{2} \qquad (6.7)$$

En esta expresión m es la masa total, y v_{CM}, la velocidad del centro de masa, es en realidad la velocidad de cualquier punto, ya que todos tienen la misma velocidad.

Si el cuerpo es rígido pero su movimiento no es de traslación pura, entonces es combinación de traslación con rotación (en este caso las $\vec{v}_i$ no son iguales entre sí, ni iguales a $\vec{v}_{CM}$), y la energía cinética (6.6) se escribe como la suma de los correspondientes términos:

$$Ec = Ec_T + Ec_R \qquad (6.8)$$

La energía cinética de traslación, Ec_T, siempre está dada por (6.7), y veremos en el próximo capítulo como se escribe la de rotación, Ec_R.

Fuerza tangencial media

Cuando la fuerza tangencial no es constante, podemos calcular el trabajo por un proceso similar al seguido para calcular el impulso de una fuerza variable: si conocemos la fuerza tangencial para cada posición l a lo largo de la trayectoria, podemos graficarla, y entonces tendremos que el trabajo estará dado por el área entre la gráfica y el eje de abscisas:

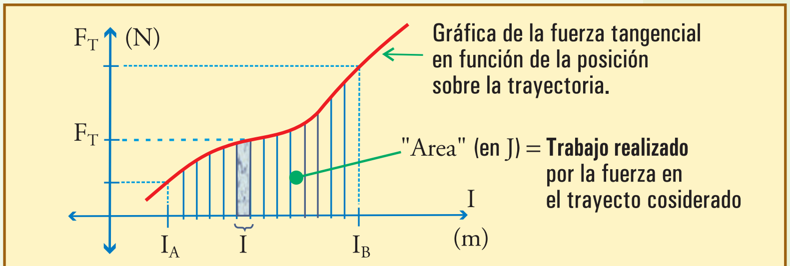


Fig. 6.4. Si la trayectoria se divide en pequeños segmentos de longitud δl, el trabajo en cada uno de ellos, FT δl , es el área del rectángulo de ancho δl y altura F_T. El trabajo total hecho en el intervalo es la suma de todas las contribuciones, o sea, toda el área sombreada.

Nuevamente hay que recordar que el área se calcula con las unidades de los ejes, o sea resulta con unidad de energía.

A veces interesa definir la *fuerza tangencial media*, como aquella que, manteniendo constante el valor, hubiera hecho el mismo trabajo (o sea la misma área) en el mismo trayecto. En este caso:

$$F_{T(\text{media})} = \frac{W_{AB}}{d_{AB}}$$

$$F_{T(\text{media})} = \frac{\text{Área}}{d_{AB}}$$

La Ley del Impulso permite relacionar la fuerza tangencial con las velocidades inicial y final a través del tiempo demorado, según:

$$F_T\,\Delta t = \Delta p$$

El teorema del trabajo y la energía cinética permiten relacionar las mismas cosas, fuerza tangencial con velocidades inicial y final a través de la distancia recorrida, según:

$$F_T\,d = \Delta Ec$$

Si en un problema en el que estamos trabajando con fuerza tangencial y veloci- dades, tenemos el tiempo demorado, podemos aplicar directamente la Ley del Impulso,mientras que si tenemos la distancia recorrida, conviene aplicar trabajo y energía cinética.

Ejemplo

Calcular la fuerza necesaria para detener en 30 metros un cuerpo de masa m = 200 kg que está viajando a razón de 10 m/s.

Desarrollo

Calculemos la energía cinética inicial Ec_0, para aplicar directamente

$$W = \Delta Ec$$
$$W = -Ec_0$$

$$Ec_0 = \frac{200\text{ kg} \times (10\text{ m/s})^2}{2}$$

$$Ec_0 = 10.000\text{ J; entonces } W = -10.000\text{ J},$$

y la fuerza tangencial media es

$$F_T = -10.000 / 30$$
$$F_T = -333{,}3\text{ N}$$

Si quisiéramos aplicar la ley del impulso, deberíamos calcular primero el tiempo demorado. Para ello decimos: supongamos que es un MRUV, con $v_0 = 10$ m/s, y $v_f = 0$, entonces $v_m = 5$ m/s. Para recorrer 30 m se demorarían 30 / 5 = 6 s. El impulso aplicado es igual a la variación de la cantidad de movimiento: - 2.000 kg m/s, entonces la fuerza media tangencial: –2.000 / 6 = –333,3 N.

6.3. Sistemas con fuerzas conservativas

Ya hemos hablado de la energía cinética, que es la forma de almacenar energía en el movimiento de un sistema.

Ahora hablaremos de la energía "potencial", que es aquella que el sistema puede tener aún estando en reposo, en función de las posiciones o deformaciones de las partes.

La denominación potencial hace referencia a la *posibilidad de llegar a ser algo*, y no tiene que ver con la potencia mecánica que definiremos más adelante; una energía potencial, como veremos, debe interpretarse como una capacidad "latente", en el sistema, algo que puede llegar a manifestarse si se dan determinadas condiciones.

La idea básica de un sistema que almacena energía mecánica en forma potencial significa que su estructura o naturaleza es tal que, cuando un agente externo realiza sobre él un trabajo positivo W llevando sus partes desde una posición A hasta otra B, si luego el sistema puede retornar de B a A, lo hace realizando esa misma cantidad de trabajo W (positivo) *sobre el agente externo* (le devuelve la energía antes suministrada).

- **Un ejemplo**

Quien desee subir un cuerpo hasta una cierta posición más elevada, deberá hacer trabajo positivo para ello, ya que el cuerpo no subirá espontáneamente porque la fuerza peso siempre se opondrá a ello. Pero una vez que el cuerpo esté en la posición alta, la fuerza peso tenderá a hacerlo retornar a la posición baja, y si eso ocurre, hará trabajo positivo en el descenso.

Ahora bien, el cuerpo no tendría la capacidad de hacer trabajo bajando si no estuviese en el campo gravitatorio terrestre. De manera que el conjunto {cuerpo, planeta Tierra}, o el conjunto {cuerpo, campo gravitatorio de la Tierra}, es un sistema que almacena energía potencial gravitatoria cuando el cuerpo sube, y puede devolverla al bajar. La **energía potencial gravitatoria** debe ser una función de la altura del cuerpo.

- **Otro ejemplo**

Si alguien estira o comprime un resorte, o deforma cualquier cuerpo elástico, hace trabajo positivo para ello. Pero luego el cuerpo elástico tiende a recuperar su forma inicial, pudiendo él hacer trabajo positivo en ese proceso. Decimos entonces que almacena **energía potencial elástica** al ser deformado, y puede devolverla al recuperar su forma inicial. La energía potencial elástica debe ser una función de la deformación.

Si el cuerpo no es elástico puede quedar deformado sin hacer ningún trabajo luego de ello; ese es un ejemplo de cuerpo que no almacena energía potencial elástica.

Fuerza conservativa y energía potencial

Supongamos un ente o aparato que puede aplicar sobre un cuerpo una fuerza de tales características, que el trabajo que hace sobre el cuerpo al pasar éste de cualquier punto A a cualquier punto B, es exactamente el mismo cambiado de signo que el que hace al pasar el cuerpo de B a A.

De manera que si esta fuerza hace un trabajo negativo en el trayecto AB, lo cual, en virtud de las ideas que hemos enunciado hasta aquí, puede ser considerado como quitar esa cantidad de energía, queda garantizado que si se permite luego que el sistema retorne a la posición inicial A, en ese proceso la fuerza hará exactamente esa misma cantidad de trabajo, pero ahora positivo, es decir, *devolviendo íntegramente toda la energía*. Por esta razón, una fuerza de este tipo es denominada *conservativa*, la designaremos $\vec{F}_C$ (podemos imaginarla como la gravedad, o la fuerza de un resorte). Se considera que en la posición B el ente capaz de aplicar esta fuerza tiene almacenada esa energía en forma potencial, y

Dado que en la definición (6.9') involucra un signo menos, y eso a veces confunde, puede ser útil imaginar un agente externo que actúa equilibrando a F_c y llevando el cuerpo de una posición a otra sin energía cinética. Para este agente será $W_{ext} = - W_{Fc}$, y por lo tanto $\Delta Ep = W_{ext}$. Podemos interpretar esto sin el molesto signo menos, imaginado una situación en la cual el agente hace un trabajo positivo, diciendo que la energía que el agente suministra es almacenada por el sistema como energía potencial.

puede conservarla intacta de esta manera, mientras permanezca en esa posición, todo el tiempo que sea.

Es decir, formalmente la energía potencial sería una función del estado del sistema tal que:

$$Ep_B - Ep_A = \text{ trabajo que } \vec{F}_C \text{ puede hacer en el trayecto } B \rightarrow A \qquad (6.9)$$
$$Ep_B - Ep_A = W_{Fc}(B \rightarrow A)$$
$$Ep_B - Ep_A = -W_{Fc}(A \rightarrow B)$$

Podemos enunciar que en general, cuando en un sistema actúa una fuerza conservativa, $\vec{F}_c$, es posible definir una energía potencial, Ep, función de las posiciones de los cuerpos, tal que:

$$\boxed{\Delta Ep = -W_{Fc}} \qquad (6.9')$$

El signo menos en (6.9') indica que si W_{Fc} es positivo, entonces $Ep_{final} < Ep_{inicial}$, o sea, $\vec{F}_c$ empuja hacia donde la energía potencial disminuye, porque Ep es una energía que se "gasta" a medida que $\vec{F}_c$ hace trabajo.

Nota 4. Condición necesaria para que una fuerza sea consecutiva

Si consideramos la definición de fuerza conservativa, $W_{Fc}(A \rightarrow B) = - W_{Fc}(B \rightarrow A)$, para dos puntos A, B, muy próximos, nos damos cuenta de que $\vec{F}_c$ debe estar igualmente definida en cada posición, independientemente de con qué rapidez o con qué sentido se pase por allí. *En cada posición debe actuar siempre de la misma manera, con igual intensidad y sentido, independientemente de cómo sea el movimiento. Así vemos que fuerzas como la gravitatoria, siempre vertical hacia abajo y de módulo constante, independientemente de que el objeto so-bre el que actúa suba o baje, o la elástica, siempre hacia la posición de equilibrio del resorte, independientemente de que éste se esté estirando o acortando, cumplen con esta condición y son típicos ejemplos de fuerzas conservativas.*
En cambio encontramos que la fuerza de rozamiento invierte su sentido cuando invertimos el sentido en que recorremos un trayecto cualquiera AB, y esto la califica automáticamente como fuerza ***no*** *conservativa: quita energía a la ida ($W_{A \rightarrow B} < 0$), y la vuelve a quitar a la vuelta ($W_{B \rightarrow A} < 0$).*

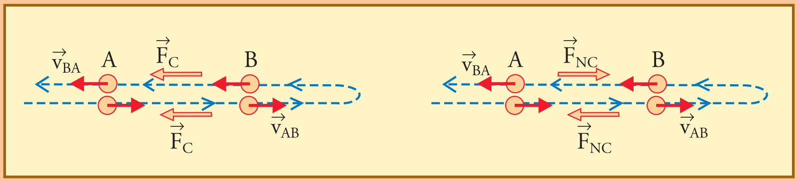


Fig. 6.5. Esquema de cómo actúa una fuerza conservativa (izquierda), y una no conservativa (derecha), mientras un móvil pasa sucesivamente por los puntos A y B en un sentido y luego en el otro.

• Energía potencial gravitatoria

Consideremos un cuerpo de masa m en la vecindad de la superficie de la Tierra, donde el campo gravitatorio es constante. Si colocamos un eje x horizontal y un eje y vertical, positivo hacia arriba, la fuerza peso será: $\vec{P} = (0 ; -m\,g)$.

Una forma útil y simple de calcular el trabajo que hace esta fuerza en un trayecto cualquiera es comenzar considerando un trayecto rectilíneo desde un punto $(x_A ; y_A)$, hasta otro $(x_B ; y_B)$.

$$W_P(AB) = P \cos\alpha \; d_{AB}$$

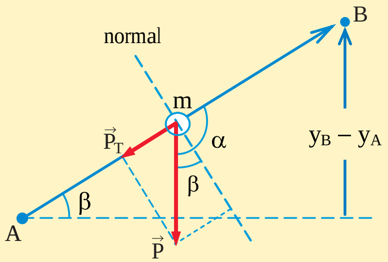


Fig. 6.6. Elementos para definir la energía potencial gravitatoria.

Y teniendo en cuenta que $d_{AB} \cos\alpha = -\Delta y$, resulta:

$$W_P(AB) = -P\,\Delta y \qquad (6.10)$$

Para ver más fácilmente cómo aparece el signo menos, se aconseja razonar con el ángulo β, mostrado en la figura, que es el ángulo que utilizamos siempre en los planos inclinados (β es el ángulo que forma la normal al plano con la vertical, y también es el que forma el plano con la horizontal). Vemos en el esquema (hecho para un caso en que $\alpha > 90°$, o sea $y_B > y_A$), que $\Delta y = d_{AB}\,\text{sen}\beta$, pero como β es lo que α excede de 90°, resulta que $\text{sen}\beta = -\cos\alpha$, y entonces

$$d_{AB} \cos\alpha = -d_{AB}\,\text{sen}\beta$$
$$d_{AB} \cos\alpha = -\Delta y$$

Ahora bien, (6.10) es válida para trayectos AB de cualquier forma, y no sólo rectilíneos. Para convencernos de eso imaginemos que AB está compuesto de varios desplazamientos sucesivos de distinta dirección, A→A'→A''→… etc. → B. Al sumar todas las contribuciones $-P\,\Delta y$ para obtener el trabajo total, tendremos el factor común $-P$ por la suma de todos los Δy sucesivos, cuyo resultado será $-P$ por la diferencia total $y_B - y_A$.

De manera que, si $\Delta Ep = -W_P$, entonces $\Delta Ep = P\,\Delta y$

$$\Delta Ep = m\,g\,y_B - m\,g\,y_A.$$

Esto significa que podemos definir:

$$\boxed{\begin{array}{l} Ep = P\,y \\ Ep = m\,g\,y \end{array}} \qquad (6.11)$$

Vemos aquí cómo se cumple que la fuerza del campo apunta hacia donde disminuye Ep: la fuerza gravitatoria apunta hacia abajo, que es hacia donde disminuye y.

Ahora bien, y representa la altura con respecto a un nivel que ha sido definido arbitrariamente como altura cero (por ejemplo, el nivel del piso, o el nivel del mar, o el punto más bajo de algo, etc.). Es claro que estas elecciones posibles son todas arbitrarias, y ahora nos encontramos con que si cambiamos esta elección, cambia Ep.

¿Qué significa esto?

Esto es una consecuencia natural de la definición misma de lo que es una energía potencial, dada por (6.9) o (6.9'): la energía potencial es una función de la posición que *se define por su variación*.

El valor particular de Ep en un punto cualquiera no tiene significado físico; sólo la tiene su variación entre dos puntos. De manera que si Ep es una función energía potencial correcta para un sistema, Ep + cualquier constante, también lo es.

Para el caso específico de la fuerza gravitatoria, podemos decir que la función energía potencial más general posible será:

$$\boxed{Ep = m\,g\,y + C} \qquad (6.11')$$

Donde C es una constante que se elige arbitrariamente. En general se elige para que Ep sea cero en algún lugar particular. Si no se escribe nada, Ep será cero en $y = 0$ (que de todos modos corresponderá a una altura arbitraria).

Una vez que se eligen estos valores, ya no se cambian, y los resultados con significado físico no serán afectados por estas elecciones, como veremos en ejemplos concretos.

• Energía potencial elástica

Para el caso de una fuerza elástica a lo largo del eje x, si definimos $x = 0$ en la posición de equilibrio, se tiene $F_x = -k\,x$. De manera que la fuerza tangencial es hacia la posición de equilibrio, y hace un trabajo negativo tanto si el resorte es estirado como comprimido. Por lo tanto, si partimos de $x = 0$, y estiramos o comprimimos el resorte hasta cualquier valor x, según (6.9) será:

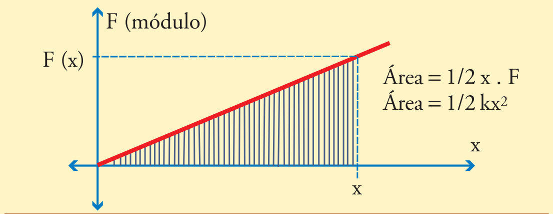


Fig. 6.7. Elementos para definir la energía potencial elástica.

$$Ep(x) - Ep(0) = -W$$
$$Ep(x) - Ep(0) = \text{Área de } |F(x)|$$

De manera que, finalmente:

$$\boxed{Ep_{(elástica)} = \frac{k\,x^2}{2} + C} \qquad (6.12)$$

Donde C es el valor arbitrario de Ep en la posición de equilibrio (generalmente se toma $C = 0$).

Vemos aquí cómo se cumple que la fuerza del campo apunta hacia donde disminuye Ep: la fuerza elástica siempre apunta hacia la posición de equilibrio del resorte, y en (6.12) esta posición es $x = 0$, en la cual la energía potencial tiene su mínimo valor.

• Ejemplo 1

Calcule la fuerza necesaria para estirar 20 cm un resorte de constante elástica k = 3.000 N/m, y calcule también, para el proceso de estirar el resorte: el trabajo que hace un agente externo, el trabajo que hace el resorte sobre el agente, y la energía potencial que almacena el resorte.

• Desarrollo

$$F = k\,\Delta x$$
$$F = 3.000\ (N/m) \times 0{,}2\ m$$
$$F = 600\ N.$$

$W_{ext} = ½\, k\, (\Delta x)^2$

$W_{ext} = \dfrac{3.000 \times 0{,}2^2}{2}$

$W_{ext} = 60$ J;

$W_{resorte} = -\,60$ J;

para justificar estos signos se debería hacer un esquema mostrando que la fuerza que aplica el agente externo actúa en el sentido de la deformación, y la que (por reacción) le aplica el resorte a él, actúa en sentido opuesto.

$$\Delta Ep = 60 \text{ J}$$

Notar que una fuerza de 600 N actuando a lo largo de 20 cm, hubiera hecho un trabajo de 120 J, pero el trabajo fue sólo de 60, porque la fuerza no fue siempre de 600 N: comenzó en cero, y fue aumentando a medida que el resorte se estiraba; llegó a 600 al final. Puede decirse que la fuerza media fue de 300 N, y 300×0,2 sí da 60 J.

Ejemplo 2

Considere un resorte alineado con el eje x que tiene un extremo fijo en x = 0, tal que su energía potencial está dada por la función $Ep(x) = 600\ (N/m) \times (x - 0{,}20\ m)^2$.

a) Encuentre la constante elástica y la posición de equilibrio x_0 del extremo libre del resorte.

b) Encuentre la fuerza que debe aplicar un agente para estirar el extremo libre del resorte hasta $x_1 = 0{,}30$ m. Calcule el trabajo que hace el agente para estirar el resorte y muéstrelo en una gráfica de la función Ep(x).

c) Repita los puntos a) y b) si la función energía potencial hubiese sido $Ep_1(x) = 600\ (N/m) \times (x - 0{,}20\ m)^2 + 10$ J (es decir, la misma Ep(x) más una constante igual a 10 J).

Desarrollo

a) Dado que el coeficiente de x^2, en este caso 600 N/m, en la expresión de la energía potencial elástica, debe ser k/2, podemos deducir que k = 1200 N/m. Por otra parte es claro que el mínimo de la función Ep(x) del enunciado está en x = 0,20 m, ya que ahí vale 0, y en cualquier x mayor o menor (que 0,20 m), Ep tiene algún valor positivo. Por lo tanto, ésa debe ser la posición de equilibrio.

b)

$F = k\,\Delta x$

$F = 1.200\ (N/m) \times (0{,}30 - 0{,}20)$ m

$F = 120$ N

$W_{ext} = \Delta Ep$

$W_{ext} = 600 \times 0{,}1^2 - 0$

$W_{ext} = 6$ J

c) El coeficiente de x^2 sigue siendo 600 N/m, de manera que k = 1.200 N/m.

La función $Ep_1(x)$ tiene otro valor en el mínimo, pero éste sigue estando en x = 0,20 m, de manera que ésa sigue siendo la posición de equilibrio.

La fuerza para estirar el resorte está dada por la misma expresión (independiente de la constante que se pueda agregar a la función Ep) $F = k\,\Delta x$

$$F = 120 \text{ N.}$$

Ahora $Ep_1(0{,}30) = 600 \times 0{,}1^2 + 10$

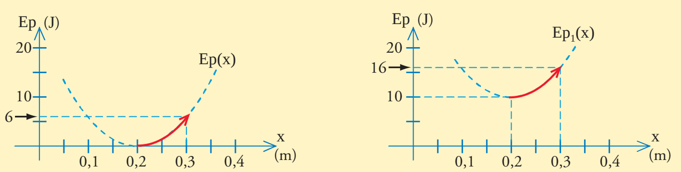
$Ep_1(0{,}30) = 16;$

$Ep_1(0{,}2) = 10;$

$W_{ext} = \Delta Ep_1$

$W_{ext} = 16 - 10$

$W_{ext} = 6$ J



Veamos en las siguientes gráficas cómo juegan los distintos valores.

6.4. Movimiento en presencia de fuerzas conservativas y no conservativas

Supongamos un sistema que consiste en una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa $\vec{F}_C$, y alguna otra fuerza no conservativa, $\vec{F}_{NC}$ (que podría ser aplicada por algún agente, o deberse al rozamiento, o a un motor, etc.).

La fuerza resultante sobre la partícula está dada por: $\vec{F}_R = \vec{F}_{NC} + \vec{F}_C$, y por lo tanto $W_R = W_{NC} + W_{Fc}$. Ahora bien, según el teorema del trabajo y la energía cinética, $W_R = \Delta Ec$, de manera que:

$$W_{NC} + W_{Fc} = \Delta Ec$$

Cuando actúa una fuerza conservativa podemos definir una energía potencial asociada con ella según (6.9), $W_{Fc} = -\Delta E_p$, entonces sustituyendo esto en la expresión anterior queda:

$$W_{NC} - \Delta E_p = \Delta E_c,$$

Esta expresión nos invita a agrupar todas las energías en el miembro derecho:

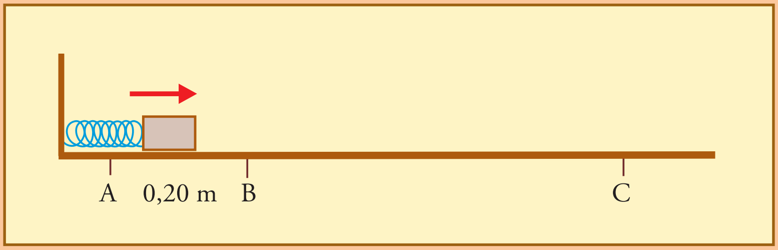
$$W_{NC} = \Delta E_p + \Delta E_c \qquad (6.13)$$

Y llamando energía mecánica total, E_m, a la suma de la cinética y la potencial, podemos escribir:

$$\boxed{\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ W_{NC} &= \Delta E_m \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (6.14) \\ (6.13') \end{aligned}$$

Ejemplo. Resorte empuja, frena el rozamiento

Un cuerpo de 16 kg está en reposo en el punto A de una pista horizontal. Un resorte de constante elástica k = 104 N/m, que está comprimido 20 cm, se suelta y lo impulsa hasta perder contacto con él en el punto B. Entre el cuerpo y el piso actúa una fuerza de rozamiento constante de 50 N, que lo detiene finalmente en un punto C.



1) Dibujar diagramas de cuerpo libre mostrando todas las fuerzas actuantes en cada tramo (entre A y B, y entre B y C).
2) Calcule la velocidad con que el cuerpo pasa por B.
3) Calcule la ubicación del punto C en el que el cuerpo se detiene.

Desarrollo

1) Le llamamos $\vec{F}$ a la fuerza que aplica el resorte, $\vec{P}$ es el peso, $\vec{R}_N$ es la reacción normal (perpendicular) del piso, y $\vec{F}_{NC}$ es la fuerza de roce, que viene a ser la parte tangencial de la reacción del piso.
2) v_B se calcula a partir de la energía cinética en B, para calcular la cual aplicamos: $W_{NC} = \Delta Em$. En esta expresión W_{NC} es el trabajo hecho por el rozamiento, que es la fuerza no conservativa que actúa desde el instante en que se libera el cuerpo. Entre

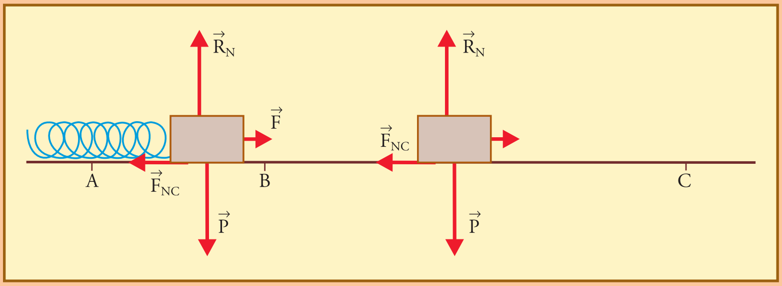
A y B, $W_{NC} = -F_R\, d_{AB}$
A y B, $W_{NC} = -50\ N \times 0{,}2\ m$
A y B, $W_{NC} = -10\ J.$

Dado que B es la posición de equilibrio del resorte, para la energía potencial podemos plantear:

$$Ep_A = 10.000\ (N/m) \cdot \frac{(0{,}2m)^2}{2}$$

$$Ep_A = 200\ J$$

$$Ep_B = 0$$



Y por otra parte, $Ec_A = 0$, con lo cual

$\Delta E_m = Ep_B + Ec_B - (Ep_A + Ec_A)$

$\Delta E_m = Ec_B - 200\ J$

Con estos elementos podemos calcular la energía cinética en B aplicando:

$W_{NC} = -10\ J$

$W_{NC} = \Delta E_m$

$W_{NC} = Ec_B - 200\ J \Rightarrow Ec_B = 190\ J$

Despejando la velocidad de la expresión de Ec, en general se obtiene: $v = (2Ec/m)^{½}$, por lo cual ahora,

$v_B = (2 \times 190/16)^{½}$

$v_B \cong 4{,}87\ m/s$

Es importante notar que Ec_B. también se hubiese podido calcular razonando de una manera menos estructurada, diciendo: el resorte va a impulsar al móvil hasta B dándole una energía igual a la potencial que tiene almacenada en A, es decir, 200 J; y mientras esto ocurre el rozamiento le va a quitar 10 J, de manera que el móvil va a tener, al pasar por B, $Ec_B = 190$ J.

Desde B en adelante el cuerpo se desprende del resorte, y la única fuerza tangencial actuante es la del rozamiento (que además pasa a ser la resultante). De manera que planteamos

$W_{NC} = -F_R\, d_{BC}$

$W_{NC} = Ec_C - Ec_B$

$$W_{NC} = 0 - Ec_B \Rightarrow 50\ N \times d_{BC} = 190\ J \Rightarrow d_{BC} = \frac{190}{50}$$

$$d_{BC} = 3{,}80\ m$$

Debe notarse que también podría haberse calculado la ubicación del punto C de un solo paso, sin calcular v_B, simplemente planteando $W_{NC} = \Delta Em$, para el trayecto AC:

tenemos $Ec_A = Ec_C$

$Ec_A = 0$

por lo cual $\Delta E_m = \Delta Ep$

$\Delta E_m = -Ep_A$

$\Delta E_m = -200\ J$

$$W_{NC} = -F_R\, d_{AC} \Rightarrow d_{AC} = \frac{200\ J}{50\ N}$$

$$d_{AC} = 4\ m$$

La conservación de la energía mecánica

En los casos en los que en un sistema sólo **actúan fuerzas conservativas**, y no existen otras fuerzas, o bien existen otras fuerzas pero **no hacen trabajo**, la aplicación de (6.13) o (6.13') automáticamente nos permite plantear que el movimiento ocurrirá manteniendo la energía mecánica total constante:

$$\text{Si } W_{NC} = 0 \Rightarrow \Delta Em = 0$$

O equivalentemente:

$$Ep + Ec = E_m$$
$$Ep + Ec = \text{constante} \qquad (6.15)$$

Lo cual también puede expresarse diciendo que para dos puntos cualquiera A y B del movimiento, se cumplirá:

$$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$$
$$Ep_A + Ec_A = Em$$

Cada energía puede variar, pero la suma se conserva.

• Ejemplo. Caída libre

Un cuerpo de masa m = 2 kg está cayendo verticalmente. En un instante t_1 pasa por A, a una altura de 100 metros del nivel de referencia (piso) y el módulo de su velocidad es de 20 m/s. Luego, en otro instante t_2, pasa por B, a 40 metros sobre el mismo nivel.

1) Dónde considera el cero de la energía potencial, y de acuerdo con eso calcule la energía mecánica total inicial del sistema .

2) Despreciando la resistencia del aire, determine la energía mecánica total, cinética y potencial del cuerpo cuando se encuentra a 40 metros de altura.

3) Determine la velocidad en ese punto, y la que tendrá luego al llegar a tierra (un instante antes de tocarla).

4) Indique los valores de las energías (mecánicas) potencial, cinética y total, en cada punto: A, B, y C, (inmediatamente antes de tocar el piso), eligiendo:

4.1) energía potencial cero en C;

4.2) energía potencial cero en A;

4.3) energía total cero en C (explique en dónde, aproximadamente estaría $E_p = 0$).

5) Determine el trabajo de la fuerza peso desde A hasta B, y desde B hasta C, y muestre qué tienen que ver esos valores con los anteriores.

• Desarrollo

1) Consideramos arbitrariamente $E_p = 0$, en el piso, en el cual también situamos arbitrariamente el origen del eje y (vertical hacia arriba). De acuerdo con esto, Ep = m g y.

Entonces, $Ec_A = 2\ \text{kg} \times (20\ \text{m/s})^2/2$

$Ec_A = 400\ \text{J}$

$Ep_A \cong 2\ \text{kg} \times 9{,}8\ (\text{N/kg}) \times 100\ \text{m}$

$Ep_A = 19{,}6\ \text{N} \times 100\ \text{m}$

$Ep_A = 1.960\ \text{J}$; $Em_A \cong 2.360\ \text{J}$

2) Planteamos conservación de la energía mecánica: $Em_B = 2.360\ \text{J}$; y dado que $Ep_B = 19{,}6\ \text{N} \times 40\ \text{m}$

$Ep_B = 784\ \text{J}$

la energía cinética debe ser $Ec_B = 2.360 - 784 = 1.576$ J

$Ec_B = 1.576$ J

3) Despejando la velocidad de la expresión de Ec, en general se obtiene: $v = (2Ec/m)^{½}$, por lo cual: $v_B = (2\times1.576/2)^{½}$

$v_B = 39,7$ m/s

Para la llegada al suelo será $Ep_C = 0$, con lo cual $Ec_C = 2.360$ J , y $v_C = (2\times2.360/2)^{½}$

$v_C = 48,6$ m/s.

4) Se registran los resultados de este punto en las siguientes tablas:

4.1

	Ep	Ec	E_{total}
A	1.960	400	2.360
B	784	1.576	2.360
C	0	2.360	2.360

4.2

	Ep	Ec	E_{total}
A	0	400	400
B	-1.176	1.576	400
C	-1.960	2.360	400

4.3

	Ep	Ec	E_{total}
A	-400	400	0
B	-1.576	1.576	0
C	-2.360	2.360	0

Para determinar el punto en el cual la energía potencial sería cero en el caso 4.3), escribo que Ep = mgy + C, y trato de encontrar C. Eligiendo y = 0, encontramos que C = -2.360 J, por lo tanto, para que Ep sea cero, y = 2.360/19,6

y = 120,4 m.

Esta es la altura desde la cual habría que haber soltado este cuerpo desde el reposo para que cayera de esta forma, ya que en ese punto, con Ep = 0, y Ec = 0, daría $E_m = 0$.

Es muy instructivo mirar estas tablas porque allí se advierte rápidamente:

a) Tanto la energía potencial como la total cambian con la elección arbitraria del cero de la potencial, no así la columna de las energías cinéticas, cuyo valor tiene sentido físico en sí mismo, ya que determina la velocidad.

b) Una vez conocido el valor de la energía mecánica total en un punto, por la conservación, vale para todos los puntos.

c) La suma de las dos primeras columnas siempre debe dar el valor de la tercera.

d) La energía potencial (y también la total, aunque en este ejemplo no se vea) puede ser negativa, no así la cinética.

e) Una vez que el cuerpo llega al nivel y = 0 (si no choca con algo), seguirá aumentando su energía cinética mientras aumenta negativamente su energía potencial en los valores negativos de y. Se considera que Ep *disminuye* cuando aumenta negativamente: $-1.960 < -1.176 < 0$, etc.

5) $W_P(AB) = 19,6\ N\times60$ m

$W_P(AB) = 1176$ J; $W_P(BC)$

$W_P(AB) = 19,6\ N\times40$ m

$W_P(AB) = 784$ J

(ambos positivos porque fuerza y desplazamiento tienen igual sentido).

Con estos valores podemos corroborar el teorema del trabajo y la energía cinética: $Ec_B = Ec_A + W_P(AB)$, y también: $Ec_C = Ec_B + W_P(BC)$.

También podemos corroborar que el peso hace trabajo a expensas de la Ep: $Ep_B = Ep_A - W_P(AB)$, y también: $Ep_C = Ep_B - W_P(BC)$.

• Movimientos con vínculos

En muchos casos prácticos hay sistemas con uno o más "vínculos" que determinan o modifican la trayectoria de la partícula, como por ejemplo un sistema de rieles o guías fijos, o el hilo de un péndulo. Si estos vínculos tienen ciertas características ideales (ausencia

Un caso importante es el de cuerpos que se deslizan por pistas ideales sin rozamiento. Para estos casos la única fuerza que trabaja es el peso, y la conservación de la energía mecánica se traduce en que, para dos puntos A y B de la pista o trayectoria: $\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + m\, g\, y_A = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, y_B$. *Simplificando la masa se obtiene lo visto en el capítulo anterior, en la parte de péndulos y planos inclinados: la velocidad de los vehículos que viajan por carreteras de cualquier forma, en condiciones ideales de ausencia de rozamiento y sin otras fuerzas motrices más que el peso, es absolutamente independiente de la masa. Ahora además podemos calcular esta velocidad para una pista de cualquier forma, a partir de la expresión anterior:*

$$v_B^2 - v_A^2 = 2\, g\, (y_A - y_B) \qquad (6.16)$$

O bien:

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\, g\, \Delta y \qquad (6.16')$$

Nótese la semejanza con las expresiones (5.13) y (5.13') del MRUV, lo cual corresponde porque la caída libre vertical es a la vez un caso de MRUV, y de conservación de la energía. Ahora podemos ver que estas expresiones valen para cualquier caso de conservación de la energía en un campo gravitatorio uniforme, con trayectoria de cualquier forma, aunque no sea ni rectilínea, ni uniformemente variada la velocidad.

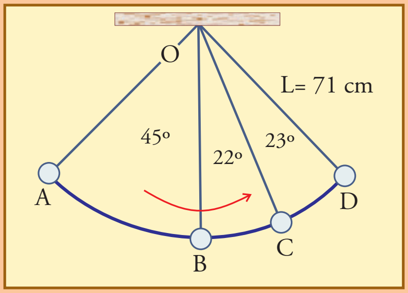
de rozamiento, por ejemplo) tales que *no disipan energía*, permiten seguir planteando la conservación de la energía mecánica.

En estos casos los vínculos aplican fuerzas sobre la partícula, y éstas actúan determinando la trayectoria; pero consideramos que tienen la característica ideal de no realizar trabajo. Para esto las fuerzas de vínculo no deben tener componentes tangenciales, es decir que deben ser fuerzas *normales a la trayectoria* que determinan.

En estos casos, se plantea la conservación de la energía mecánica total, con la **misma función energía potencial**, dependiente sólo de la fuerza conservativa que esté en juego, e independiente de estos vínculos y sus fuerzas.

Ejemplo. Péndulo

Considere el péndulo de la figura, consistente en un cuerpo de m = 500 g suspendido de un hilo de 71 cm de longitud, que se suelta, a partir del reposo, en la posición A, a 45º de la vertical. No se consideran rozamientos.

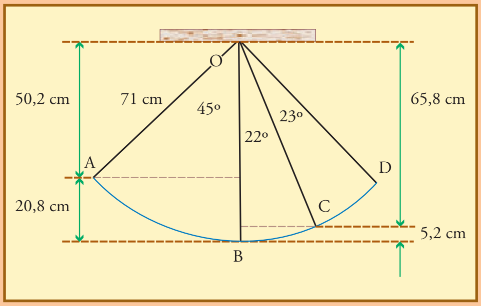


a) Calcule la velocidad del cuerpo en B, en C, y en D.

b) Indique los valores de las energías (mecánicas) potencial, cinética y total, en cada punto: A, B, C, y D, eligiendo:
  - **b.1)** energía potencial cero en B;
  - **b.2)** energía potencial cero en A;
  - **b.3)** energía potencial cero en el punto de suspensión.

c) Dibuje cualitativamente todas las fuerzas actuantes sobre m en los puntos B, C, y D. Explique el efecto de cada fuerza sobre el movimiento en el instante correspondiente.

Desarrollo



a) El hilo es un vínculo que obliga al cuerpo a seguir la trayectoria con forma de arco de circunferencia, y al hacerlo provoca la aparición de una fuerza cuyo valor se va ajustando en cada instante según la ley del impulso para las fuerzas normales. Pero esta fuerza no tiene componente tangencial, y por ello no hace trabajo, y podemos ignorarla para plantear la conservación de la energía mecánica, la cual se hace simplemente con la fuerza peso. De manera que podemos calcular las velocidades aplicando las expresiones (6.16) o (6.16'), para lo que sólo necesitamos las alturas de los puntos.

Tenemos $y_A - y_B = 0{,}71 \text{ m} - 0{,}71 \text{ m} \times \cos 45°$
$y_A - y_B \cong 0{,}710 - 0{,}502$
$y_A - y_B \cong 0{,}208 \text{ m}$

$y_C - y_B = 0{,}71 \text{ m} - 0{,}71 \text{ m} \times \cos 22°$
$y_C - y_B \cong 0{,}710 - 0{,}658$
$y_C - y_B \cong 0{,}052 \text{ m}$

$y_A - y_C = 0{,}208 \text{ m} - 0{,}052 \text{ m}$
$y_A - y_C = \cong 0{,}156 \text{ m}$; $y_D = y_A$

Entonces $v_B \cong \sqrt{(0 + 2\times 9{,}8\times 0{,}208)}$
$v_B \cong 2{,}02 \text{ m/s}$

$vC \cong \sqrt{(0 + 2\times 9{,}8\times 0{,}156)}$
$vC \cong 1{,}75$ m/s (vc también puede calcularse a partir de v_B:
$v_C \cong \sqrt{(2{,}02^2 - 2\times 9{,}8\times 0{,}052)}$
$v_C \cong 1{,}75$ m/s); $v_D = 0$

b) Elegimos $Ep_B = 0$; Ep_A
$Ep_B \cong 0{,}5\text{kg} \times 9{,}8 \text{ (N/kg)} \times 0{,}208\text{m}$
$Ep_B \cong 1{,}02$

$Ep_C \cong 0{,}5\text{kg} \times 9{,}8 \text{ (N/kg)} \times 0{,}052\text{m}$
$Ep_C \cong 0{,}25 \text{ J}$

Por otra parte las energías cinéticas resultan:
$Ec_A = 0$;
$Ec_B \cong \dfrac{0{,}5\times 2{,}02^2}{2}$

$Ec_B \cong 1{,}02$ J; $Ec_C \cong \dfrac{0{,}5\times 1{,}75^2}{2}$

$Ec_C \cong 0{,}77$ J; $Ec_D = 0$

Efectuando todas las sumas se verifica la conservación, ya que todas dan $Ec + Ep \cong 1{,}02$ J.
Para las otras elecciones de energía potencial cero, simplemente debemos sumar a las columnas de Ep y de E_{total} lo que haga falta para que se cumpla lo pedido y quede inalterada la columna de la Ec. Los resultados de están en las siguientes tablas:

b.1

	E_p	E_c	E_{total}
A	1,02	0	1,02
B	0	1,02	1,02
C	0,25	0,77	1,02
D	1,02	0	1,02

b.2

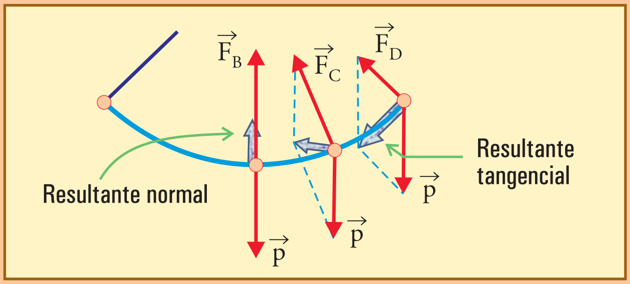
	E_p	E_c	E_{total}
A	0	0	0
B	-1,02	1,02	0
C	-0,77	0,77	0
D	0	0	0

b.3

	E_p	E_c	E_{total}
A	-2,46	0	-2,46
B	-3,48	1,02	-2,46
C	-3,23	0,77	-2,46
D	-2,46	0	-2,46

c) Las únicas fuerzas actuantes son, el peso, siempre igual, y la fuerza del hilo, siempre alineada con él, hacia el punto de suspensión. La fuerza del hilo tiene módulo variable de tal manera que supera a la componente normal del peso en la cantidad exacta necesaria para curvar la trayectoria: $F_N - P_N = m\,v^2 / 2$.

Así tenemos que en A (y lo mismo ocurrirá en D), $v_A = 0$, F_N iguala a P_N, y la resultante es exactamente tangencial, como se requiere para que el movimiento se inicie en dirección tangencial.



En el punto más bajo, B, hay una resultante vertical, hacia arriba, que curva la trayectoria, y no hay fuerza tangencial. Por ello la velocidad, que ha estado aumentando hasta allí, deja de hacerlo, y comenzará a disminuir.
En cualquier punto como el C, la resultante tiene una componente tangencial que va frenando el movimiento, y sigue teniendo una componente normal (variable) que curva la trayectoria.

Si hubiese varias fuerzas conservativas, $\vec{F}_{C1}$, $\vec{F}_{C2}$, ... etc. actuando sobre la partícula, nada cambiaría en los razonamientos.
Para cada fuerza conservativa hay una energía potencial definida de la manera que ya se explicó:

$$\vec{F}_{C1} \rightarrow Ep_1, \quad \text{tal que:} \quad \Delta Ep_1 = - W_{Fc1}$$
$$\vec{F}_{C2} \rightarrow Ep_2, \quad \text{tal que:} \quad \Delta Ep_2 = - W_{Fc2}$$
Etc.

El trabajo total se puede expresar en dos términos: uno que contiene el trabajo de todas las fuerzas conservativas, y otro que contiene el trabajo de las demás, a las que llamaremos $\vec{F}_{CN}$:

$$W_{total} = \sum W_{Fc} + \sum W_{NC}$$

En el término $\sum W_{Fc}$ sumamos los trabajos que vamos a reemplazar con variaciones de energías potenciales, y en el otro quedan los de las demás fuerzas (W_{NC}).
Si aplicamos $W_{total} = \Delta Ec$, y sustituimos $\sum W_{Fc}$ por las variaciones de las energías potenciales correspondientes tenemos:

$$W_{total} = (-\Delta Ep_1 - \Delta Ep_2 - \Delta Ep_3 \ldots) + W_{NC}$$
$$W_{total} = \Delta Ec$$

Al igual que en (6.10), si reunimos todas las variaciones de energía del lado derecho llegamos a:

$$W_{NC} = \Delta Ec + \Delta Ep_1 + \Delta Ep_2 + \Delta Ep_3 \ldots$$

Vemos que siempre seguirá siendo válida la expresión (6.13'), $W_{NC} = \Delta E_m$, siendo la energía mecánica total, E_m, la suma de la cinética más todas las potenciales:

$$E_m = \underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{\text{única } Ec} + \underbrace{Ep_1 + Ep_2 + \ldots}_{Ep_{total}}$$

$$E_m = Ec + E_{ptotal} \qquad (6.15')$$

Dicho con otras palabras, la suma (vectorial) de todas las fuerzas conservativas sería una fuerza resultante $\vec{F}_C$, también conservativa, la cual define una energía potencial total $E_{ptotal} = \sum Ep_i$, que funciona exactamente con la mismas expresiones de cualquier Ep.

En el punto D la componente tangencial ha logrado detener el movimiento, y lo hará recomenzar instantáneamente. En ese instante exacto la resultante normal es nula, y por ello el movimiento recomienza en la dirección de la resultante, que es tangencial.

En el punto más bajo, B hay máxima fuerza del hilo, pues es máxima la velocidad, y por ello debe ser máxima la fuerza resultante normal. Podría pensarse que al ser ésta la posición de equilibrio del péndulo, la fuerza resultante allí debería ser nula, pero en realidad, por ser posición de equilibrio de una oscilación, la que tiene que ser nula es la resultante tangencial, cosa que se cumple. Ahora bien, dado que la trayectoria es curva, allí tiene que haber una resultante normal. No debe haber equilibrio de las fuerzas en B (a menos que el cuerpo esté en reposo allí), porque si lo hubiese la trayectoria no se curvaría.

Ejemplo

Un cuerpo se cuelga suavemente de un resorte de constante elástica k = 400 N/m y 15 cm de longitud en equilibrio, el cual queda estirado (en reposo) hasta una longitud x_1 = 24 cm, como se ilustra en el ejercicio 5.6, de fin del capítulo anterior.

a) Calcule la masa de este cuerpo.

b) Escriba la función energía potencial de este sistema, Ep(x), eligiendo arbitrariamente que sea cero en la posición de equilibrio del resorte (x_0). Grafíquela y utilice la gráfica para corroborar sus respuestas al ejercicio 5.6, en el cual se pedía (para este mismo sistema masa resorte) calcular el trabajo que hace un agente externo para estirar el resorte hasta x_2 = 30 cm, y entre qué valores de x oscila el cuerpo en el extremo del resorte después de que se lo suelta.

Desarrollo

a) La fuerza elástica se equilibra con el peso

$\rightarrow k\,(x_1 - 15\text{ cm}) = 36$ N

$\rightarrow k\,(x_1 - 15\text{ cm}) = m\,g \rightarrow \quad m = \dfrac{36}{9{,}8}$

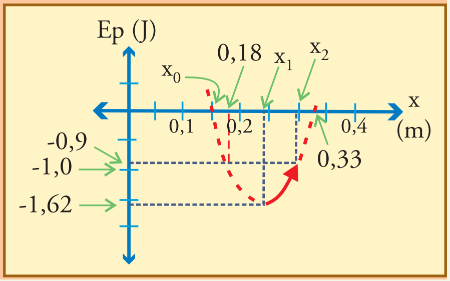
$m \cong 3{,}67$ kg

b) $Ep(x) = ½\ 400\ (x - 0{,}15)^2 - 36\ x + C$, función de segundo grado, que debe anularse en x = 0,15 m

$\rightarrow \quad Ep(x{=}0{,}15) = -36{\times}0{,}15 + C$

$\quad Ep(x{=}0{,}15) = 0 \rightarrow C = 5{,}40.$

De manera que $Ep(x) = 200(\text{J/m}^2)\ (x - 0{,}15\text{m})^2 - 36(\text{J/m})\ x + 5{,}40$ J



Para graficar esta función podemos encontrar sus valores en varios puntos, como Ep(0,24) = –1, 62; Ep(0,33) = 0; Ep(0,30) = – 0,90
Ep(0,30) = Ep(0,18).
Podemos contestar el trabajo que debe hacer el agente para estirar el resorte desde x_1 a x_2:

$W_{ext} = Ep(x_2) – Ep(x_1)$
$W_{ext} = – 0,90 – (–1,62)$
$W_{ext} = 0,72$ J.

Dado que además la gráfica es simétrica con respecto a la posición de equilibrio del sistema con el cuerpo suspendido ($x_1 = 0,24$), inferimos que la oscilación debe ser simétrica respecto de ese punto, es decir, debe ocurrir entre 0,30 y 0,18 m. Eso se corrobora viendo que Ep(0,18) = Ep(0,30)
Ep(0,18) = –0,90 J,
pero ésa es la E_{total}; de manera que x = 0,18 debe ser el punto en el cual el cuerpo se detiene, ya que allí Ec = 0.
Como comentario válido para este caso es interesante decir que una función cuadrática como la ener-gía potencial elástica, más una lineal, como la gravitatoria, da por resultado otra función cuadrática, que es la misma anterior, con la posición de equilibrio corrida a otro lugar, y con la suma de alguna constante que es físicamente irrelevante. Por eso es que el cuerpo oscila de la misma manera suspendido del resorte que horizontalmente, alrededor de la correspondiente posición de equilibrio de cada caso.

- **Ejercicio matemático**

Muestre que la función energía potencial del ejemplo recién desarrollado puede escribirse:
$Ep(x) = ½\, k\, (x – x_1)^2 – 1,62$ J.

6.5. Conservación de la energía y primer principio de la termodinámica

La situación en la cual la energía mecánica de un sistema se conserva, es una situación absolutamente ideal, que en el mundo macroscópico sólo se da en grados de aproximación mayor o menor.

Es claro que no existe *un principio de conservación de la energía mecánica*, desde que la expresión (6.13’), $W_{NC} = \Delta E_m$, prevé la posibilidad de la variación de la misma en un sistema que puede estar totalmente aislado. En esta afirmación es importante recordar que el miembro izquierdo de (6.13’) representa trabajo de fuerzas que a veces se denominan erróneamente “exteriores”, pero que pueden ser perfectamente interiores. El ejemplo más simple es el de un reloj de cuerda (de los antiguos relojes de cuerda), que funciona a expensas de cierta energía elástica acumulada en la “cuerda”, que es un resorte espiral. Cuando un agente externo carga esta cuerda de energía, el reloj funciona durante un tiempo, hasta que esa energía se agota. Lo que disipa su energía mecánica son los rozamientos, total y completamente interiores (para una discusión más completa ver el Apéndice 5).

Esto sucede en cualquier sistema mecánico aislado.

Sin embargo, una de las propiedades definitorias de la energía es su conservación. Realmente, sí existe un principio general de conservación de la energía, que se cumple en todas las situaciones concebibles.

No dice que se conservan las formas mecánicas de la energía, sino que se conserva la energía en general, pudiendo desaparecer de una forma y continuar existiendo en otra/s.

La forma típica para hacer cualquier balance de energía en la vida práctica tiene que ver con los aspectos térmicos, por eso **este principio general de conservación se denomina "Primer Principio de la Termodinámica"**. Este nombre obedece al proceso en el que se desarrollaron las ideas de energía (la Revolución Industrial), en el que se unió lo térmico con la dinámica, en la lucha por entender y mejorar las máquinas térmicas.

Este principio tiene el siguiente enunciado muy simple, que por razones obvias sólo considera formas térmicas y mecánicas de suministrar energía:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Primer Principio de la Termodinámica}\\ Q + W_{ext} = \Delta E\end{array}} \qquad (6.17)$$

En donde:

- Q es la cantidad de energía suministrada como calor, es decir *por simple contacto o proximidad con cuerpos a diferente temperatura*. Q positivo significa calor transferido al sistema por un cuerpo más caliente, y a la inversa, Q negativo significa calor transferido por el sistema a cuerpos más fríos.
- W_{ext} es el t*rabajo mecánico hecho por las fuerzas exteriores actuantes sobre el sistema*. W_{ext} positivo significa energía suministrada al sistema mecánicamente, y viceversa, W_{ext} negativo significa energía que el sistema transfiere mecánicamente a otros sistemas.
- Finalmente E es la energía del sistema, de cualquier tipo que sea. Una cantidad que se compone de contribuciones mecánicas, térmicas, y de todo tipo, que depende del estado del sistema. No es posible dar una expresión general para la energía, sino expresiones particulares para cada tipo o forma de energía. Hemos visto, en páginas anteriores, expresiones para casos típicos simples de energías mecánicas. Hay una variedad inagotable de posibilidades de la energía para distintos sistemas y fenómenos.

Se le pueden agregar a (6.17) otros términos que contemplen el ingreso o salida de energía del sistema en procesos de otro tipo, además de los mecánicos y térmicos, con tal de respetar la idea fundamental de la conservación de E. Teniendo en cuenta esas posibilidades, no hay excepciones a este principio: es un Principio.

Es muy importante entender que la energía que ingresa de una forma, *no tiene porqué almacenarse de esa forma*.

En cualquier situación de movimiento con fricción (como los experimentos del conde RUMFORD, o de JOULE, que sirvieron para elaborar esta teoría, y sobre los cuales se puede ampliar en el Apéndice 6), se eleva la temperatura de un sistema haciendo trabajo sobre él, sin ponerlo en contacto con algo más caliente, es decir:

$W > 0$, pero $Q = 0$, y el único efecto es que se eleva la temperatura.

Es decir, se suministra energía mecánicamente, pero se almacena térmicamente

Lo mismo sucede con cualquier sistema calefactor eléctrico, al sistema entra energía eléctrica, pero lo único que cambia en el sistema es que eleva su temperatura (es claro que no almacena energía eléctrica).

Unidades

Desde el momento en que se aceptan (6.17) o sus variantes como referente máximo para el tratamiento de cualquier energía, y una vez aceptada la definición de trabajo, Q y E tienen que tener la misma unidad SI que el trabajo, o sea, J = N·m.

Ahora bien, dado que el proceso de definición de la energía obligó a juntar ideas de mecánica, con ideas sobre el calor, que se habían desarrollado independientemente, resultó natural que la ciencia del calor tuviera ya sus unidades, entonces hubo que determinar equivalencias entre las mismas.

La unidad natural para cantidad de calor, la caloría, cal, que se define como la cantidad de calor para elevar en 1ºC la temperatura de 1 g de agua (específicamente de 15,5 a 16,5 ºC), es una unidad (no SI) de energía muy aceptada.

La equivalencia con el joule es:

$$1 \text{ cal} = 4{,}185 \text{ J}$$
$$1 \text{ J} \cong 0{,}239 \text{ cal}$$

6.6. Potencia mecánica

El concepto de potencia es un concepto central en el ámbito industrial, y también en el cotidiano, porque tiene que ver con todos los artefactos que una persona utiliza.

Cualquier aparato está diseñado para trabajar, entregar o utilizar energía con determinado ritmo, es decir cierta cantidad por unidad de tiempo, manteniendo ese ritmo mientras sea necesario. En general para adquirir un motor se tiene en cuenta, por ejemplo, no cuánto trabajo puede hacer, ya que eso depende del tiempo que funcione, sino cuánto trabajo puede hacer por segundo, lo que se denomina "potencia".

Se define ***potencia mecánica*** como la cantidad de trabajo hecha por unidad de tiempo, es decir algo como el ritmo al cual se realiza el trabajo, o la *intensidad del proceso* de trabajar:

$$\boxed{Potencia = \frac{W}{\Delta t}} \qquad (6.18)$$

Y de la misma manera, dado que el trabajo sólo se puede hacer a expensas de la cantidad de energía que se absorbe, también se llama potencia, en general, a la cantidad de energía de cualquier tipo que se absorbe o transforma en cualquier otra por unidad de tiempo:

$$\boxed{Potencia = \frac{\Delta E}{\Delta t}} \qquad (6.18')$$

Todas las luces, los motores, artefactos electrodomésticos, etc., se eligen en función de su potencia.

• Unidades

La unidad S.I. de potencia es el *watt*, castellanizado como *vatio*, que se simboliza con *W*, denominado así en honor al ingeniero escocés James WATT (1736-1819), inventor de las principales mejoras de las primeras máquinas de vapor: 1 watt es la potencia mecánica correspondiente a la realización de 1 joule en 1 segundo:

$$1\text{W} = 1\text{J} / 1\text{s} \qquad (6.19)$$

(No confundir la letra "W" utilizada para trabajo, con el símbolo del watt).

Dado que el joule es una unidad relativamente pequeña de energía, el watt también resulta una unidad más o menos pequeña de potencia para los artefactos utilizados en el hogar.

Una lámpara pequeña consume 20 W, una muy luminosa como para una habitación 100 W, y una lámpara de alumbrado público cerca de 200 W. Un motor eléctrico de cortadora de césped pequeña puede consumir 250 W, y un motor de automóvil puede estar alrededor de 70 kW.

Las empresas distribuidoras de energía eléctrica facturan a sus usuarios un monto correspondiente a toda la energía (eléctrica) suministrada en un bimestre, y utilizan una unidad particular para ello, denominada kilowatt-hora (kWh), para reemplazar al joule que es demasiado pequeño (aunque lo que correspondería científicamente sería utilizar múltiplos del joule).

De manera que en la práctica industrial se define:

1 *watt-hora* = trabajo que se hace en 1 hora trabajando con una potencia de 1watt.

1 *kWh* = trabajo que se hace en una hora trabajando con una potencia de 1kW.

Dado que según (6.18) o (6.18'), ΔE = Potencia × Δt, resulta:

$$1 \text{ Wh} = 1\text{W} \times 3.600 \text{ s}$$
$$1 \text{ Wh} = 3.600 \text{ J}$$
$$1 \text{ kWh} = 1.000 \text{ W} \times 3.600 \text{ s}$$
$$1 \text{ kWh} = 3{,}6\times106 \text{ J}$$
$$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \text{ MJ}$$

Un hogar mediano consume unos 400 kW·h por bimestre.

Otras unidades industriales de potencia, que no son S.I., son el HP (horse-power: caballo de potencia) y el CV (caballo de vapor). Ambas unidades surgieron durante la Revolución Industrial, y como sus nombres lo indican, toman como patrón la capacidad de ritmo promedio de trabajo de un caballo. Ambas equivalen aproximadamente a ¾ de kW, y van cayendo en desuso.

• Ejemplo 1

Un calefactor eléctrico de inmersión es capaz de elevar la temperatura de 2 litros de agua desde los 20 hasta los 90 ºC en 5 minutos.

a) Calcular la energía empleada en este proceso, y la potencia del calefactor.

b) Calcular la cantidad de kWh que aporta esta operación al consumo eléctrico del hogar.

• Desarrollo

a) En este proceso el calefactor toma una cierta cantidad de energía eléctrica de la red domiciliaria y la suministra como calor al agua. Sabiendo que se requiere 1 cal para elevar la temperatura de cada gramo de agua en 1 ºC, podemos calcular que para este caso se necesitarán:

$$Q = 1(\text{cal/g·ºC}) \times m \times \Delta T$$
$$Q = 1(\text{cal/g·ºC}) \times 2.000 \text{ g} \times 70 \text{ ºC}$$
$$Q = 140\times103 \text{ cal}$$
$$Q = 140 \text{ kcal}$$

Para expresar esa energía en J utilizamos la conversión 1 cal = 4,185 J, y resulta $Q = \Delta E$

$$Q = 140 \times 4{,}185 \Rightarrow Q \cong 586 \text{ kJ}$$

La potencia es $P = \Delta E / \Delta t$

$$P = 1{,}95 \text{ kW}$$

b) El kWh es unidad de energía: 1kWh = 3.600 kJ; $\Delta E = 586/3.600$

$$\Delta E = 0{,}163 \text{ kWh}$$

También se podría calcular multiplicando la potencia en kW por el tiempo en horas: 1,95×(5/60) = 0,163 kWh.

Ejemplo 2

Un automóvil cuya masa (incluyendo ocupantes) es de 900 kg, viaja 50 km por una ruta horizontal a razón de 80 km/h, sufriendo una fuerza de rozamiento (esencialmente por parte del aire) de 700 N.

a) Calcule la potencia mecánica efectiva que aplica el vehículo al piso en estas condiciones.

b) Si se supone que el motor aprovecha el 40 % del poder calorífico del combustible para producir trabajo, y que el 20 % de ese trabajo se disipa en los rozamientos internos de los mecanismos del vehículo sin transferirse al piso, calcule la energía total del combustible que se consume en el trayecto.

c) Si el combustible utilizado es nafta, con un poder calorífico de aproximadamente 9.000 kcal/litro, calcular la cantidad de nafta consumida.

Desarrollo

a) El trabajo mecánico para vencer el rozamiento de 700 N, a lo largo de 50 km, es $F\,d \cong 3.500 \times 10^4$ J

$F\,d = 35$ MJ.

Como el tiempodemorado es $\Delta t = \frac{50}{80}$

$\Delta t = 0{,}625$ h

$\Delta t = 2.250$ s

la potencia mecánica resulta $P \cong 35$ MJ / 2.250 s

$P \cong 15{,}5$ kW

(que en HP, sería aproximadamente 21 HP).

Es importante advertir que la energía cinética es irrelevante aquí, ya que si pensamos en que apagamos el motor y dejamos que el vehículo avance a expensas de la energía almacenada, ella sólo le alcanzaría para recorrer una muy pequeña fracción de los 50 km. Si calculamos obtenemos: 80 km/h $\cong$ 22,2 m/s;

$Ec \cong 900 \times 22{,}2^2/2$

$Ec = 222$ kJ

$Ec \cong 0{,}2$ MJ.

b) Si E es la energía total del combustible consumido, el enunciado dice que: 35 MJ $\cong 0{,}4 \times (1 - 0{,}2) \times E$, entonces

$E \cong 109$ MJ

$E \cong 26 \times 10^3$ kcal

c) Esta cantidad de energía es la que se obtendría a partir de $\frac{26 \times 10^3}{9.000}$ = -2,9 litros de nafta.

Ejemplo 3

Considere un martillo de 500 g de masa, que se utiliza para clavar horizontalmente un clavo en una madera. Para cada golpe se impulsa el martillo hasta que adquiere una velocidad de 10 m/s, velocidad con la cual choca, y en 5 golpes hunde completamente el clavo, de 6 cm de longitud.

a) Calcule la fuerza media que debió vencer el clavo para penetrar.

b) Estime una longitud del recorrido del martillo mientras es impulsado, y con ella calcule la fuerza media que se le debió aplicar.

c) Explique cómo es el juego de las energías durante el choque. Estime las cantidades o porcentajes de cada una: ¿cuánto trabajo, cuánto calor, cuánta y cuál energía de otro tipo?

Desarrollo

a) Designamos:

t_0: instante de velocidad nula del martillo, inmediatamente antes de comenzar a ser impulsado hacia delante.

t_1: instante previo al contacto del martillo con el clavo

t_2: instante en que clavo y martillo se detienen luego de penetrar (el clavo) 6/5 = 1,2 cm en la madera.

Según los datos $Ec(t_1) = Ec_1$

$$Ec(t_1) = \frac{0{,}5\ kg\ (10\ m/s)^2}{2}$$

$$Ec(t_1) = 25\ J,$$

de manera que si aplicamos $W_{FR} = \Delta Ec$ para el *sistema martillo* (en donde W_{FR} es el trabajo de la fuerza resultante), obtenemos: entre t_0 y t_1: W_{FR} = 25 J = trabajo de la fuerza que impulsa al martillo;
entre t_1 y t_2: W_{FR} = –25 J = trabajo de la fuerza con que la cabeza del clavo frena al martillo;
Ahora bien, por acción-reacción, este último trabajo, cambiado de signo, es el que hace el martillo sobre el clavo hundiéndolo, que por lo tanto es también 25 J. Como además el clavo tiene velocidad nula tanto en t_1 como en t_2, si le aplicamos la misma expresión obtenemos que W_{FR} sobre él es nulo en este intervalo, y por tanto, la fuerza media que lo empuja es igual en valor absoluto a la que lo frena, y podemos calcularla sabiendo que hace un trabajo de 25 J en 1,2 cm: $F = 25\ J / 0{,}012\ m$

$$F \cong 2{,}08\times10^3\ N$$

Es decir, esta parte es exactamente lo que está mostrado en el ejemplo de los soldados que atacan la puerta con un ariete, en el cual se dice que la energía cinética del ariete representa su capacidad de hacer trabajo empujando y rompiendo la puerta.

b) La fuerza media que impulsa al martillo, por otra parte se averigua de la misma manera que la que frena al clavo: si estimamos que el martillo es empujado a lo largo de 60 cm, tendremos

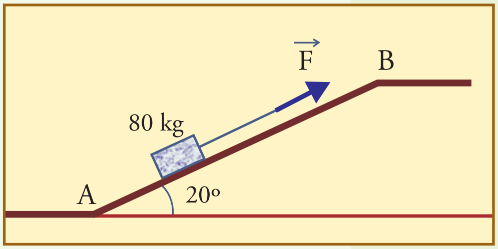
$$F \times 0{,}60\ m = 25\ J \rightarrow F = 25 / 0{,}60$$

$$F \cong 41{,}7\ N$$

c) Ahora veamos el asunto de la producción de calor.
El trabajo hecho por la fuerza de rozamiento, - 25 J, significa que desaparecen 25 J de energía mecánica. Por lo tanto, por una idea elemental de conservación, deben aparecer, distribuidos entre el clavo, la madera, y luego el ambiente, 25 J de energía no mecánica, a la cual llamaremos térmica, ya que se manifiesta exclusivamente a través de la elevación de la temperatura de las partes.
Hay que descartar cierta idea errónea según la cual, una parte de la energía disponible se transforma en calor y otra en trabajo: la misma energía que se emplea para hacer el trabajo hundiendo el clavo, los 25 J, se transfiere al clavo que a su vez los gasta haciendo trabajo contra el rozamiento (gasta todo, ya que alguna parte que no gastase, le debería quedar a él acumulada de alguna manera). Tra-bajo que se hace contra el rozamiento, por definición, mecánicamente, se aniquila, es decir, desaparece, y por conservación, debe aparecer todo como otro tipo de energía. En este caso térmica.
Ahora bien, suele haber problemas para decidir algunos detalles cuando se aplica el primer principio de la termodinámica a un sistema como el clavo solo, por lo que conviene analizar el sistema clavo+madera (también se podría incorporar el ambiente si se quisiera). Para el sistema clavo + porción de madera, tendríamos: W_{ext} = 25 J, ya que es el trabajo hecho por la fuerza que aplica el martillo, Q = 0, inmediatamente después del golpe, ya que nadie suministra calor al sistema y no hemos considerado tiempo suficiente como para que haya podido escapar calor al ambiente o al resto de la madera (si esperamos cierto tiempo, será $Q < 0$, indicando que el sistema se está enfriando mientras el calor escapa disipándose), y por lo tanto ΔE = 25 J. Esta energía, que se manifiesta a través de una elevación de temperatura, podría ser denominada térmica -muchas veces se le dice calor, pero *no debe confundirse con el término Q*-. El término Q representa energía que entra o sale como calor, y serviría para explicar cómo se enfría el clavo, transfiriéndose calor al ambiente más frío. Para que hubiera un término Q positivo, en este problema, habría que calentar el clavo con algo independiente del golpe (por ejemplo, el martillo tendría que estar caliente y quedar apoyado contra el clavo; o alguien acercar un fósforo encendido).

EJERCICIOS CAPÍTULO 6

▲ Ejercicio 6.1



Un cajón de 80 kg es arrastrado por un plano inclinado que forma 20° con la horizontal, por medio de una cuerda de la cual se tira con una fuerza de 400 N. El cuerpo se mueve con una velocidad constante de 0,5 m/s. No se desprecia el rozamiento.

a) Realice un diagrama de cuerpo libre del cajón mostrando las fuerzas actuantes sobre él, indicando a qué agente o interacción se debe cada una, y calcule sus valores.

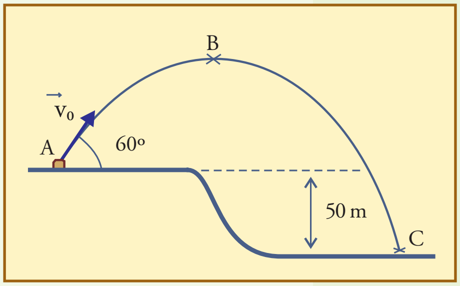
b) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas actuantes en el trayecto AB, que tiene 100 m de longitud, y verifique el cumplimiento de la expresión: $\sum W_i = \Delta Ec$.

c) Calculando la energía potencial verifique el cumplimiento de la expresión: $W_{NC} = \Delta E_m$.

d) Si justo antes de B se corta la cuerda con la cual se tiraba del cajón, dibuje las fuerzas actuantes, explique cómo será el movimiento subsiguiente del carro, y calcule con qué energía y qué velocidad pasará el carro por el punto A.

e) Explique qué condiciones deberían darse para que al cortarse la cuerda el cuerpo quedase detenido en ese lugar, en vez de descender.

▲ Ejercicio 6.2



Se arroja oblicuamente una piedra de masa m = 2 kg, con una velocidad inicial de 30 m/s orientada como muestra la figura (no se considera el rozamiento):

a) A partir de las características básicas de este movimiento, calcule la velocidad y la altura en el punto B. Explique qué leyes fundamentales aplica para ello.

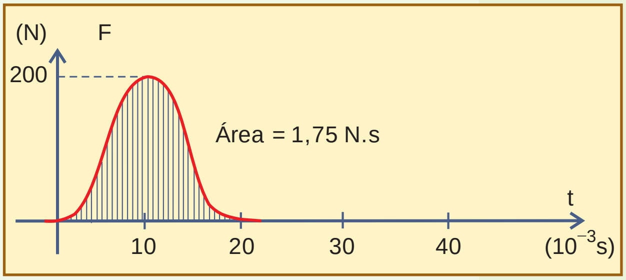
b) Considerando la energía potencial gravitatoria cero en A, calcule la energía total, y la potencial en B y en C. Calcule la velocidad en C.

▲ Ejercicio 6.3

Una pelota de goma, de m = 150 g , cae verticalmente desde el reposo, desde una altura de 3 m sobre el piso.

a) Calcule la velocidad, energía cinética, y cantidad de movimiento con que la pelota llega al piso, inmediatamente antes de tomar contacto con él. Indique la relación de estos valores con el impulso aplicado y con el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria (peso) durante esta caída.

Suponga ahora que un dispositivo electrónico registra la fuerza que se desarrolla en el choque contra el piso (el cual es rígido y horizontal) y el registro obtenido es:

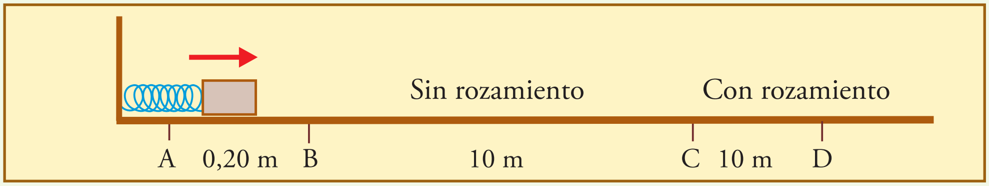


b) Teniendo en cuenta esto, y sus resultados anteriores, realice un diagrama vectorial cualitativo mostrando los vectores cantidad de movimiento de la pelota inmediatamente antes y después del contacto con el piso, y el impulso recibido por la misma durante ese lapso. Indique los módulos de estos vectores en su diagrama (calcule los que le haga falta). Interprete sus resultados opinando acerca de si este choque ha sido totalmente elástico, o plástico, o algo intermedio.

c) Calcule la velocidad con que rebota la pelota, la energía cinética perdida, y la altura hasta la que subirá.

▲ Ejercicio 6.4.

Un cuerpo de 16 kg está en reposo en el punto A de una pista horizontal. Un resorte de constante elástica $k = 10^4$N/m, que está comprimido, se suelta y lo impulsa a lo largo de 0,20 m, hasta perder contacto con él en el punto B. El cuerpo puede moverse sin rozamiento desde B hasta C, pero si llega a C, allí comienza a actuar una fuerza de rozamiento constante de 50 N.



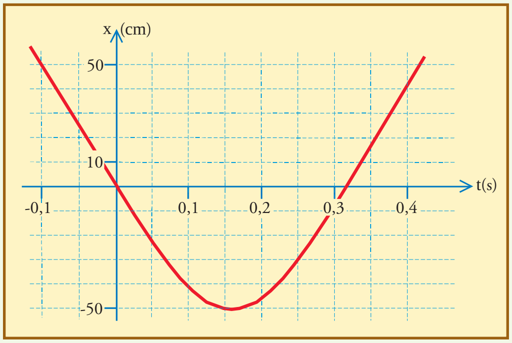
a) Dibujar diagramas de cuerpo aislado mostrando todas las fuerzas actuantes en cada tramo (entre A y B, entre B y C, y desde C en adelante).

b) Calcule la velocidad con que el cuerpo pasa por B, C, y D. Grafique cualitativamente v(t), y x(t) hasta que el móvil se detiene.

c) Calcule cuánto demora el móvil en recorrer cada tramo, y con eso indique en qué instante pasa por B, por C, y por D. Calcule también en qué instante y en qué lugar se detiene.

▲ Ejercicio 6.5

Un cuerpo de 20 kg viaja a lo largo del eje x sobre una superficie lisa horizontal y sin rozamiento, hasta que en t = 0, en x = 0, toma contacto con un resorte de constante elástica k = 2.000 N/m, al cual comprime una cierta distancia, para luego ser impulsado en sentido contrario al inicial, como lo indica la gráfica x(t) mostrada.



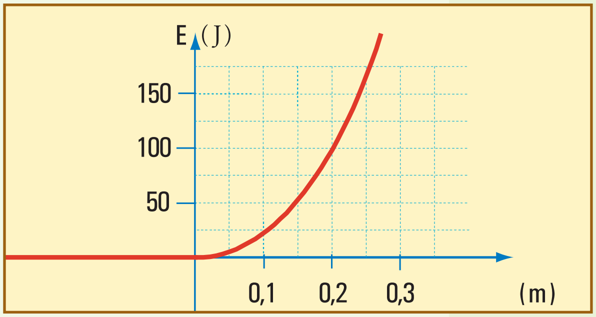
a) Calcule aproximadamente a partir de la gráfica la velocidad del cuerpo antes y después del contacto con el resorte.

b) Encuentre en la gráfica la distancia que se comprime el resorte y, haciendo consideraciones sobre las energías cinética y potencial, utilícela para corroborar su cálculo aproximado de la velocidad.

c) Indique en qué parte/s del intervalo mostrado en la gráfica, entre -0,1 s y 0,4 s, el resorte hace trabajo positivo, y en qué parte/s hace trabajo negativo. Justifique con esquemas que muestren la dirección de la fuerza y del movimiento, en cada parte.

▲ Ejercicio 6.6

La gráfica $E_p = E_p(x)$ indica la energía potencial de un cuerpo de masa m = 2 kg que se mueve con velocidad v =10 m/s en la dirección del eje x hacia la derecha, y que en el punto x = 0 comienza a comprimir un resorte de k = 5.000 N/m. No se considera el rozamiento ni la acción de ninguna otra fuerza más que la que aplica el resorte.



a) Interprete el significado de cada término en la expresión $E = ½\ m\ v^2 + ½\ k\ x^2$, y explique su relación con la gráfica.

b) Determine cuánto se comprime el resorte hasta detener el movimiento del cuerpo, y muestre su resultado en la gráfica. Describa brevemente cómo continúa luego el movimiento.

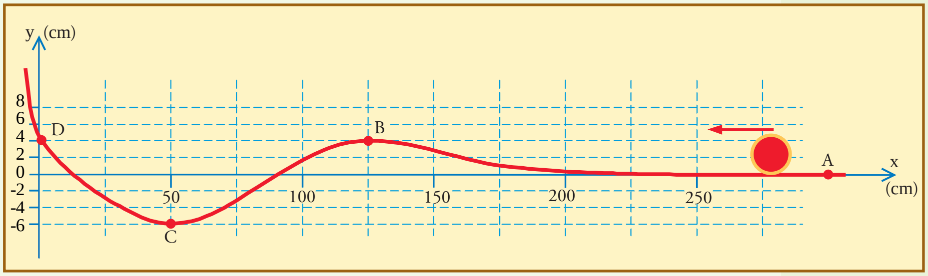
c) A partir de la gráfica calcule la energía cinética y la potencial del cuerpo cuando x = 15 cm. Verifique aplicando la expresión $E = Ec + ½\ k\ x^2$. Indique si sus cálculos valen para la ida, para la vuelta, o para ambas.

d) Calcule la fuerza total actuante sobre el cuerpo cuando x = 15 cm, a la ida, y a la vuelta. Muéstrela en un dibujo cualitativo de la situación.

▲ Ejercicio 6.7

En un parque de diversiones se encuentra el siguiente juego. Sobre una pista como la ABCD de la figura, el jugador debe lanzar una bola desde A, y gana si consigue que (la bola) no regrese, atrapada entre D y B.

La bola rueda sobre la pista, prácticamente sin disipar energía. Aquí vamos a ignorar la rodadura, que es irrelevante para la discusión, y vamos a considerar que la bola es un cuerpo de masa m = 2 kg, que desliza sin rozamiento. Luego vamos a considerar el caso real, con un mínimo rozamiento.



a) Calcule la velocidad con que debe ser lanzado el cuerpo en A, para que pase por B con una velocidad de 0,2 m/s, suponiendo que desliza idealmente sin rozamiento. Describa todo el movimiento subsiguiente. Calcule velocidades en B, C, etc.

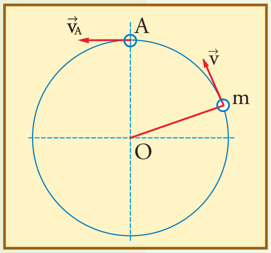
Luego, para este mismo caso dibuje un diagrama de cuerpo aislado mostrando las fuerzas sobre el cuerpo en x = 175 cm, en B, entre B y C, en C, y entre C y D, mientras el cuerpo pasa por allí hacia la izquierda. Explicar qué diferencia habría con las fuerzas luego, cuando el cuerpo vuelve, pasando hacia la derecha.

Explique especialmente las diferencias y similitudes entre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cuando pasa por B, y por C, hacia la izquierda y hacia la derecha.

b) Repita el punto a), considerando ahora que existe un muy débil rozamiento. Tener en cuenta que en el caso real no hay un cuerpo deslizándose, sino una bola rodando, si la bola y la pista son suficientemente lisas, esto puede asimilarse a un cuerpo deslizándose bajo la acción de un rozamiento extremadamente débil. Explique si es posible ganar el juego, y qué debe hacerse para ello.

▲ Ejercicio 6.8

Se revolea un cuerpo de 2 kg de masa en el extremo de un hilo de 1,5 m de longitud, de manera que describe un movimiento circular en un plano vertical. Manteniendo fijo (lo más que se pueda) el extremo O del hilo se logra que el movimiento sea bien circular. El cuerpo pasa por el punto más alto, A, con una velocidad de 5 m/s.



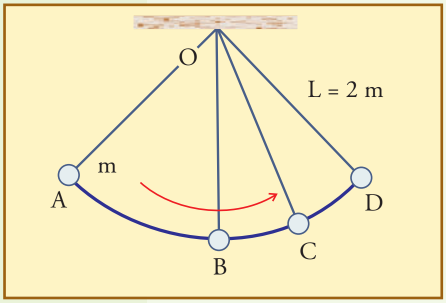
a) Dibuje la situación, mostrando las fuerzas actuantes. Razone para explicar si el movimiento puede ser uniforme (además de circular).

b) Calcule la velocidad con que pasa el cuerpo por el punto más bajo, y por los puntos al mismo nivel horizontal que el centro O.

c) Calcule la fuerza que tensiona el hilo en cada uno de estos puntos mencionados.

▲ Ejercicio 6.9

El péndulo de la figura, con un cuerpo de 4 kg suspendido de un hilo de 2 m de longitud, se suelta a partir del reposo en la posición A. El cuerpo tiene una velocidad de 4 m/s al pasar por B, y de 3 m/s al pasar por C, llegando a detenerse en D (para luego recomenzar en sentido inverso). No se consideran rozamientos.



a) Considerando el sentido A, B, C, D, muestre cualitativamente las fuerzas actuantes sobre el cuerpo en los puntos A, B, C, y D. Explique, para cada una de estas fuerzas indicadas, si en el tramo AB, y luego en el BC, hace trabajo positivo, negativo, o nulo.

b) Calcule la tensión del hilo cuando el cuerpo pasa por el punto B.

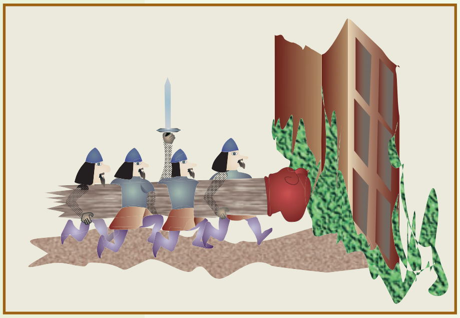
c) Calcule la altura de los puntos A y C con respecto al B, según las velocidades dadas en el enunciado.

d) Considerando cero la energía potencial en A, complete la siguiente tabla con los valores de las energías faltantes.

	E_p	E_c	E_{total}
A	0		
B			
C			
D			

▲ Ejercicio 6.10

Considere la situación mostrada en la figura.



Explique cómo estos esforzados hombrecitos están aplicando las leyes de la Mecánica.

¿Cuáles son las razones por las cuales se necesita utilizar el ariete? Siendo que estos soldados deben cargar el pesado tronco, y que además son ellos mismos los que aplican la fuerza que empuja al ariete, ¿Por qué no ahorran el esfuerzo de cargar el tronco y por qué no aplican todas sus fuerzas directamente a la puerta? ¿Qué ganan con el ariete?

Ubique en la figura todos los vectores y elementos que tengan que ver con su explicación; desarrolle en el tiempo la acción de cada uno.

▲ Ejercicio 6.11

Considere un martillo de 1 kg de masa, que se utiliza para clavar verticalmente un clavo en una madera. Para cada golpe se impulsa el martillo hasta que adquiere una velocidad de 10 m/s, velocidad con la cual choca, y en 3 golpes hunde completamente el clavo, de 6 cm de longitud.

a) Calcule la fuerza media que debió vencer el clavo para penetrar.

b) Estime una longitud del recorrido del martillo mientras es impulsado, y con ella calcule la fuerza media que se le debió aplicar.

c) Explique cómo es el juego de las energías durante el choque. Estime las cantidades o porcentajes de cada una: cuánto trabajo, cuánto calor, cuánta energía de otro tipo (¿cuál?)

d) Explique y calcule cuáles serían todas las diferencias si el enunciado dijese que el clavo se clava horizontalmente.

▲ Ejercicio 6.12

Considere el texto: «Todo este equipo permitirá ahorrar 960 kilowatt-hora anuales en el consumo de cada vivienda. » (**"Uso rentable de la electricidad"**. Investigación y Ciencia. Noviembre de 1990. N° 170.)

Calcule la potencia representada por los 960 kWh anuales. Indique un artefacto doméstico que desarrolle esa potencia.

▲ Ejercicio 6.13

Considere el siguiente párrafo, tomado de "Máquinas térmicas", John SANDFORT, EUDEBA, 1966: « WATT ... determinó que un caballo promedio podía levantar 112 libras a una altura de 196 pies en un minuto y podía continuar con ese ritmo de trabajo hasta ser reemplazado por un relevo; a esta cifra le sumó el 50 % para asegurarse de que los compradores no tuvieran quejas, llegando hasta cerca de 550 libras·pie/segundo. Este valor prevaleció, probablemente debido al prestigio de WATT, y es la definición del caballo de fuerza inglés (HP) actualmente en uso. »

Verifique el valor 550 del párrafo, y calcule el valor del HP en watts.

▲ Ejercicio 6.14

Considere los siguientes casos, y para cada uno discuta si se ha realizado trabajo, y dónde y cómo ha ocurrido transferencia o acumulación de energía. Aunque no conozca todos los detalles de cada mecanismo, dé razones para decir si se transfirió o no; o diga cómo piensa que se acumuló, o a dónde se podría haber ido.

1. Alguien dobla una varilla de mimbre, muy elástica (que al ser soltada recuperará su forma recta inicial).

2. Alguien dobla un caño de cobre de dimensiones y resistencia similar a las de la varilla anterior, pero éste no es elástico y no recuperará en absoluto nada de su forma inicial.

3. Alguien empuja a lo largo de 3 metros un carrito de supermercado cargado, de manera que éste, con muy buenas ruedas, adquiere gran velocidad y marcha hacia una góndola con botellas de vidrio.

4. Alguien empuja con gran fuerza un pesado escritorio a lo largo de 3 metros, y debido a que el rozamiento de éste con el piso es muy fuerte, el escritorio se detiene cuando se deja de empujarlo.

5. Un motor acciona una máquina bombeadora que aspira 2.500 m^3 de agua de una cisterna y la eleva a un gran depósito 30 m más arriba.
6. El motor de un automóvil hace que éste viaje 500 m ascendiendo una cuesta de 60 m de altura. Al llegar a la parte alta el automóvil se detiene para que los pasajeros admiren el paisaje.
7. Un atleta lanza la jabalina en una competencia.
8. Un arquero tensa su arco al máximo, previo al lanzamiento de la flecha.
9. El arco que ha sido tensado lanza la flecha.
10. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual carga un acumulador de automóvil.
11. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual mantiene encendida una lámpara.
12. Un motor hace girar un generador de corriente eléctrica, el cual no está conectado a nada.

Dinámica de las rotaciones

Capítulo 7

El siguiente paso en complejidad luego del movimiento de la partícula puntual, que constituye la máxima simplificación posible, consiste en estudiar el movimiento general de un cuerpo rígido, que siempre se puede considerar como la superposición de un movimiento de traslación más uno de rotación.
En este capítulo veremos cómo obtener las leyes que corresponden al movimiento de rotación a partir de las leyes para el movimiento de la partícula puntual, que también describen directamente el movimiento de traslación pura de los cuerpos rígidos.
Con estos elementos, también abarcamos la descripción de los movimientos de cualquier aparato o mecanismo que se pueda descomponer en partes rígidas, en cuyo caso podrán aplicarse estos conceptos a cada una de esas partes.

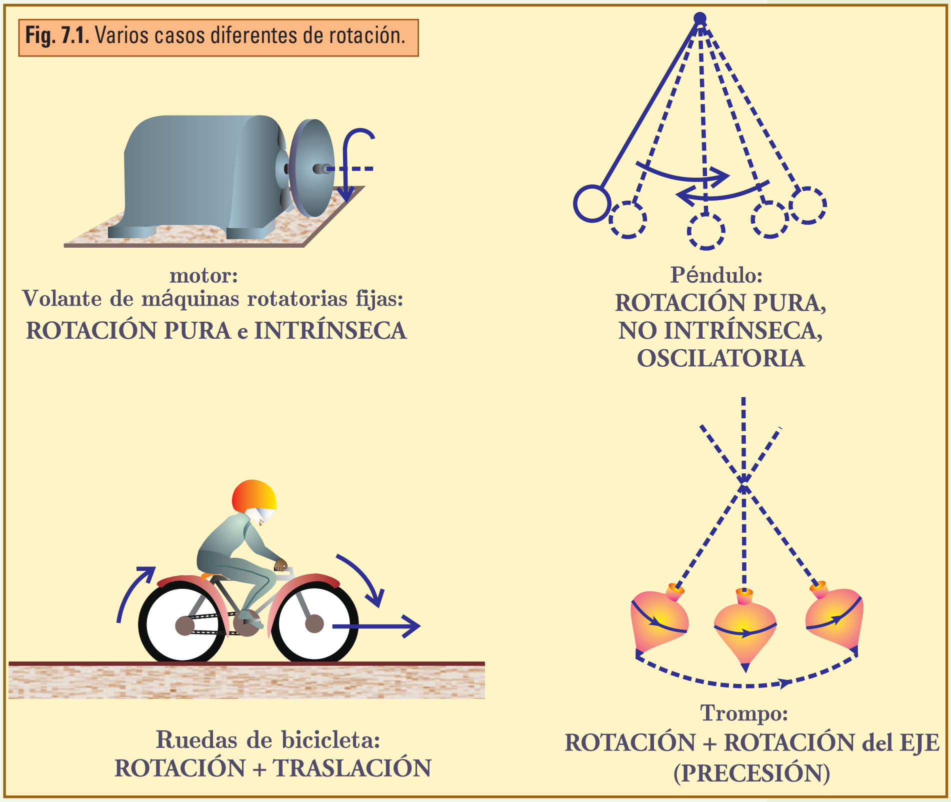
7.1. Generalidades sobre el movimiento de rotación

El movimiento de rotación es un movimiento de los cuerpos rígidos en el cual hay una recta denominada **eje de rotación** cuyos puntos permanecen fijos. Por la rigidez del cuerpo, los demás puntos describen movimientos circulares manteniendo todas sus distancias o posiciones relativas invariables.

Este movimiento, además de poder ser uniforme o variado de diversas maneras, puede combinarse a su vez con otros movimientos, como el de traslación, o con otras rotaciones alrededor de otros ejes, pudiendo obtenerse una gran variedad de situaciones posibles.

El caso más simple posible se denomina ***rotación pura***, y se da cuando *el eje permanece fijo*. Si además el eje contiene al centro

Fig. 7.1. Varios casos diferentes de rotación.



de masa del cuerpo, se dice que la rotación es ***intrínseca***: en un leguaje coloquial, cuando un cuerpo ejecuta una rotación intrínseca, se dice que el cuerpo *rota sobre sí mismo*, ya que mantiene fijo el centro de masa (la palabra inglesa "spin", que significa "retorcer", o "girar algo sobre sí mismo", se utiliza para este tipo de rotación a nivel de partículas atómicas).

Por otra parte, si el eje se mueve tenemos una rotación que no es pura; este movimiento puede ser simple, pero también puede llegar a ser muy complicado.

Un caso más bien simple es el de las ruedas de los vehículos cuando viajan en línea recta: la rueda gira alrededor de su eje, fijo respecto del vehículo, mientras éste se traslada. El resultado es la combinación de rotación con traslación. En la figura 7.1 se ilustran éste y algunos otros casos.

En este capítulo desarrollaremos, esencialmente, los conceptos que tienen que ver con la rotación pura.

Rotación pura

Consideremos un cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo. El cuerpo se considera integrado por partículas de masa mi, cada una ellas describe una circunferencia de radio ρi en un plano que permanece fijo, perpendicular al eje, como se muestra en la figura 7.2.

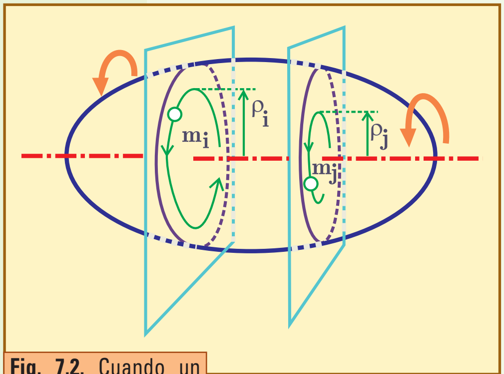


Fig. 7.2. Cuando un cuerpo describe una rotación pura los puntos del eje permanecen inmóviles, mientras los otros describen circunferencias en planos perpendiculares al eje. Como se ilustra, el cuerpo en rotación no necesita tener simetría ni forma determinada.

Es importante notar que cada punto material describe su propia circunferencia de centro Ci y radio ρi. El centro de cada circunferencia es el punto intersección del eje con el plano de movimiento de la partícula considerada, y en general no es el origen de las coordenadas.

El origen de las coordenadas ***O*** se fija arbitrariamente. Por ejemplo, en el caso de la figura 7.3, se fija en algún punto del eje, que podría ser también el centro de masa, aunque eso no es importante. El vector posición de la partícula i es $\vec{r}_i$, cuyo módulo en general no es igual al radio de la circunferencia descripta por ella, ya que éste es ρ_i, que es la distancia de la partícula al eje (tomada perpendicularmente).

Sólo para los puntos que giran en el mismo plano que contiene al origen de coordenadas O, se cumple que $r_i = \rho_i$.

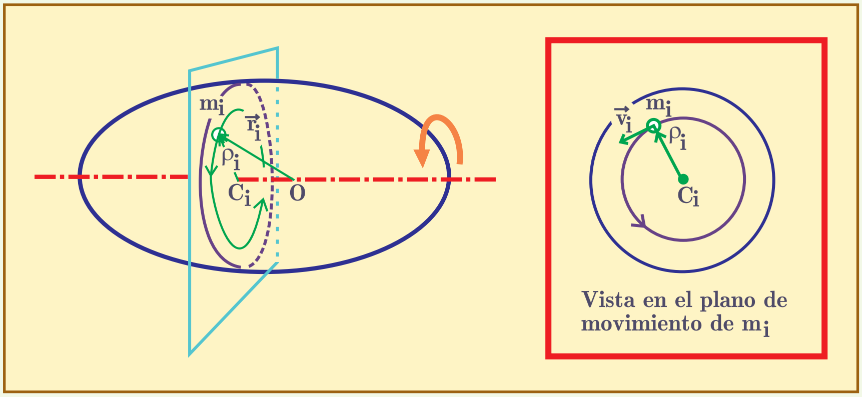


Fig. 7.3. Cada partícula i describe, en un plano perpendicular al eje, una circunferencia cuyo centro C_i es la intersección de dicho plano con el eje. El radio de esta circunferencia es ρ_i , que resulta ser la proyección del vector posición $\vec{r}_i$ sobre el plano del movimiento, y que indica también la distancia desde la partícula hasta el eje.

La condición de que el cuerpo sea rígido implica que, aunque cada punto material recorre su propia trayectoria circular con su propia velocidad lineal vi , todos tienen la misma velocidad angular ω, porque todos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo. Si recordamos que, según (5.16), ω = v / radio, para este caso tenemos:

$$\omega = \frac{v_i}{\rho_i} \text{ : igual para todos los puntos del cuerpo} \qquad (7.5)$$

7.2. Momento de una fuerza con respecto a un eje

Efecto de las fuerzas sobre la rotación

Una descripción dinámica de la rotación implica poder establecer cómo varía la velocidad de rotación en función de las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo.

Para esto, lo primero que hay que tener en cuenta es que: una fuerza sólo influye sobre un movimiento de rotación si se la aplica de manera de *tener componente en la dirección en la cual el eje permite el movimiento del punto sobre el cual actúa*.

Así es que, una fuerza aplicada sobre un punto A de un cuerpo en rotación pura, en el mismo sentido en que se mueve el punto, hará un trabajo positivo y aumentará la velocidad de la rotación, mientras que aplicada en sentido contrario hará trabajo negativo, y hará disminuir dicha velocidad.

De las consideraciones sobre el trabajo que la fuerza puede hacer se deduce que, dada una fuerza exterior cualquiera $\vec{F}_A$ que se aplique en un punto A, *fuera del eje*, para el efecto sobre la rotación *sólo interesa la componente en la dirección tangencial a la circunferencia descripta por A*; las otras dos componentes, F_{axial} , paralela al eje, perpendicular al plano de la circunferencia descripta por A, y F_{radial}, en dicho plano, en la dirección de la recta que pasa por el centro de dicha circunferencia, no hacen trabajo y no tienen efecto sobre la rotación (figura 7.4).

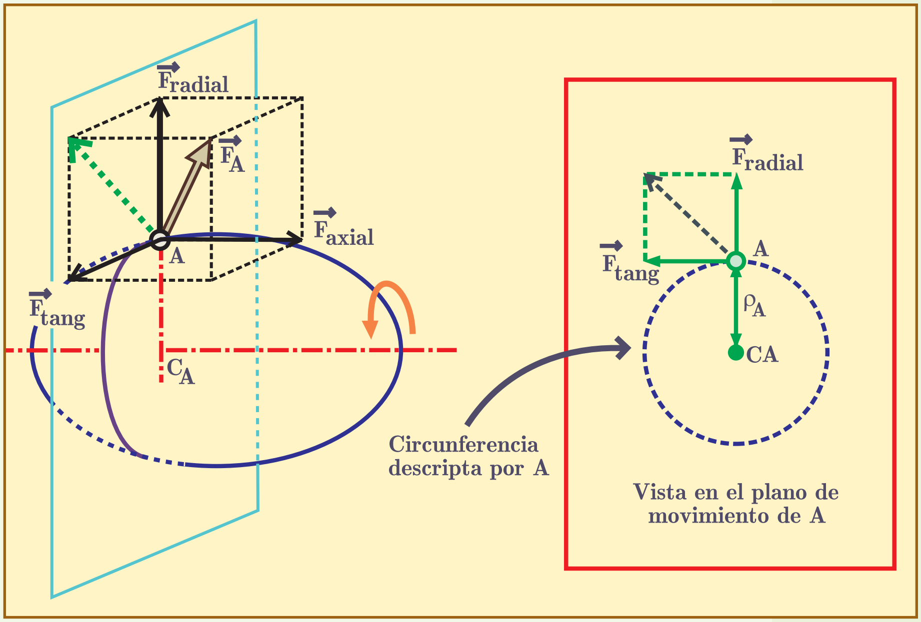


Fig. 7.4. Se muestra el vector hueco $\vec{F}_A$, indicativo de una fuerza aplicada en A, y con flechas llenas, sus componentes axial, radial y tangencial. En línea de trazos también se muestra la proyección de $\vec{F}_A$ sobre el plano del movimiento del punto A, vector cuyas componentes en ese plano también son $\vec{F}_{radial}$ y $\vec{F}_{tang}$. Para considerar efectos sobre la rotación sólo interesa $\vec{F}_{tang}$. Se ilustra un cuerpo en rotación que no tiene simetría ni forma determinada.

Para el caso especial de una fuerza aplicada exactamente en algún punto del eje, queda claro que no puede influir sobre la rotación, ya que estos puntos no se mueven y, por lo tanto, la fuerza no hace trabajo (para estos puntos no hay dirección tangencial).

Es decir, en general la fuerza aplicada puede tener las tres componentes, $\vec{F}_A = \vec{F}_{axial} + \vec{F}_{radial} + \vec{F}_{tang}$, pero la única componente con posibilidades de influir sobre la rotación es la F_{tang}.

Momento de una fuerza respecto de un eje

Ahora tratemos usar estas ideas para establecer una expresión para lo que denominaremos *"momento de la fuerza con respecto a un eje"*, concepto que representa el poder de la fuerza para modificar (producir, detener, etc.) la rotación de un cuerpo alrededor del eje. A veces, también le diremos *poder de rotación* de la fuerza con respecto al eje.

Para simplificar los razonamientos, consideremos una rotación orientada con el eje perpendicular al plano de la hoja, de manera que en nuestros esquemas veamos la rotación directamente hacia un lado u otro en el plano del papel. Para facilitar las ideas pensemos en un disco o plato redondo de radio R que tiene absoluta libertad de rotación alrededor del eje, que será el punto ***O*** en nuestros dibujos. Cualquier fuerza que apliquemos sobre un punto del disco podrá producir o no rotación, pero no logrará cambiar la ubicación del eje (éste está montado sobre cojinetes que le permiten girar pero no desplazarse).

Ahora bien, es claro que si una fuerza $\vec{F}_T$ se aplica en A tangencialmente a la circunferencia de centro ***O***, tiene el mismo poder de rotación que si se aplica tangencialmente en cualquier otro punto de esta circunferencia, como se sugiere en la figura 7.5(a).

Por otra parte, si en A se aplica $\vec{F}$ oblicuamente, para comparar su poder de rotación con el de $\vec{F}_T$ sólo se necesita ubicarla angularmente con respecto a dicha circunferencia, y descomponerla según las direcciones radial y tangencial. La componente radial indicará una acción tendiente a desplazar el eje, que será equilibrada por las reacciones en los soportes del eje que impiden su desplazamiento, mientras que la componente tangencial expresará estrictamente la acción de la fuerza tendiente a producir rotación (figura 7.5(b)).

Ahora bien, dada una fuerza aplicada en A nos interesa saber cuánto debe valer una fuerza aplicada en *otro punto*, para equilibrar el poder de rotación de la primera, y para resolver eso es suficiente con advertir, en la figura 7.5, que $\vec{F}$ podría ser equilibrada en todos sus efectos, incluido su poder de hacer rotar, por $-\vec{F}$ que se aplicara en cualquier punto B, C, etc, de la misma *recta de acción*.

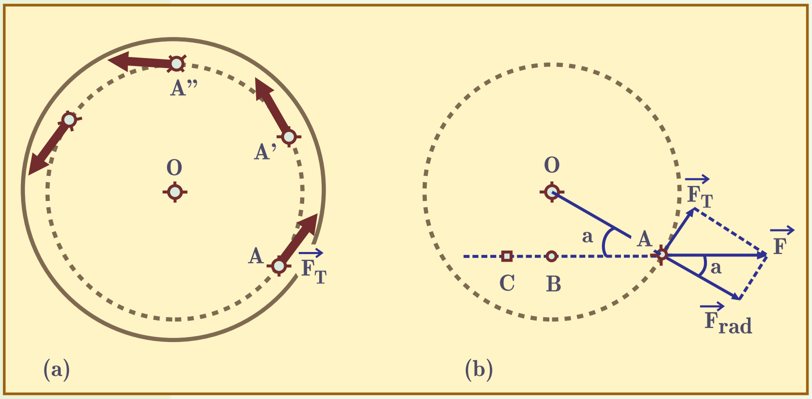


Fig. 7.5. (a) Estas fuerzas aplicadas tangencialmente a la misma circunferencia tienen el mismo poder de rotación con respecto a O a condición de tener igual intensidad, independientemente del punto particular de la circunferencia sobre el que actúan.
(b) si una fuerza se aplica oblicuamente, su poder de rotación está dado exclusivamente por su componente tangencial, independientemente de la existencia de la componente radial.

Ahora, tracemos una circunferencia con centro en O, tangente a la recta de la fuerza en el punto B (figura 7.6), e imaginemos la fuerza $-\vec{F}$ aplicada en B (la denominamos $\vec{F}_B$). Esta fuerza actúa tangencialmente a su circunferencia, y tiene el mismo poder de rotación respecto de O que cualquier fuerza de módulo $\vec{F}_B$ aplicada tangencialmente en cualquier punto de la circunferencia de radio OB. Además, ella puede equilibrar la acción de F aplicada en A, cuyo poder de rotación es el de $\vec{F}_T$ (a la cual denominamos ahora $\vec{F}_A$), aplicada tangencialmente en A o en cualquier punto de la circunferencia de radio OA.

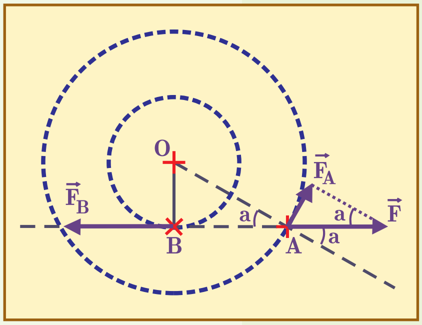


Fig. 7.6. Dada $\vec{F}_B$ aplicada tangencialmente en B, para encontrar la fuerza que pueda equilibrar su poder de rotación aplicada tangencialmente en una circunferencia de mayor radio, debe prolongarse la tangente en B hasta cortar a la circunferencia mayor. En ese punto, denominado A, se proyecta tangencialmente $-\vec{F}_B$ y se obtiene $\vec{F}_A$.

Ahora bien, observando la figura 7.6, vemos que $F_A / F = OB/OA$, de donde se deduce que la relación entre los módulos de las fuerzas que hay que aplicar tangencialmente en puntos de dos circunferencias de diferente radio para tener el mismo poder de rotación está dada por:

$$F_A \times OA = F_B \times OB \quad (7.6)$$

Podemos decir que esta expresión define precisamente el poder de rotación de cada fuerza con respecto a O, ya que expresa una cantidad proporcional a la fuerza aplicada, tal que si comparásemos su valor para dos fuerzas cualesquiera orientadas de esta manera, aquélla para la cual este producto sea mayor, superará en poder de rotación a la otra.

En el lenguaje matemático se acostumbra a denominar "momento de la cantidad tal con respecto a un eje o punto", al producto de esa cantidad por la distancia al eje o al punto, de manera que según la expresión que hemos hallado, al poder de rotación le corresponde precisamente la denominación "momento" (que no debe interpretarse como algo que tiene que ver con el tiempo o el instante).

De manera que, definimos el momento o poder de rotación con respecto a O de una fuerza $\vec{F}$ aplicada en A formando un ángulo α con la línea OA:

$$\boxed{M_{F,O} = F \times OA \times \operatorname{sen}\alpha} \qquad (7.7)$$

En donde, $M_{F,O}$ significa el **momento de $\vec{F}$ con respecto a O**, y se sobreentiende, en esta expresión y en las otras similares, que OA indica la longitud del segmento OA.

Teniendo en cuenta que, como se ve en las figuras 7.5 y 7.6, F senα es F_T, la componente de $\vec{F}$ tangencial a la circunferencia que puede describir el punto A alrededor del eje, y que OA×senα es igual a la distancia OB entre el eje y la recta de acción de la fuerza, tenemos que son definiciones equivalentes del momento:

$$\begin{aligned} M_{F,O} &= F \times OB \\ &= F_T \times OA \end{aligned} \qquad (7.7')$$

La distancia OB entre el eje y la recta de acción de la fuerza se denomina "brazo de palanca" de la fuerza respecto del eje, y utilizaremos para ella en general la letra b.

Nota 1. Acerca del brazo de palanca

Cuando la fuerza se aplica en A de la manera más efectiva, tangencialmente a la circunferencia por la que se desplazará el punto A, resulta α = 90°, senα =1, y el brazo de palanca coincide con OA. En este caso el momento vale F×OA, que es el máximo valor que puede tomar para las distintas orientaciones posibles de la fuerza. El caso opuesto, de mínimo valor para la misma fuerza aplicada en el mismo lugar A, es cuando la fuerza está alineada con el centro O. En ese caso la distancia de O a la recta de acción de la fuerza es cero, ya que la recta pasa por O.

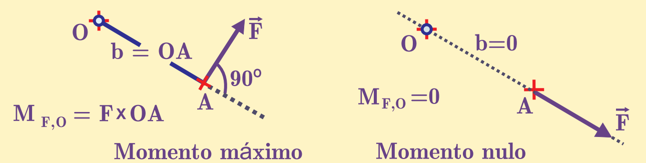


Fig. 7.7. Caso de momento máximo y de momento nulo, para una fuerza aplicada a distancia OA del punto eje O.

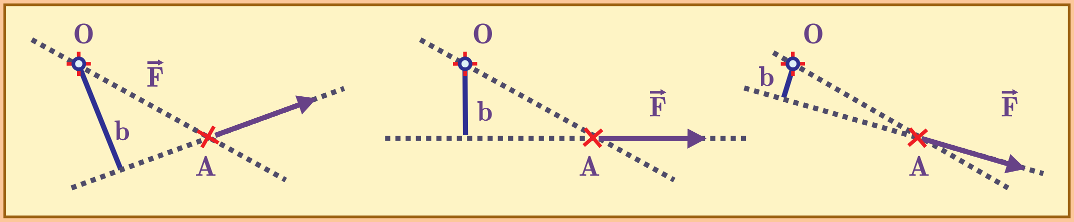
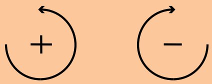


Fig. 7.8: Cuando la fuerza se aplica oblicuamente, el brazo de palanca debe buscarse como la distancia entre O y la recta de acción de la fuerza, tomada perpendicularmente a la recta (la distancia de un punto a una recta sólo tiene sentido entendida de esta manera).

Nota 2. Acerca del sentido de la rotación

La rotación ocurre en el espacio, tiene orientación*, y se puede describir con ayuda de ciertos vectores especiales (ver Anexo 7.2). Por ahora, en un planteo simple, digamos que, observando de manera de ver de frente el plano de la rotación (en el cual tienen lugar las circunferencias descriptas por los puntos que giran), es decir viendo "de punta" el eje, se acostumbra a asignar signo + al sentido de rotación* antihorario*, y signo – al sentido* horario.



Por supuesto que esta asignación de signos es arbitraria, y puede ser modificada si se lo desea: una rotación horaria es vista como antihoraria desde detrás del plano.

7.3. Leyes de la dinámica de la rotación pura

Inercia de la rotación pura

Ahora bien, para establecer leyes de una manera lo más parecida posible a las que ya conocemos para los movimientos lineales, comencemos considerando el caso más simple, en el cual no se aplique ninguna fuerza exterior sobre los puntos del cuerpo fuera del eje. En este caso, una rotación no podrá iniciarse espontáneamente, ni tampoco detenerse: si no se aplican fuerzas con momento sobre un cuerpo rígido que está rotando, entonces, **por inercia, su rotación continuará**, manteniendo constante el valor de la velocidad angular.

Vale aclarar que, en este caso, necesariamente actúan fuerzas **interiores** sobre cada partícula del cuerpo, ya que cada una describe un movimiento circular, que para mantenerse requiere de la acción de una fuerza centrípeta. En el cuerpo rotante se desarrollan tensiones cuyo efecto es aplicar una fuerza centrípeta neta sobre cada partícula. Estas fuerzas, tanto la acción sobre cada partícula (centrípeta), como la reacción (centrífuga) de ella sobre las vecinas, tienen la dirección estrictamente radial, y por ello no tienen momento con respecto al eje, y no contribuyen de ninguna manera a iniciar, ni a mantener, ni a detener la rotación.

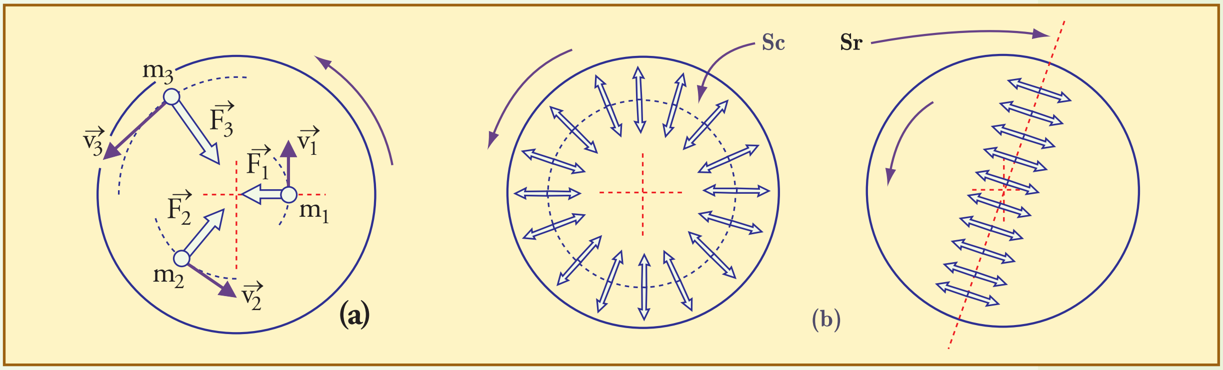


Fig. 7.9. Aún en el caso en que un cuerpo rota libremente, sin ninguna fuerza exterior aplicada, hay fuerzas sobre cada una de sus partículas constituyentes. Estas fuerzas son aplicadas sobre cada partícula por las partículas vecinas, y tienen la dirección hacia el centro, como se ilustra en **(a)** para tres partículas genéricas con vectores huecos. En **(b)** se ilustran las tensiones normales, de tracción, que aparecen tanto en cualquier superficie cilíndrica, S_c, como en cualquier plano radial que contenga al eje, S_r . El cuerpo podría romperse si estas tensiones se hicieran demasiado grandes, y a partir de ese momento, cada parte continuaría con un movimiento diferente.

Ley del Impulso para las rotaciones

Consideremos ahora un cuerpo rígido con un eje que es mantenido fijo por cojinetes ideales sin rozamiento, que permiten al cuerpo ejecutar sólo rotaciones puras. Sobre este cuerpo se aplican varias fuerzas exteriores en distintos puntos, para lograr una rotación de determinadas características.

Si consideramos la masa m_i de una partícula cualquiera del cuerpo, podemos aplicarle la Ley del Impulso en la dirección tangencial, y decir que en un intervalo de tiempo Δt, su velocidad (tangencial) v_i sufrirá una variación Δv_i tal que:

$$F_i \, \Delta t = m_i \, \Delta v_i$$

En esta expresión, F_i es la resultante de todas las fuerzas tangenciales sobre la partícula i. Estas fuerzas son ejercidas por todas las partículas vecinas (según el principio de acción y reacción), más los agentes exteriores que actúen allí, si los hay. Notar que los agentes exteriores, en general, actúan sobre algunos puntos particulares, mientras que todas las partículas vecinas se ejercen fuerzas mutuas unas con otras; estas fuerzas son consideradas interiores para el cuerpo que rota, aunque sean exteriores para una partícula determinada.

$$\underbrace{\sum F_{T;i}}_{\substack{\textit{ejercidas}\\ \textit{por agentes}\\ \textit{exteriores}}} \Delta t + \underbrace{\sum F_{T;i}}_{\substack{\textit{ejercidas}\\ \textit{por otras}\\ \textit{partículas}}} \Delta t = m_i \, \Delta v_i$$

Ahora bien, como el cuerpo es rígido, la velocidad tangencial sólo puede cambiar porque cambie la angular, de manera que el miembro derecho puede ser escrito como $m_i \, \rho_i \, \Delta\omega$. Como nos interesa escribir este cambio en función de los momentos de las fuerzas actuantes, podemos multiplicar toda la expresión por ρ_i :

$$\Delta t \sum F_{Text;i} \, \rho_i + \Delta t \sum F_{T\,\text{int};i} \, \rho_i = m_i \, \rho_i \, \Delta\omega \, \rho_i \qquad (7.8)$$

Ahora bien, en el primer término del miembro izquierdo está expresada la suma de los momentos de las fuerzas *exteriores* aplicadas sobre cada partícula. El resultado de esa suma es el momento total de las fuerzas exteriores que estén aplicadas sobre esa partícula, si las hay, con respecto al eje. Si además nos planteamos *sumar ese resultado sobre todas las partículas*, simplemente tendremos el momento total de las fuerzas exteriores sobre el sistema completo con respecto al eje.

$$\sum_i \left(\sum F_{Text;i}\ \rho_i \right) = M_{total\ fuerzas\ exteriores} \tag{7.9}$$

En cambio, en el segundo término del miembro izquierdo está expresada una suma que considera los momentos de las fuerzas sobre una partícula, debidas a sus vecinas. Estas fuerzas, por acción y reacción, *son opuestas a las que ella ejerce sobre sus vecinas*. De manera que si se suman todos estos términos sobre todas las partículas, el resultado, que es el momento neto debido a todas las fuerzas interiores, debe ser nulo.

Momento neto de fuerzas interiores

$$\sum_i \left(\sum F_{T\,\mathrm{int};i}\ \rho_i \right) = 0 \tag{7.10}$$

De manera que, sumando ambos miembros sobre todas las partículas obtenemos lo que podemos considerar como Ley del Impulso para una rotación pura:

$$\boxed{\mathrm{M}_{\text{fuerzas exteriores}}\ \Delta \mathrm{t} = \Delta\omega \sum_i m_i\ \rho_i^2} \tag{7.11}$$

Revisemos los términos de esta expresión, mientras la comparamos con la correspondiente al movimiento lineal:

$$\vec{F}\ \Delta t = \Delta(m\vec{v})$$
$$\vec{F}\ \Delta t = m\,\Delta\vec{v}$$

Impulso angular

Sabemos que el momento de las fuerzas es el concepto que juega, para las rotaciones, el papel que las fuerzas juegan para los movimientos lineales. De manera que M Δt, es decir el momento de la fuerza, por el tiempo que actúa, juega el papel del impulso para las rotaciones, al cual denominaremos "impulso angular", con respecto al eje correspondiente.

$$\text{Impulso angular} = \mathrm{M}\ \Delta\mathrm{t} \tag{7.12}$$

Vale decir que así como el impulso lineal es un vector con la orientación de la fuerza aplicada, el impulso angular tiene orientación en el espacio, que es la misma orientación del momento aplicado (es decir, con respecto al eje ubicado de determinada manera, con signo más para los impulsos en sentido antihorario, y signo menos para los horarios). En el Apéndice 7 se plantea cómo representar las rotaciones por medio de vectores para entender, de manera más sencilla, el concepto de orientación aplicado a rotaciones.

Momento de inercia

Si en el movimiento lineal, hacemos el cociente entre el módulo del impulso aplicado, y el cambio en la velocidad sufrido por el cuerpo, tenemos una constante característica de la inercia del cuerpo, que es m:

$$m = \frac{F\ \Delta t}{\Delta v}$$

Decimos que m caracteriza la inercia (para el movimiento lineal), y hasta a veces, para dar énfasis, se dice que m es una medida de la inercia, porque a mayor masa, aplicando igual impulso, se logrará un cambio menor en la velocidad, y viceversa.

Si tratamos de aplicar estos conceptos al caso de la rotación, encontramos, a partir de (7.11), que el cociente entre el impulso angular aplicado, y el cambio en la velocidad angular es la siguiente expresión:

$$\frac{M\,\Delta t}{\Delta\omega} = \sum m_i\,\rho_i^2 \tag{7.13}$$

En el caso que nos ocupa, en el que el cuerpo es rígido, esta expresión da una constante para cada cuerpo con un eje elegido: se calcula a partir de su masa y sus medidas (veremos ejemplos), y no depende de que el cuerpo esté en reposo o no, es decir de la velocidad adquirida.

Esta constante, que debe expresar la inercia que ofrece el cuerpo para rotar alrededor del eje considerado, recibe, por razones de usos matemáticos la denominación oficial de "momento de inercia", que simbolizaremos con "I":

$$\boxed{I = \sum m_i\,\rho_i^2} \tag{7.14}$$

El momento de inercia es proporcional a la masa, como corresponde a la idea de inercia, pero además depende de que la masa esté distribuida cerca o lejos del eje. La diferencia esencial entre la inercia para el movimiento de traslación, y la inercia para el movimiento de rotación consiste en que, para dos cuerpos de la misma masa es necesario aplicar mayor impulso angular para iniciar o frenar la rotación del cuerpo que tiene la masa distribuida más lejos del eje, mientras que la distribución de la masa no interesa en el movimiento de traslación.

Cantidad de movimiento angular

Para el movimiento de rotación, el concepto correspondiente a la cantidad de movimiento está dado por la "cantidad de movimiento angular", que designaremos con J.

Para este concepto vale aclarar que hay algunos aspectos complejos que no pretenderemos abarcar, y que en este lugar nos vamos a limitar a los casos simples en los que *el eje de rotación es a la vez eje de simetría del cuerpo* (para otros casos habría que decir que lo que vamos a definir sería sólo una componente referida al eje, de un ente algo más complejo).

Teniendo en cuenta esta aclaración, para un cuerpo sólido en rotación pura definimos la cantidad de movimiento angular como *el momento de la cantidad de movimiento con respecto al eje*. Esto significa, para cada partícula del cuerpo, multiplicar el módulo del vector cantidad de movimiento, $m\,v_i$, por su brazo de palanca, o, distancia al eje, ρ_i.

Así, para todo el conjunto de partículas del cuerpo, tendremos:

$$J = \sum m_i\, v_i\,\rho_i$$
$$J = \sum m_i\,\omega\,\rho_i\,\rho_i$$
$$J = \sum m_i\,\rho_i^{\,2}\,\omega \tag{7.15}$$

Es decir, sacando ω factor común de la sumatoria, y utilizando la definición de momento de inercia (7.14):

$$\boxed{J = I\,\omega} \tag{7.16}$$

El concepto de momento de inercia nos permite escribir para la rotación, una expresión totalmente similar a la del movimiento lineal. Con esta notación, volviendo a la expresión (7.11) de la Ley del Impulso para las rotaciones puras, encontramos que ésta también adquiere una forma totalmente similar a la de las traslaciones:

Ley del Impulso de las rotaciones puras

$$\boxed{\begin{array}{l} M\,\Delta t = \Delta J \\ M\,\Delta t = I\,\Delta\omega \end{array}} \qquad (7.17)$$

Nota 3. Condición de equilibrio de los momentos

En esta ley interviene el momento resultante de las fuerzas exteriores. Si este momento resultante es nulo, estamos en la situación de equilibrio de momentos, situación en la cual se conserva la cantidad de movimiento angular.

Cuando tenemos situaciones estáticas, obviamente además de estar equilibradas las fuerzas, deben estar equilibrados sus momentos con respecto a cualquier eje que se imagine*, lo cual se conoce como "Condición de equilibrio de los momentos".*

Como vimos en el Capítulo 3, el equilibrio de las fuerzas sólo tiene en cuenta las componentes de las mismas. La condición de equilibrio de los momentos, en cambio, es importante en cualquier sistema estático para determinar dónde debe aplicarse cada fuerza.

• Trabajo y energía cinética de rotación

Utilizando los conceptos desarrollados hasta aquí es posible escribir expresiones para el teorema del trabajo y la energía cinética en las rotaciones, adaptadas a las variables angulares, totalmente similares a las del movimiento lineal.

Trabajo en una rotación pura

Ya sabemos que el trabajo hecho por una fuerza, en general, puede calcularse con la expresión (6.1): $W = F_T\, d$. Si ahora nos referimos a una fuerza que se aplica sobre un punto de un cuerpo rígido que tiene un eje fijo, tenemos que el punto gira describiendo una circunferencia de radio ρ, y podemos escribir:

Ángulo girado (en radianes): $\Delta\theta = \dfrac{d}{\rho}$

Momento aplicado: $M = F_T\, \rho$

De manera que si en la expresión (6.1) multiplicamos F_T y dividimos d, ambos por ρ, nos queda una expresión que expresa el trabajo en términos de variables angulares:

$$W = M\,\Delta\theta \qquad (7.18)$$

Esta expresión no es imprescindible, ya que es totalmente equivalente a (6.1) y cualquiera de las dos puede aplicarse a una rotación. Pero tiene el valor conceptual, y hasta estético, de permitir escribir, para las rotaciones, expresiones en variables angulares, totalmente similares a las expresiones en variables lineales que hemos visto para el movimiento de traslación.

Energía cinética en una rotación pura

"Tenemos que la energía cinética de cualquier sistema, y eso incluye a un cuerpo que rota, siempre puede ser expresada como:"

$$Ec = \sum \frac{m_i\, v_i^2}{2}$$

Veamos cómo se puede reescribir esto mismo en términos de las variables angulares. Escribamos las velocidades en la sumatoria en función de la única velocidad angular, ω, sustituyendo $v_i = \omega\, \rho_i$:

$$\sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i\, \omega^2\, \rho_i^2}{2}$$

Si en esta expresión extraemos ½ ω^2 como factor común fuera de la sumatoria, llegamos a las expresiones buscadas:

$$\mathrm{Ec} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i\, \rho_i^2$$

$$\mathrm{Ec} = \frac{I\, \omega^2}{2} \qquad (7.19)$$

• Teorema del trabajo y la energía cinética

Si repetimos con las variables angulares el mismo procedimiento hecho en el Capítulo 6 con las variables lineales para demostrar este teorema, llegamos exactamente a la misma expresión $W = \Delta Ec$, escrita ahora como:

$$M\, \Delta\theta = \Delta\, (½\, I\, \omega^2)$$

Donde M es el momento resultante de todos los momentos de las fuerzas exteriores con respecto al eje del cuerpo, $W = M\, \Delta\theta$ es el trabajo resultante de todas las fuerzas exteriores, y $Ec = ½\, I\, \omega^2$, es la energía cinética de rotación de este cuerpo.

Casos de momentos de inercia

Para calcular el momento de inercia de un cuerpo a partir de sus medidas se debe aplicar la relación (7.14): $I = \sum m_i\, \rho_i^2$. Excepto para el caso 1, los métodos matemáticos para evaluar esta suma no están a nuestro alcance aquí, pero podremos resumir algunas ideas básicas importantes, y algunas expresiones para cuerpos de formas típicas.

Caso 1: Masa puntual en el extremo de una varilla

Cuando hay un cuerpo girando sujeto en el extremo de una varilla o de un hilo de longitud L, suponiendo que el cuerpo tiene un tamaño despreciable frente a L, y que la masa de la varilla o hilo es despreciable frente a la masa del cuerpo, tenemos un caso trivial en el cual, para la sumatoria planteada en (7.14), todas las partículas que pueden considerarse tienen aproximadamente la misma distancia L al eje. Por lo tanto, L^2 resulta factor común de la suma de las masas, y queda:

$$I = m\, L^2 \qquad (7.20)$$

La misma idea también se aplica a cuerpos cuya masa se mantiene a distancia R (suficientemente grande) del eje, por medio de varillas o elementos cuya masa puede despreciarse, como el péndulo, cualquier objeto no muy grande que gira en el extremo de una cuerda, un anillo, una rueda de bicicleta y otros (figura 7.10).

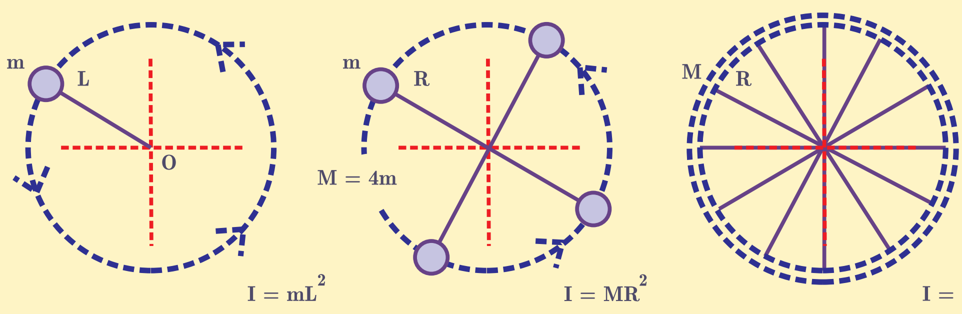


Fig. 7.10. Para los casos en los cuales la masa del cuerpo puede considerarse toda a cierta distancia fija del eje, el momento de inercia vale masa × distancia^2

Caso 2: Cilindro, o disco, con respecto a su eje (7.21)

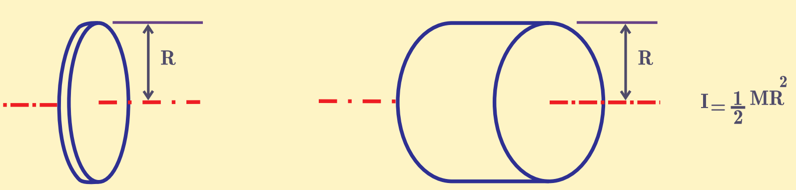


Fig. 7.11. Para un cilindro o un disco el momento de inercia con respecto al eje vale f × masa × R^2, donde f es un factor menor que 1 (en este caso, ½), ya que al efectuar la suma (7.14) todos los elementos de masa, excepto los del borde, tienen distancias ρ_i al eje menores que R.

Caso 3: Esfera, con respecto a un eje que pasa por el centro (7.22)

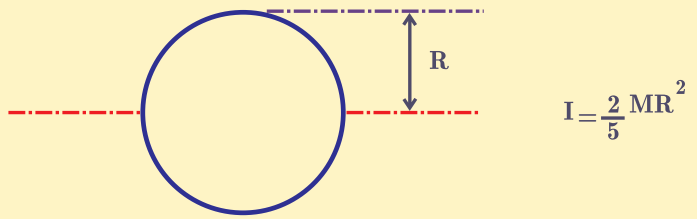


Fig. 7.12. Para una esfera sucede lo mismo dicho en la figura 7.11 para el cilindro, excepto que el factor f es menor aún (0,5 para el cilindro y 0,4 para la esfera), porque la esfera concentra más masa cerca del eje, a igualdad de otras condiciones.

Caso 4: Eje paralelo a otro con respecto al cual I es conocido (7.23)

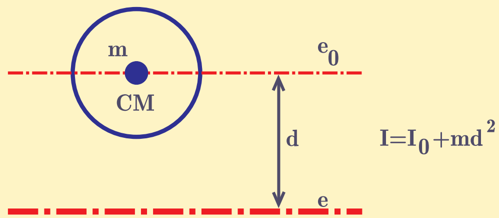


Fig. 7.13. El teorema de Steiner ayuda en los casos en que el eje de rotación está fuera del cuerpo.

Si se conoce el momento de inercia I_0 con respecto al eje e_0 que pasa por el centro de masa, el momento I con respecto a otro eje e, paralelo al anterior, a distancia d del mismo, vale (esto se conoce como "teorema de Steiner") Fig. 7.13.

Ejemplo 1

Aplicar (7.23) a una esfera de 2 cm de radio y 300 g de masa que gira sujeta al extremo de un hilo de 60 cm de largo, y determinar cuánto error se hubiera introducido aplicando (7.20).

Desarrollo

Aplicamos (7.23), con d = 62 cm. Para calcular I_0 aplicamos (7.22):

$$I_0 = 0{,}4 \times 0{,}30\,\text{kg} \times (2\,\text{cm})^2$$
$$I_0 \cong 0{,}48\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2.$$

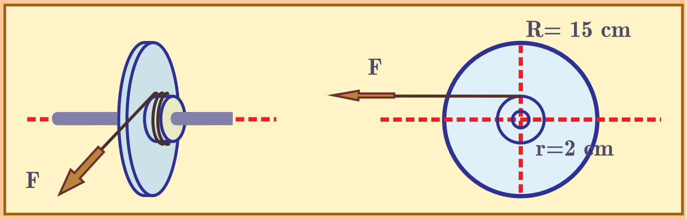
Ahora, aplicamos (7.23):

$$I = I_0 + 0{,}30\,\text{kg} \times (62\,\text{cm})^2$$
$$I \cong 0{,}48 + 1.153{,}2\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2$$
$$I \cong 1.153{,}7\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2.$$

Se ve claramente que el segundo sumando corresponde a la expresión (7.20), y que $I_0 \cong 0{,}48$ kg·cm^2, puede ser despreciado introduciendo un error < 0,05%.

Ejemplo 2

Consideremos un volante de hierro (7.850 kg/m^3) de 30 cm de diámetro y 1,2 cm de espesor, montado sobre un eje también cilíndrico de hierro, de 2 cm de diámetro y 30 cm de longitud, montado sobre cojinetes perfectos sin rozamiento.



Unido rígidamente a este disco con este disco hay un pequeño tambor de 2 cm de radio en el que se enrolla un hilo que se utiliza para hacer girar el sistema por medio de una fuerza que tira de él.

a) Calcular el momento de inercia del disco. Explicar si es necesario considerar las contribuciones del eje y del tambor, o si pueden despreciarse.

b) Calculas el momento y el impulso angular aplicado al disco si se tira del hilo con una fuerza de 20 N durante 6 s.

c) Suponiendo que inicialmente el disco está en reposo, calcular la velocidad angular que adquiere en este proceso, y a partir de ella obtener la longitud de hilo desenrollada bajo la acción de la fuerza.
A partir de la longitud de hilo desenrollada calcular el trabajo hecho por la fuerza, y verificar que coincide con la energía cinética adquirida.

d) Explicar cómo es el movimiento luego de suspenderse la aplicación de la fuerza.

Desarrollo

a) Tanto para el disco, como para el eje y el tambor se aplica la fórmula (7.21) del cilindro. Es de prever que las contribuciones del eje y del tambor serán despreciables (lo que mostraremos con unos cálculos aproximados).
Necesitamos las masas de cada parte.

$$M_{disco} = \text{densidad} \times \text{volumen}$$
$$M_{disco} = 7.850\ (\text{kg/m}^3) \times \pi \times (0{,}15\ \text{m})^2 \times 0{,}012\ \text{m}$$
$$M_{disco} \cong 6{,}66\ \text{kg}$$

$$M_{eje} = 7.850\ (\text{kg/m}^3) \times \pi \times (0{,}01\ \text{m})^2 \times 0{,}30\ \text{m}$$
$$M_{eje} \cong 0{,}74\ \text{kg}$$

No tenemos elementos para calcular la masa del tambor, pero veremos que no es necesaria porque no contribuirá apreciablemente al momento de inercia.

$$I_{disco} \cong \frac{6{,}66\ \text{kg} \times (0{,}15\ \text{m})^2}{2}$$

$$I_{disco} \cong 0{,}075\ \text{kg·m}^2.$$

$$I_{eje} \cong \frac{0{,}74\ \text{kg} \times (0{,}01\text{m})^2}{2}$$

$$I_{eje} \cong 0{,}000037\ \text{kg·m}^2,$$

totalmente despreciable frente al anterior. Asimismo, se puede estimar que el momento de inercia del tambor será comparable al del eje, tal vez menor y que, por lo tanto, no será necesario calcularlo.

b) El brazo de palanca de la fuerza aplicada es el radio del tambor, 2 cm, como se ve en la figura. Entonces, el momento aplicado es: $M = 20\ \text{N} \times 2\ \text{cm}$

$$M = 0{,}40\ \text{N·m}.$$

El impulso angular con respecto al eje resulta: $M\,\Delta t = 0{,}40\ \text{N·m}\ ;\ 6\ \text{s} = 2{,}4\ \text{J·s}$.

c) A partir de la ley del impulso, sabemos que la cantidad de movimiento angular adquirida es igual al impulso angular aplicado: $\Delta J = 2{,}4\ \text{J·s}$. Dado que inicialmente el disco estaba en reposo, ésta es la cantidad de movimiento angular final: $J(6\text{s}) = \Delta J$

$$J(6\text{s}) = 2{,}4\ \text{J·s}$$

$$J(6\text{s}) = I\,\omega.$$

De manera que $\omega = 2{,}4\ \text{J·s} / 0{,}075\ \text{kg·m}^2$

$$\omega = 32\ 1/\text{s}.$$

Dado que la velocidad angular varía uniformemente de 0 a 32 1/s, la velocidad del hilo, que es la del contorno del tambor ($v = \omega\, r$), pasa de 0 a 0,64 m/s, y su extremo recorre una distancia

$$d = v_m\,\Delta t$$

$$d = 0{,}32 \cdot 6$$

$$d = 1{,}92\ \text{m}$$

d) El trabajo hecho por la fuerza resulta $W = 20\ \text{N} \times 1{,}92\ \text{m}$

$$W = 38{,}4\ \text{J}$$

por otra parte, la energía cinética vale: $Ec = \dfrac{0{,}075\ \text{kg·m}^2 \times (32\ (1/\text{s}))^2}{2}$

$Ec = 38{,}4\ \text{J}$ (Hay total acuerdo).

e) Por inercia, luego de suspenderse la aplicación de la fuerza, suponiendo que no hay rozamientos, la rotación continuará con velocidad angular constante de 32 radianes por segundo.

La conservación de la cantidad de movimiento angular

A partir de la ley de Impulso para las rotaciones (7.17), es elemental plantear que si el momento resultante de las fuerzas exteriores es nulo, la cantidad de movimiento angular debe ser constante:

Si $M = 0$, entonces $J = \text{constante}$.

En el movimiento lineal, si la fuerza resultante es nula, debe conservarse la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$. Y dado que la masa es necesariamente constante, esto significa que debe conservarse $\vec{v}$.

En el movimiento angular hay una gran diferencia, porque J = I ω, pero I puede variar si el cuerpo cambia de forma. Es decir, para cuerpos absolutamente rígidos que giran alrededor de un eje fijo, la conservación de J es lo mismo que la conservación de ω. Estamos en un caso absolutamente similar a los casos de movimiento lineal.

Pero es fácil tener casos de movimientos de cuerpos formados por partes que pueden acercarse o alejarse, o acomodarse de diversas maneras, variando I. En estos casos, ω debe variar automáticamente de manera de mantener constante el producto I ω.

Un ejemplo analizado: Acróbatas y patinadores

Cuando se tiene un cuerpo que puede deformarse acercando o alejando partes al eje, la ausencia de momento aplicado con respecto al eje de rotación, implica la conservación de la cantidad I ω, y dado que I se puede disminuir (aumentar) acercando (alejando) partes al eje, resulta que se puede variar la velocidad angular, que es inversamente proporcional a I:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

Así tenemos el caso de patinadores que suelen iniciar giros alrededor de un eje vertical con los brazos abiertos, y luego logran aumentar enormemente la velocidad de rotación acercando los brazos al cuerpo para disminuir el momento de inercia.

Es notable en este caso (y en muchos otros similares), que si bien el sistema no está aislado de manera absoluta, lo está respecto de acciones referidas al eje de rotación, por ello se da este caso de conservación de J.

¡Pero no se conserva la energía cinética! Para verlo basta intentar con algunas cifras: por ejemplo, supongamos que $I_2 = I_1 / 3$, de manera que $\omega_2 = 3\ \omega_1$. Si calculamos la energía cinética final:

$$Ec_2 = ½\ I_2\ \omega_2^2$$
$$Ec_2 = ½\ (I_1/3)\ (3\omega_1)^2$$
$$Ec_2 = 3\ Ec_1$$

¿De dónde salió la energía cinética extra? Del *trabajo de las fuerzas interiores*: el patinador debe aplicar una fuerza para vencer la fuerza centrífuga y acercar sus brazos o partes al eje. Realiza un trabajo positivo (a expensas de su reserva interna de energía) que se traduce en el aumento de energía cinética de rotación.

Además, es fácil calcular que la fuerza centrífuga aumenta mucho para las partes que se acercan al eje, porque aumenta su velocidad lineal, y también disminuye el radio, de manera que el acróbata debe aplicar una gran fuerza para acercar estas partes, y ello resulta en un gran aumento de energía cinética. ¡Todo puede terminar en un gran desastre si el artista no está muy bien entrenado para mantener cada parte en el lugar y con la alineación exacta!

Actividad experimental ilustrativa

Conseguir un cordel fuerte de algo más de un metro de longitud y sujetar de un extremo algún cuerpo de unos 40 ó 50 gramos de masa (puede ser un llavero con dos o tres llaves).

Pasar el cordel por dentro de un tubo (puede ser el cuerpo de una birome) que habrá que sostener verticalmente en alto con una mano, revoleándolo suavemente de manera que el cuerpo en el extremo describa un movimiento circular horizontal, como se muestra. Mientras tanto el otro extremo del hilo debe ser mantenido fijo con la otra mano.

Cuando el movimiento tenga una velocidad suficiente como para mantenerse suavemente sin necesidad de mover más el tubito, apretando fuertemente a éste para mantenerlo lo más inmóvil posible, se tira suave pero sostenidamente con la otra mano del extremo del hilo para ir acortando el radio de la circunferencia.

Es claro que la fuerza aplicada por el hilo al cuerpo está alineada con el centro, por lo que no aplica momento, y se debe plantear la conservación de la cantidad de movimiento angular. Esta conservación, al disminuir el radio, se manifestará como un marcado aumento de la velocidad del cuerpo. El movimiento podrá llegar a transformase en un giro vertiginoso, mientras el aumento de la fuerza centrífuga hará imposible mantener inmóvil el tubo, que se sacudirá violentamente por más fuerza que se aplique para impedirlo.

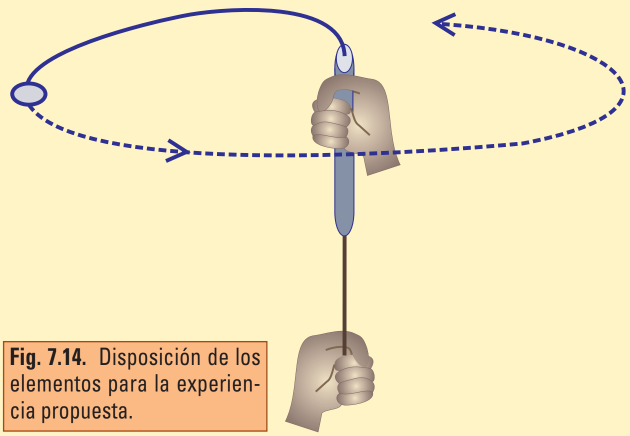


Fig. 7.14. Disposición de los elementos para la experiencia propuesta.

El efecto es muy notable a pesar del rozamiento que se hace muy fuerte en el borde del tubo. Para evitar accidentes se recomienda comenzar a experimentar con masas pequeñas y movimientos suaves.

7.4. Rotación más traslación

El movimiento más general posible de un cuerpo sólido, siempre se puede expresar como una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa, más una traslación pura con la velocidad del centro de masa.

Según la complejidad de cada situación, puede ocurrir que el eje de rotación se traslade paralelamente a sí mismo, o no; también la velocidad del centro de masa, tanto como la velocidad de rotación, pueden ser constantes, o variar de maneras complicadas.

En cualquier caso, siempre podremos tratar el movimiento aplicando las siguientes leyes:

a) Movimiento Lineal

Para cualquier movimiento de un cuerpo rígido, la parte del movimiento de traslación siempre se trata con la Ley del Impulso:

$$\vec{F}_R \Delta t = m\,\Delta\vec{v}_{CM}$$

Donde

F_R es la resultante de todas las fuerzas exteriores

m es la masa del cuerpo

$\vec{v}_{CM}$ es la velocidad del centro de masa

En el movimiento de traslación pura todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad que el centro de masa, $\vec{v}_{CM}$. Esto equivale a decir que tenemos una única partícula con toda la masa, concentrada en el centro de masa. Es lo que hicimos al desarrollar todos los temas de dinámica de movimientos lineales, todo ello tiene vigencia para esto.

Además, sabemos que esta ley, referida al movimiento del centro de masa, es válida para cualquier sistema, sea rígido o no.

B) Movimiento intrínseco

La parte del movimiento intrínseco de un cuerpo rígido siempre es una rotación, y se trata con la Ley del Impulso para las rotaciones:

$$M_{CM}\,\Delta t = \Delta J_{CM}$$

Donde

M_{CM} es el momento total de las fuerzas exteriores con respecto al centro de masa

J_{CM} es la cantidad de movimiento angular intrínseco, es decir con respecto al centro de masa.

C) Energía cinética total

La energía cinética total (de un cuerpo sólido) siempre puede escribirse como la suma de dos términos:

$$Ec = ½\, m\, v_{CM}^2 + ½\, I_{CM}\, \omega^2$$
$$Ec = Ec_T + Ec_R$$

Donde:

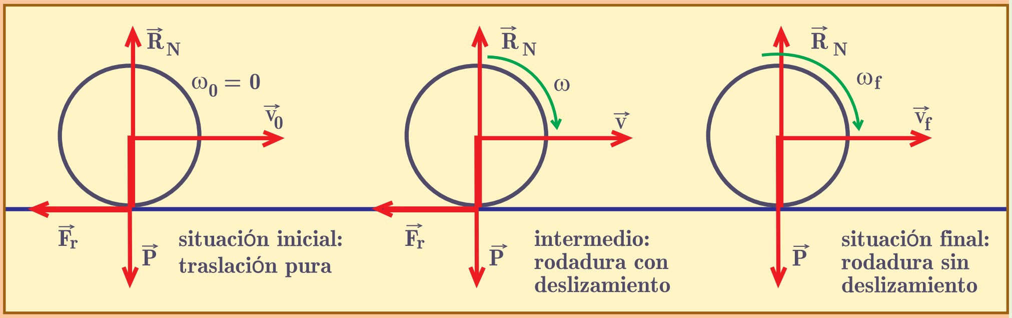
$Ec_T = ½\, m\, v_{CM}^2$, es la energía cinética de traslación, correspondiente a toda la masa m desplazándose con la velocidad del centro de masa, y $Ec_R = ½\, I_{CM}\, \omega^2$, es la energía cinética de rotación, siendo I_{CM} el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa.

Ejemplo

En un juego de bolos se arroja un bolo de 16 cm de diámetro y 2 kg de masa con una velocidad de 10 m/s. El bolo es arrojado horizontalmente, sin girar sobre sí mismo, y rasante con el piso (de manera que toma contacto inmediatamente con él, sin golpear). Así que inicialmente el movimiento es de traslación pura, y en el punto de contacto, donde el bolo desliza, actúa una fuerza de rozamiento de 2 N.

Describir todos los aspectos posibles del movimiento, con todos los cálculos correspondientes.

Desarrollo



Inicialmente, desde que el bolo toma contacto con la pista, tenemos la acción de una fuerza de rozamiento constante, que a su vez es la fuerza resultante, ya que en la dirección vertical el peso se equilibra con la reacción normal de la pista.

Dado que el bolo es un cuerpo rígido debemos considerar, por un lado el movimiento del centro de masa (que es simplemente el centro geométrico del bolo), y por otro lado la rotación alrededor del centro.

Para el movimiento del centro tenemos que considerar la acción de la fuerza resultante, que es el rozamiento, constante, de 2 N hacia atrás. Resulta que tenemos un MRUV, con aceleración

$a = 2N / 2kg$
$a = 1\ m/s^2$,
en sentido contrario al movimiento.
Por otra parte, para la rotación tenemos que considerar que sólo la fuerza de rozamiento tiene momento con respecto al centro. Dicho momento es constante, vale $2\ N \times 0{,}08\ m = 0{,}16\ N{\cdot}m$, y actúa en el sentido de hacer rodar el bolo hacia delante.
Esto nos dice que mientras el avance se va retardando uniformemente, la rotación se va acelerando uniformemente, de manera que el movimiento comienza siendo de traslación pura, pero continúa siendo una superposición de traslación retardada, con rotación acelerada, deslizando en el punto de contacto. Descripto desde un sistema en el que el centro del bolo esté en reposo, la parte inferior del bolo pasa hacia atrás con velocidad ωR (cada vez mayor a medida que aumenta), y el piso pasa también hacia atrás a velocidad cada vez menor (a medida que el bolo se frena). En algún momento, esas velocidades se igualarán, y en ese instante desaparecerá el deslizamiento. En ese instante también deberá desaparecer la fuerza de rozamiento. Esto es muy notable, y para deducirlo haremos un razonamiento que se denomina "por el absurdo", y consiste en razonar mostrando que si suponemos que lo que queremos demostrar no sucede, entonces se llega a una conclusión absurda.
Es decir, para probar que la fuerza de rozamiento debe desaparecer en el instante en que la velocidad del centro se iguala con ωR, supongamos que se llega a esa condición, y la fuerza de rozamiento no desaparece.
Entonces, como la fuerza de rozamiento actuante sobre la superficie inferior del bolo es un vector que apunta hacia atrás, concluimos que un instante después el bolo debería rotar más rápido, y avanzar más despacio (que lo que corresponde a la relación $v = \omega R$). Esto significa que su superficie inferior debería deslizar hacia atrás respecto de la pista.
Pero si la superficie del bolo se deslizara hacia atrás respecto de la pista, ésta debería aplicarle una fuerza de rozamiento en sentido contrario, oponiéndose al deslizamiento, es decir hacia delante.
Como se ve, habríamos llegado a una contradicción, o absurdo, porque partimos de suponer que la fuerza continuaba actuando hacia atrás.
A partir del instante en que desaparece el rozamiento, el bolo continúa rodando y avanzando sin deslizar, uniformemente.
Estas consideraciones nos indican qué es lo que puede ser interesante calcular: ¿Cuál es la velocidad final que luego se mantendrá constante, cuánto tiempo debe transcurrir hasta que se llegue a la condición de rodadura sin deslizamiento, qué distancia se recorre en este proceso, cuánta energía se pierde por rozamiento?
Comencemos tratando de calcular la velocidad final.
La condición de rodadura sin deslizamiento es que la velocidad del centro sea igual a la velocidad del contorno del bolo con relación al centro, ωR (les coloco el subíndice f porque estos serán los valores finales):

$$v_f = \omega_f R$$

Ahora bien, siendo $t = 0$ el instante del contacto inicial con el piso, aplicamos Ley del Impulso para la velocidad del centro: $m\,v(t) = m\,v_0 - F_r\,t$
Mientras tanto, aplicamos Ley del impulso de Rotación para la velocidad de rotación (inicial es nula):

$$I\,\omega(t) = M\,t$$
$$I\,\omega(t) = F_r\,R\,t$$

En el instante t_f en que se alcanza la condición de rodadura perfecta se deben cumplir:

$$v_f = \omega_f R$$
$$m\,v_f = m\,v_0 - F\,t_f$$
$$I\,\omega_f = F\,R\,t_f$$

Eliminando t_f y ω_f, se obtiene:

$$v_f = v_0 \frac{1}{1+\frac{I}{m R^2}} \Rightarrow v_0 \ \frac{1}{1{,}4} = 7{,}14\ m/s$$

Con este valor se obtiene directamente $\omega_f = 89{,}3$ 1/s, y $t_f = \dfrac{2\,kg \times 10\,m/s}{2\,N} \times \dfrac{0{,}4}{1{,}4}$

$$t_f = 2{,}86 \text{ s.}$$

La distancia recorrida en ese tiempo es: $d_f = ½\,(v0 + v_f)\,t_f$

$$d_f = 24{,}5 \text{ m.}$$

La energía cinética inicial es de traslación pura: $\dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 = 100$ J, mientras que la final es de traslación y rotación:

$$½\,m\,v_f^2 + ½\,I\,\omega_f^2 = 51{,}0 \text{ J} + 20{,}4 \text{ J}$$

$$½\,m\,v_f^2 + ½\,I\,\omega_f^2 = 71{,}4 \text{ J,}$$

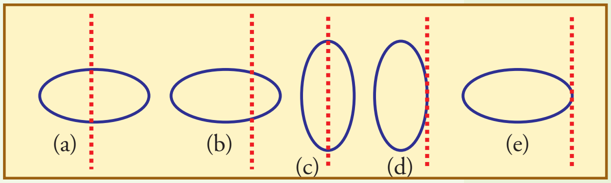
de manera que la energía cinética perdida es 28,6 J.

Nótese que si multiplicamos la fuerza de rozamiento por la distancia recorrida mientras ella actúa obtenemos: 2 N×24,5 m = 49 J, que no es la energía perdida, sino sólo la energía cinética de traslación perdida. Esto se entiende porque dado que la bola rodaba, el deslizamiento entre las superficies nunca llegó a ser 24,5 m, y una parte del trabajo de la fuerza de rozamiento no se perdió en fricción, sino que se empleó en producir la rotación.

EJERCICIOS CAPÍTULO 7

▲ Ejercicio 7.1

Considere el siguiente cuerpo, que es homogéneo y puede girar alrededor del eje, tal como se indica, en varias posiciones distintas.

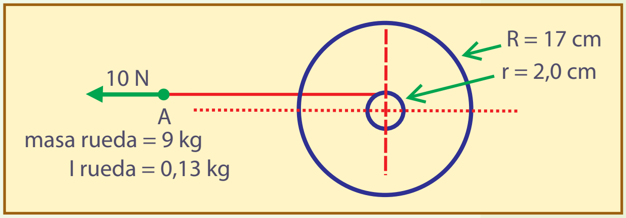


Indique con respecto a cuál eje es máximo y con respecto a cuál es mínimo el momento de inercia.

Si se cambia el material del cuerpo, construyéndolo de hierro, vidrio, o madera: ¿en qué caso será I mayor?

▲ Ejercicio 7.2

Se dispone de una rueda o volante de hierro de 17 cm. de radio y 9 kg. de masa, montada sobre un eje horizontal que descansa en unos cojinetes que oponen a la rotación un momento de rozamiento de 0,010 N·m. Solidario con la rueda hay un tambor de 2 cm. de radio, en el cual hay enrollado un hilo de cuyo extremo A se tira con una fuerza $\vec{F}_A$ de 10 N, como indica la figura:



a) Calcule el momento neto aplicado con respecto al eje.

b) Sabiendo que la densidad del hierro es 7.850 kg/m^3, verifique el valor del momento de inercia.

c) Calcule la energía cinética de rotación adquirida por la rueda luego de desenrollarse 0,80 m. de hilo bajo la acción de la fuerza.

Calcule la velocidad angular y la cantidad de movimiento angular en ese momento.

d) Explique lo que sucederá al suspenderse la aplicación de F_A.

▲ Ejercicio 7.3

Sobre una esfera maciza de m = 30 kg, y radio R = 0,2 m, que se encontraba inicialmente en reposo montada sobre un eje que pasa por su centro, se aplica adecuadamente durante 4 segundos una fuerza que la pone en rotación. Si la esfera adquiere una velocidad angular de 10 radianes/segundo, se le pide que:

a) Calcule el momento de inercia de la esfera giratoria.

b) Calcule el momento que actuó sobre la esfera con respecto al eje, y la cantidad de movimiento angular intrínseca adquirida por ésta.

▲ Ejercicio 7.4

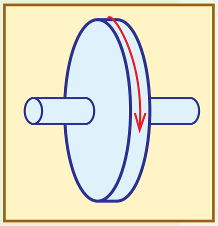
Una centrifugadora cuyo rotor tiene forma aproximadamente cilíndrica, de radio R = 10 cm, y masa m = 2 kg, hace girar a éste, en régimen, a 10^4 r.p.m., por medio de un motor de 100 W.

a) Calcule el momento resistente que se opone a la rotación del rotor en régimen.

b) Calcule la cantidad de movimiento angular y la energía cinética de rotación del rotor en régimen.

c) Calcule la fuerza centrífuga sobre cualquier trozo de materia en la periferia de ese rotor, y compárelo con el correspondiente peso.

▲ Ejercicio 7.5



Un volante montado sobre cojinetes sin rozamiento, cuyo momento de inercia vale I = 0,2 kg·m², rota con velocidad angular constante ω = 30 rad/s, con el sentido que se muestra.

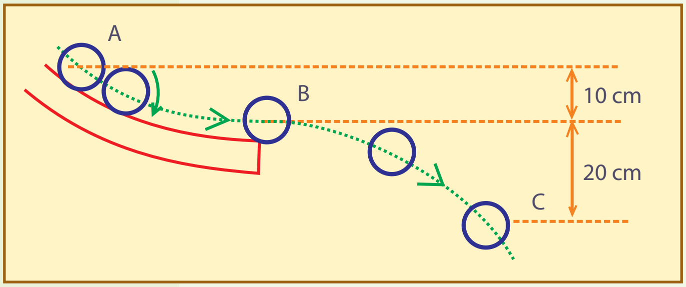
En un instante dado se le aplica un momento de frenado, M, hasta que la rotación se detiene luego de 3 segundos de actuar M.

a) Calcule la cantidad de movimiento angular inicial del volante. Dibuje el vector axial correspondiente.

b) Calcule el valor del momento aplicado M. Dibuje el vector axial correspondiente.

▲ Ejercicio 7.6

Una esfera maciza de 5 cm de diámetro y 600 g de masa baja rodando (sin deslizar) por una rampa, y luego cae libremente siguiendo una trayectoria parabólica. La figura muestra 5 posiciones sucesivas, en una vista lateral.



a) Realice un diagrama de cuerpo aislado mostrando las fuerzas actuantes en un instante intermedio en la rampa, y en un instante intermedio en la caída libre. Analice el efecto de cada fuerza.

b) Suponiendo que la esfera parte en reposo desde A, y teniendo en cuenta las alturas indicadas en la figura, calcule las velocidades y energías cinéticas de traslación y rotación en B y en C.

c) Analice si las velocidades cambiarían si se disminuyera la masa utilizando:

c1) Una esfera de un material más liviano y del mismo tamaño.

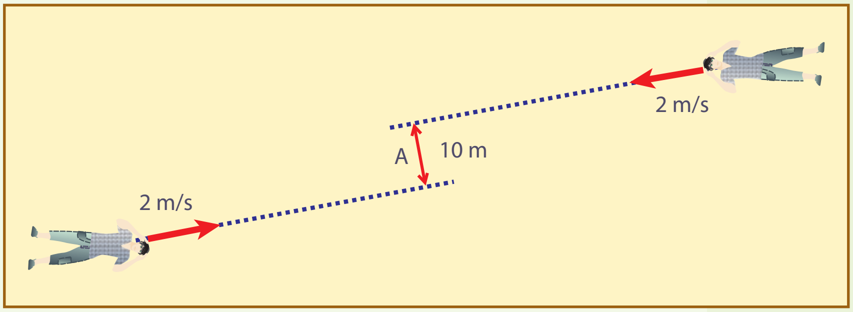
c2) Una esfera del mismo material y menor diámetro.

c3) Una esfera hueca.

Ejercicio 7.7

Dos astronautas de la estación espacial internacional que deben efectuar un reparación en el exterior parten desde puntos diferentes para reunirse en un punto A, pero calculan mal sus trayectorias, resultando que en la máxima proximidad pasarán a 10 m uno del otro, como se muestra.

Ellos no se preocupan por el error pues uno de ellos dispone de un cordel que lanza al otro, el cual consigue sujetarse, ambos se amarran, y cuando llegan a la máxima proximidad comienzan a tirar de él para acercarse.



Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento angular muestre que el método no es bueno, y que los astronautas difícilmente tendrán fuerza para acercarse a más de 4 m. Analice los peligros del procedimiento.

Apéndice 1

Notación exponencial y cifras significativas

Notación exponencial

A veces es necesario utilizar números que, por ser extremadamente grandes o pequeños, se escriben con muchos ceros. Por ejemplo: la distancia de la Tierra al Sol es 149.000.000.000 metros, y la masa del protón vale 0,00000000000000000000000000166 kg. Si tuviéramos que operar con estos números escritos de esta manera tendríamos dos problemas serios: por un lado que es muy fácil cometer errores en la cantidad de ceros que se escriben, y por otro que las calculadoras comunes no admiten tantas cifras.
Estos inconvenientes se solucionan fácilmente reemplazando todo el conjunto de ceros a la izquierda o a la derecha, por la correspondiente multiplicación o división por potencias de diez. Para esto sólo hay que recordar que:

$$\mathbf{1}\,\underbrace{\mathbf{0\,0\,0\ldots0}}_{\textbf{n ceros}} = 10^{n}$$

$$\underbrace{\mathbf{0{,}0\,0\ldots0}}_{\textbf{n ceros}}\,\mathbf{1} = 10^{-n}$$

$$\underbrace{\mathbf{0{,}0\,0\ldots0}}_{\textbf{n ceros}}\,\mathbf{1} = \frac{1}{10^{n}}$$

Esto se llama “notación exponencial”, o “notación científica”.
Los mismos ejemplos con esta notación (se muestran varias posibilidades equivalentes):

Distancia de la Tierra al Sol:

149×10^{9} m = $1{,}49\times10^{11}$ m

149×10^{9} m = $0{,}149\times10^{12}$ m

149×10^{9} m = 149×10^{6} km

Masa del protón:

$1{,}66\times10^{-27}$ kg = $0{,}166\times10^{-26}$ kg

$1{,}66\times10^{-27}$ kg = 166×10^{-29} kg

Cifras significativas

Cuando un número expresa el resultado de una medición está afectado de cierta *incerteza experimental*, que depende de muchos factores tales como: la calidad del instrumento de medición, el cuidado y la pericia del operador que realiza la medida o lectura del instrumento, entre otros. Por eso, el número que expresa el re-

sultado de una medición o experimento puede tener algunas cifras que el experimentador juzga que son muy seguras, otras que son dudosas, y algunas otras que sabe que no tienen ningún sentido (por ejemplo, porque el procedimiento terminaba con un cálculo y el visor de una calculadora tenía 20 decimales).
Se denominan *cifras significativas* a aquellas que tienen realmente algún significado experimental, o sea, las que el operador juzga seguras más una que se puede estimar con cierto grado de aproximación.
Por ejemplo: al medir un objeto con una regla graduada al milímetro, podemos obtener 23,7 cm. En este caso, hemos expresado el resultado con tres cifras significativas, y no estamos afirmando que la cuarta cifra debería ser un cero, ni que no debería serlo. Con la misma regla podríamos haber *estimado* una cifra significativa más, y decir, por ejemplo, que el objeto mide 23,72 cm.
Si en cambio decimos que el resultado de la medición es 23,70 cm, estamos anunciando que vimos que el extremo del objeto llegaba exactamente hasta la 7ª marca después del 23. En este caso el cero es la cuarta cifra significativa, y si bien matemáticamente el número 23,7 es exactamente igual al 23,70, ambos *no son equivalentes como indicativos del resultado de una medición*.

En la calculadora científica:

Apretar la tecla "exp" seguida del exponente, luego de ingresar la parte numérica. En el visor a veces aparece la letra e, reemplazando al número 10.

Así, por ejemplo la masa del protón se ingresaría apretando sucesivamente:

1	,	6	6	exp	+/ -	2	7

El visor mostrará: 1,66e(-27), lo que significa 1,66 multiplicado por 10^{-27}.

• **Ejemplo**

1) Utilizando potencias de 10, exprese una masa de 12.583 kg con tres cifras significativas de dos maneras diferentes.

2) Eligiendo el prefijo adecuado, exprese correctamente esta masa con tres cifras significativas, sin utilizar potencias de 10.

• **Desarrollo**

1) Utilizar tres cifras significativas significa que hay que prescindir de las dos últimas, en este caso reemplazándolas por potencias de 10, y redondeando el 5 a 6, porque la primera cifra eliminada es un 8.
De manera que podemos escribir, por ejemplo, 126×10^2 kg. Y sobre esto tomado como base, podemos dividir el 126 por cualquier potencia positiva de 10, corriéndole la coma hacia la izquierda, y agregar esas potencias en el factor de la derecha, por ejemplo: $0,126\times10^5$ kg.

2) Tenemos que buscar prefijos que indiquen más de 10^2 kg, por ejemplo, Mg, o Gg (dado que no podemos superponer prefijos, hay que colocarle prefijos al gramo, y no al kilogramo).
Dos posibilidades serían entonces: 12,6 Mg, ó 0,0126 Gg.

Reglas prácticas para expresar correctamente resultados experimentales, escribiendo sólo las cifras significativas:

***1)** No se deben agregar ceros a la derecha de la coma decimal sin justificación.*

***Ejemplo:** una persona se pesa y lee en la escala de la balanza 82,7 kg. Esta lectura tiene tres cifras significativas, y no debe escribirse como 82,70 ni 82,700, ya que estos ceros no han sido leídos, y aunque lo hubieran sido no tendrían significado porque cambiarían en cuanto la persona ingiriera un poco de agua, o la perdiera con la transpiración, o entregara unas monedas que tenía en su bolsillo en el momento de pesarse.*
Si se desea expresar este valor en gramos (se lo debe multiplicar por 1.000) lo correcto no es decir 82.700 gramos, sino que, recurriendo a la notación exponencial puede escribirse:

$82,7\times10^3$ gramos , o bien: 827×10^2 gramos ,
o bien: $0,827\times10^5$ gramos, etc.

***2)** No se deben escribir todas las cifras que aparecen en el visor de la calculadora.*

***Ejemplo:** si para alguna finalidad cualquiera, a la persona del ejemplo anterior le dicen que averigüe la tercera parte de su peso, al dividir 82,7 por 3 la calculadora indicará: 27,56666666666666…*
En este caso el número deberá limitarse a las cifras con significado, que son tres: 27,6 kg (la última cifra se redondea *al valor más próximo).*

Apéndice 2

Tipos de esfuerzo y tensiones

Cuando la fuerza ejercida a través de una superficie es perpendicular a la misma, decimos que la tensión producida es *normal*, refiriéndonos exclusivamente al significado matemático del vocablo "normal", como sinónimo de "perpendicular". Si la fuerza actúa paralelamente a la superficie considerada la tensión se denomina *tangencial*; y todos los casos intermedios se describen en términos de las correspondientes componentes.

• Tensiones normales

Las tensiones normales pueden ser de *tracción* o de *compresión*. El esfuerzo de tracción es el que tiende a alargar el material, y el de compresión es el que tiende a acortarlo (también suele denominarse *presión* a la compresión, y *tensión* a la tracción; para evitar confusiones conviene siempre aclarar lo que se quiere decir).

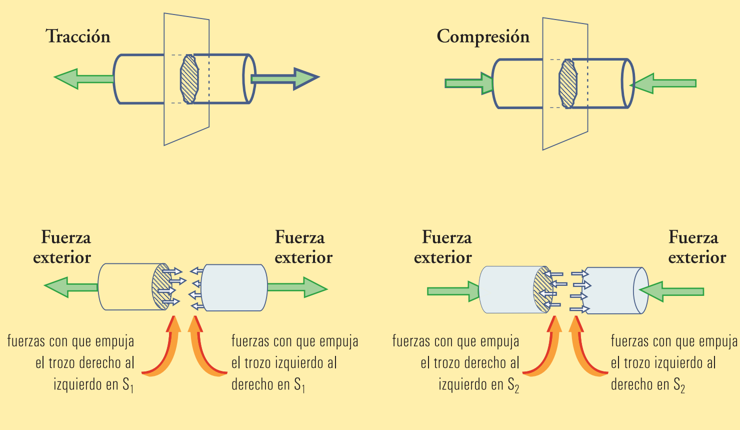


Fig. A2.1. Tensiones de tracción actuando a través de secciones como S_1, y de compresión a través de S_2. Para cada cuerpo se lo puede considerar dividido en partes en la sección indicada, y abajo se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada parte de cada cuerpo. En cada sección se han dibujado pequeños vectores representativos de las fuerzas distribuidas, y esto es válido para cada una de las infinitas secciones transversales imaginables.

Es importante entender lo que muestra la figura A2.1: las tensiones de tracción (o de compresión) están en todo el interior del cuerpo traccionado (o comprimido). En cualquiera de las infinitas secciones transversales imaginables la fuerza está distribuida actuando como lo indica el principio de acción y reacción: la parte que queda de un lado de la sección, tira (o empuja) de la parte que queda del otro lado.
De esta manera el sólido transmite la fuerza que un cuerpo le aplica en un extremo, a cada una de sus partes, y finalmente al cuerpo que esté en el otro extremo.

En la figura A2.5 puede verse además como se distribuyen las tensiones en secciones que no son transversales para un caso de compresión. Esta figura sirve para alertarnos sobre la complejidad de estos temas, que sólo estamos tratando a nivel de presentación elemental.

Un caso en el cual son importantes las tensiones de tracción y compresión es el de *flexión*. La figura A2.2 muestra un cuerpo sometido a *flexión*. Es relativamente fácil ver que en una varilla que se flexiona hay una parte que debe estirarse y que la opuesta debe acortarse, de tal manera que una sección transversal cualquiera como S5 está sometida principalmente a tensiones normales, de tracción en una parte y de compresión en otra.

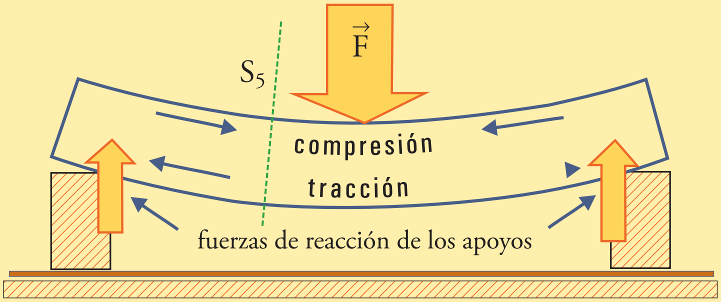


Fig. A2.2. Flexión de una viga apoyada en los extremos, por medio de una fuerza en su centro. Con flechas huecas se muestran las fuerzas actuantes sobre la viga desde el exterior, y con flechas negras se indican esfuerzos (interiores) de compresión en la parte superior de la viga, y de tracción en la zona inferior.

• Tensiones tangenciales

Las tensiones **tangenciales** describen cómo se distribuyen las fuerzas que actúan paralelamente a una superficie. El caso que más nos interesará en las aplicaciones es el del rozamiento, que ilustramos en la figura A2.3.

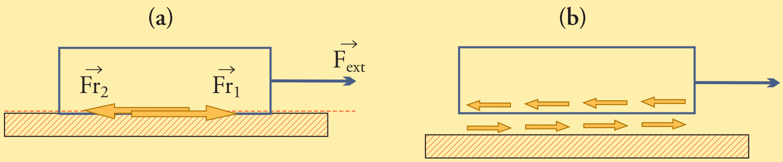


Fig. A2.3. Un caso típico de fuerza tangencial: el rozamiento. Un cuerpo es arrastrado por la fuerza F_{ext}, y ello provoca la aparición de fuerzas de rozamiento tangenciales en la superficie de contacto S_3. En (a) se muestra el par acción-reacción de rozamiento en S_3. Para no complicar la figura no se muestran las fuerzas normales, que son las que presionan una superficie contra la otra. En (b) se muestran por separado el cuerpo y el piso, destacando qué fuerza actúa sobre cada uno, y cómo están distribuidas en la superficie de contacto.

La fuerza de rozamiento siempre se distribuye como una tensión tangencial en la superficie a lo largo de la cual se trata de arrastrar un cuerpo: el cuerpo que el agente quiere arrastrar hacia la derecha, aplica una fuerza (de rozamiento) Fr_1 sobre el piso, tendiendo a arrastrarlo en ese mismo sentido (hacia la derecha), y por acción-reacción el piso aplica la misma fuerza de rozamiento, a través de la misma superficie, pero hacia la izquierda (Fr_2 =- Fr_1) al cuerpo, tendiente a impedir su deslizamiento. Estas fuerzas, divididas por la superficie de contacto, dan la tensión tangencial de rozamiento.

Las tensiones tangenciales también aparecen en los esfuerzos de ***torsión***, en las secciones como S_4 en la figura A2.4. La denominación de "torsión" se refiere claramente al efecto de retorcer. El que éstas sean tensiones *tangenciales* se deduce del hecho de que lo que está de un lado de la sección en cuestión tiende a rotar, deslizando en esa sección S_4, sobre la que está del otro lado.

La capacidad de una fuerza para flexionar y torsionar está dada por lo que se denomina "momento de la fuerza", que veremos en el capítulo de rotaciones.

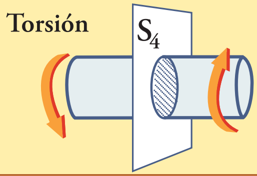


Fig. A2.4. La parte del cilindro que está a la derecha de cualquier sección S4 tiende a rotar, deslizando en esa sección, sobre la que está a la izquierda.

• Tensiones isotrópicas

Un caso interesante es el de los fluidos. Los fluidos deben ser contenidos por recipientes, de manera que al ser presionado un fluido en alguna dirección, él presionará en todos los lugares de las paredes, perpendicularmente en cada lugar, y por acción-reacción recibirá presión de la misma manera. Si se supone que en algún elemento de su-

Fig. A2.5. La fuerza F se aplica por medio de una tapa émbolo adecuada sobre un fluido conteni-do en un recipiente a la iz-quierda, y sobre un sólido de forma similar, a la dere-cha (las flechas ne-gras representan acciones ex-teriores, y las blancas, in-teriores). En el fluido aparecen presiones nor-males sobre las paredes y sobre cualquier superficie interior, tal como S_1 o S_2. En el sólido sólo actúan presiones verticales, nor-males en las superficies horizontales como S_3, pero con compo-nentes tangen-ciales sobre superficies oblicuas como S_1. En el só-lido no hay tensiones ac-tuando sobre superficies verticales como S_2.

perficie de la pared no actúa una fuerza conteniendo al fluido, existiría un hueco por el cual el fluido se escurriría.

Esto también vale para cualquier elemento de superficie que se considere en el seno del fluido, ya que siempre podría imaginarse una pared hipotética que contuviera al fluido pasando por ese lugar.

Por otra parte, si imaginásemos que por un momento existieran tensiones tangenciales a lo largo de una superficie, nada podría impedir el deslizamiento que tenderían a producir estas tensiones, así tendríamos que las porciones de fluido deslizarían, y el sistema estaría *fluyendo*. En estas condiciones existen tensiones tangenciales en los fluidos, las que constituyen el *rozamiento fluido*, o *viscoso*, por lo cual estas tensiones también se denominan viscosas. Cuando el fluido llega finalmente al reposo, ya no puede haber fuerzas tangenciales.

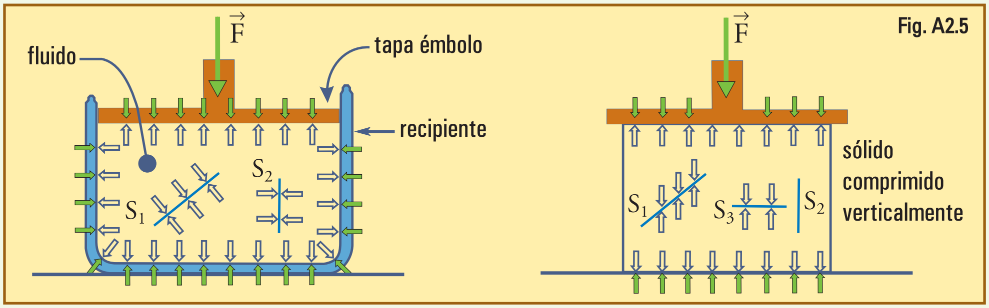


Fig. A2.5

De manera que ésta es una presión esencialmente normal, que se denomina hidrostática debido a que corresponde a los líquidos estáticos, y sus características generalmente son resumidas en el enunciado conocido como “Principio de PASCAL”:

Los fluidos transmiten presiones en todas direcciones y sentidos, y éstas actúan siempre perpendicularmente a la superficie que se considere.

Vale destacar que, como se muestra en la figura A2.5, si se considera un elemento de superficie con cualquier orientación en el interior del fluido, deberá haber fuerza aplicada perpendicularmente por el fluido sobre él, desde ambos lados, en sentidos opuestos (acción-reacción). Esta manera particular de actuar la presión se denomina *isotrópica*, que significa “igual en cualquier dirección”. En la práctica estas presiones son casi siempre de compresión, y se denominan presiones positivas, pero pueden ser de tracción, en cuyo caso se suelen denominar negativas

Resumen de propiedades mecánicas de los materiales

El tema propiedades mecánicas de los materiales es muy vasto y escapa a los objetivos de este libro, pero es importante tener un vocabulario mínimo sobre el tema, para lo cual será suficiente con la siguiente descripción básica.

- ***Dureza***: es la capacidad de cada material de rayar o marcar a otros, sin ser marcado por ellos. Debido a que las mediciones de dureza son las más sencillas, muchas veces son utilizadas para identificar materiales y para controlar el estado mecánico de estructuras.
- ***Ductilidad***: es la plasticidad de un material frente a esfuerzos de tracción, es decir la capacidad para alargarse permanentemente sin romperse. Esta propiedad permite estirar los metales transformándolos en alambres.
- ***Maleabilidad***: es la plasticidad frente a esfuerzos de compresión, es decir la capacidad para aplastarse el material permanentemente. Esta propiedad permite forjar y laminar los metales transformándolos en chapas.
- ***Fragilidad***: un material frágil es el que se rompe sin muestras de deformación plástica; ésta es la propiedad opuesta a la plasticidad. Los materiales muy duros tienden a ser frágiles, y la característica distintiva podría decirse que es la poca resistencia a los choques.
- ***Tenacidad***: ésta es una combinación de resistencia elevada con gran capacidad de deformación permanente sin romperse. La resistencia de un material a los choques se suele tomar como índice de su tenacidad.

Estas propiedades mecánicas tienen que ver con la composición química del material, pero también dependen de una serie de procedimientos de fabricación, que determinan cómo es la estructura cristalina, cómo se distribuyen en ella los distintos componentes, etc.

Un ejemplo muy conocido de combinación propiedades lo constituye el "hormigón armado". Debido a que el cemento de construcción (cemento "portland") resiste muy bien la compresión, pero es frágil y no resiste casi nada a la tracción, las estructuras de hormigón que deben soportar esfuerzos de flexión deben ser "armadas" con varillas o alambres de acero, de gran tenacidad, en las partes en las que se desarrollan los esfuerzos de tracción que el hormigón solo no podría soportar. Los hierros se ubican a lo largo, en las zonas de mayores esfuerzos de tracción.

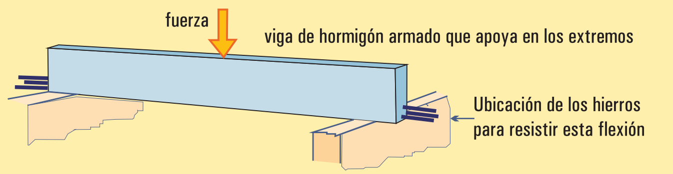


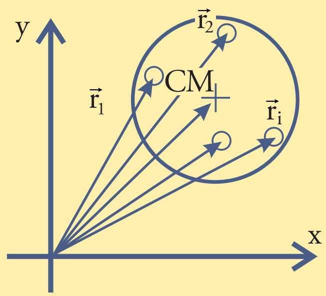
Fig. A2.6. Ubicación de las varillas de acero en una viga de hormigón armado

Apéndice 3

Centro de masa

El punto que promedia la ubicación de la masa se denomina *centro de masa* (CM), y dado que la acción de la gravedad es proporcional a la masa, es natural esperar que coincida con el centro de gravedad CG, cosa que efectivamente ocurre, y utilizaremos cuando necesitemos, aunque sólo lo demostraremos bastante más adelante.

La forma conceptualmente más simple de definir el punto que promedia la ubicación de la masa de un cuerpo, consiste en descomponer el cuerpo en muchas partículas iguales de masa m_0. Si aquí utilizamos la letra N para designar al número de tales partículas, y $\vec{r}_i$ es el vector posición de la partícula i, entonces el vector posición promedio, que define la ubicación del CM (A3.1).



(A 3.1)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \vec{r}_i}{N}$$

Para encontrar una expresión más útil y general tratemos ahora de hallar el CM de un cuerpo compuesto por partes de diferente forma y masa.

Para poder aplicar (A3.1) consideremos que todas las partes están a su vez integradas por partículas iguales de masa m_0. Entonces la parte 1, de masa m_1, está formada por $N_1 = m_1/m_0$ partículas, la parte 2, de masa m_2, está formada por $N_2 = m_2/m_0$ partículas, etc. El centro de masa de cada parte, CM_1, CM_2, etc., se puede encontrar con (A3.1) limitando la suma a las partículas de esa parte; y para encontrar el centro de masa de todo el cuerpo se plantea la suma sobre todas las partículas de todas las partes, como sigue (para las partículas de cada parte se escriben índices i_1, i_2, etc., que van desde 1 hasta N_1, N_2, etc.).

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{N_1} \vec{r}_{i_1} + \sum_{N_2} \vec{r}_{i_2} + \cdots}{N_1 + N_2 + \cdots}$$

Ahora bien, si a cada término del numerador lo multiplicamos y dividimos por el número de partículas de la parte correspondiente, podemos identificar fácilmente el vector posición del CM de esa parte:

$$\text{Numerador} = N_1 \frac{1}{N_1} \sum_{N_1} \vec{r}_{i_1} + N_2 \frac{1}{N_2} \sum_{N_2} \vec{r}_{i_2} + \cdots$$

$$\text{Numerador} = N_1 \vec{r}_{CM1} + N_2 \vec{r}_{CM2} + \cdots$$

De manera que la expresión del centro de masa del cuerpo completo también queda:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{N_1 \vec{r}_{CM1} + N_2 \vec{r}_{CM2} + \cdots}{N_1 + N_2 + \cdots}$$

Y ahora, multiplicando numerador y denominador por m_0, el resultado no se altera, y se tiene:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{N_1 m_0 \vec{r}_{CM1} + N_2 m_0 \vec{r}_{CM2} + \cdots}{N_1 m_0 + N_2 m_0 + \cdots}$$

Pero cada producto N m_0 es la masa de la parte correspondiente: N_1 m_0 = m_1, N_2 m_0 = m_2, etc., de manera que finalmente tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_{CM1} + m_2 \vec{r}_{CM2} + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \qquad \text{(A3.2)}$$

Y esta es la expresión más general: para un cuerpo compuesto de partes de masa mi , cada una con el CM indicado por el vector $\vec{r}_i$, la ubicación del centro de masa está dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \\ \vec{r}_{CM} &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_{total}} \end{aligned}} \qquad \text{(A3.3)}$$

Ejercicio: como caso particular de esta expresión, obtener (A3.1) si todas las partes son partículas de igual masa (m_i = m_0).

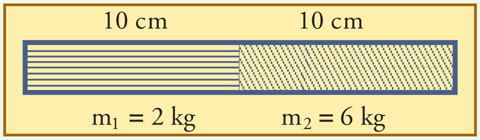
Como detalle práctico conviene recordar que todas estas expresiones vectoriales deben calcularse independientemente para cada coordenada. Así en dos dimensiones, las componentes del vector $\vec{r}_{CM}$ son las coordenadas del centro de masa, dadas por:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad \text{(A3.3')}$$

Si el cuerpo tiene un eje de simetría, entonces se puede simplificar el tratamiento ubicando un eje (x, por ejemplo) coincidiendo con el eje de simetría: el CM estará también sobre este eje, y sólo habrá que calcular la componente x_{CM}.

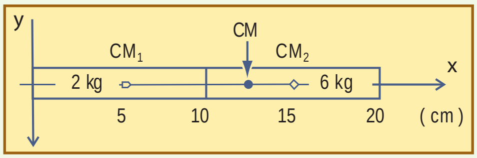
• Ejemplo

Hallar el centro de gravedad del siguiente cuerpo compuesto de dos partes homogéneas de distinto material:



• Desarrollo

Este ejemplo se presta especialmente para elegir un eje x a lo largo del eje longitudinal del cuerpo, con el origen en el extremo izquierdo. Así tendremos dos elementos homogéneos, con centros respectivamente en x_1 = 5 cm, y x_2 = 15 cm, ambos en y = 0. Con esta elección de ejes resulta:



$$x_{CG} = \frac{2\,kg \times 5\,cm + 6\,kg \times 15\,cm}{8\,kg}$$

$$x_{CG} = \frac{(10+90)\,kg \cdot cm}{8\,kg}$$

$$x_{CG} = 12{,}5\,cm$$

Por otra parte, la ubicación de CG respecto del eje vertical es trivial: y_{CG} = 0 cm.

Apéndice 4

Movimiento oscilatorio armónico

En el tratamiento del movimiento circular hemos recurrido a una manipulación esencialmente geométrica de los vectores: hemos mostrado el vector velocidad tangente a la circunferencia en cada lugar, y el vector fuerza apuntando hacia un costado perpendicularmente para lograr que el móvil se desvíe continuamente de la línea recta. Para averiguar el módulo de este vector fuerza hemos aplicado la Ley del Impulso, recurriendo para ello al dibujo de un triángulo formado por los vectores correspondientes.
Ahora bien, las operaciones vectoriales que indica la Ley del Impulso, también pueden hacerse analíticamente, con cada componente por separado, o sea, proyectando todos los vectores sobre el eje x, y también, independientemente, sobre el y.

En ese caso se obtienen expresiones para cada eje, que son válidas independientemente de lo que suceda en el otro eje. Así, un movimiento circular uniforme proyectado sobre un eje es un movimiento oscilatorio, y podría no haber razones a priori para que estas oscilaciones estén emparentadas con las oscilaciones elásticas, pero veremos que sí lo están, y su descripción nos será de gran ayuda.

• Descripción cartesiana del movimiento circular uniforme

Proyectaremos un movimiento circular uniforme sobre ejes cartesianos (x,y) con origen en el centro de la circunferencia *(ver figura A4.1)*.
Analicemos en detalle para el eje x. A partir de los triángulos destacados en esta figura podríamos obtener:

$$\frac{F_x}{F} = -\cos(\omega t) \qquad \frac{v_x}{v} = -\mathrm{sen}(\omega t) \qquad \frac{x}{R} = \cos(\omega t) \qquad \text{(A4.1)}$$

De la última expresión, podemos obtener la expresión para x(t):

$$x(t) = R\cos(\omega\, t) \qquad \text{(A4.2)}$$

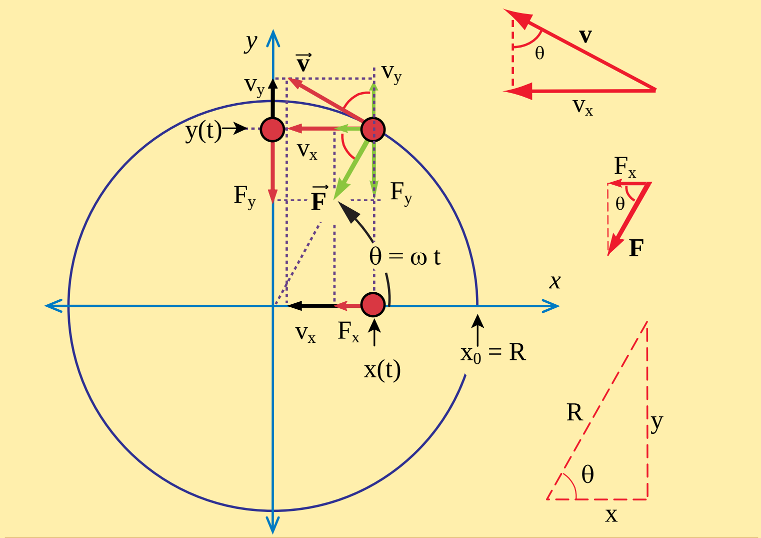


Fig. A4.1: proyección de un movimiento circular uniforme sobre los ejes cartesianos. Se muestran los vectores $\vec{F}$ y $\vec{v}$ en una posición cualquiera sobre la trayectoria, con sus respectivas componentes. Las mismas componentes se muestran también sobre cada eje, asociadas con movimientos oscilatorios que serían proyección del movimiento circular. Separadamente se muestran los triángulos necesarios para los detalles de la proyección sobre el eje *x*.

Ahora bien, si efectuamos el cociente entre las expresiones correspondientes, encontramos que aunque F_x y x, dependen del tiempo, su cociente no lo hace:

$$\frac{F_x}{x} = \frac{-F\cos(\omega t)}{R\cos(\omega t)}$$

$$\frac{F_x}{x} = -\frac{F}{R}$$

$$\frac{F_x}{x} = \text{constante negativa}$$

$$\frac{F_x}{x} = -k$$

Vemos que el movimiento proyectado sobre el eje x se realiza bajo la acción de una fuerza hacia el origen, de valor directamente proporcional a la distancia al mismo, que es precisamente la ley de fuerza que da lugar a las oscilaciones elásticas.

Esto nos permite utilizar los elementos del movimiento circular para obtener propiedades de las oscilaciones elásticas, sin recurrir a elementos de matemática más complejos.
Ahora decimos que esta constante de proporcionalidad es la constante k del resorte sujeto al extremo del cual este cuerpo podría oscilar con la misma frecuencia de este movimiento circular:

$$k = \frac{F}{R} \qquad \text{(A4.3)}$$

$$k = \frac{m\omega^2 \cancel{R}}{\cancel{R}}$$

$$k = m\omega^2$$

De donde, razonando al revés, decimos:
Si tenemos un cuerpo de masa m oscilando a lo largo del eje x en el extremo de un resorte de constante elástica k, al estar sometido a una fuerza $F_x = -k\,x$, deberá realizar las mismas oscilaciones que corresponden a proyectar sobre el eje x un movimiento circular uniforme de radio R igual a la amplitud de la oscilación, y velocidad angular dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(A4.4)}$$

Obviamente, este movimiento circular es imaginario, no existe más que como una ayuda para visualizar su proyección coincidiendo con las oscilaciones que tratamos de explicar, en el extremo del resorte.
De manera que la expresión de x(t) para la oscilación elástica, efectivamente debe ser la función armónica (A4.2). El período de la oscilación, lógicamente, debe coincidir con el tiempo demorado por el movimiento circular en completar una vuelta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(A4.5)}$$

Es importante notar que la frecuencia (o el período) sólo dependen de k y de m: el período aumenta con m, que representa la inercia, y disminuye si aumenta k, que representa la dureza, o rigidez, del resorte. Si a un cuerpo que oscila sujeto a un resorte determinado, se le cambia la amplitud o la velocidad inicial, no cambiará el período.

Además, este movimiento circular imaginario también sirve para obtener $v_x(t)$ como proyección de la velocidad tangencial sobre la circunferencia. Esto permite obtener fácilmente relaciones como:

$$v_{máx} = \omega\, x_{máx} \qquad \text{(A4.6)}$$

que se justifica fácilmente si se tiene en cuenta que la velocidad con la que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en la oscilación rectilínea, $v_{máx}$, es simplemente la velocidad lineal del móvil en el movimiento circular, ya que se proyecta en su verdadera magnitud en los instantes que corresponden. En la figura A4.1, esos son los instantes en que el móvil cruza el eje vertical.

Nota. Las funciones seno y coseno.

Por último vale aclarar que si proyectamos el MCU sobre el eje y, también encontraremos un movimiento rectilíneo oscilatorio de exactamente las mismas características (para él también se cumplirán (A4.3,4,5, y 6)).

En cambio no se cumpliría (A4.2), ya que en el triángulo en el que x es el cateto adyacente al ángulo θ, y es el cateto opuesto, y cumple con y/R = sen(θ), de manera que:

$$y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega\, t) \qquad \text{(A4.7)}$$

Vemos que si la oscilación sobre un eje queda descripta por la función cos(ω t), la oscilación sobre el otro queda descripta por sen(ω t). Es decir, ambas oscilaciones tienen las mismas características físicas, ambas están descriptas por funciones armónicas, y sólo difieren en los instantes en los que pasan por los distintos lugares de su trayectoria: el movimiento proyectado sobre y pasa por su máxima elongación cuando el proyectado sobre x pasa por el origen, y viceversa.

Como conclusión general podemos decir que la elongación en una oscilación elástica en función del tiempo, no importa cómo se llame, x(t), y(t), o de otra forma, siempre estará dada por una función armónica, que indistintamente puede ser cte×sen(ω t), o cte×cos(ω t) - y también podría ser una combinación de ambas, si hubiésemos proyectado sobre cualquier diámetro oblicuo, pero no entraremos en tanto detalle aquí.

Por último revisemos las características de las funciones sen(θ), y cos(θ).

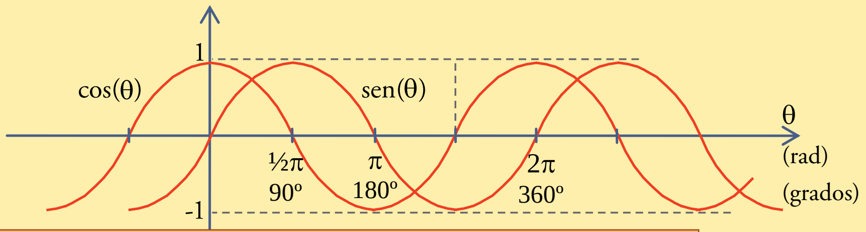


Fig. A4.2. Representación gráfica de las funciones armónicas: sen(θ), y cos(θ).

Según se muestra en la figura A4.2, ambas son similares, oscilan entre -1 y 1, con la única diferencia de que la gráfica del seno es la del coseno corrida ¼ de período (90º) hacia la derecha: la del coseno pasa por el máximo positivo en θ = 0, mientras que la del seno pasa por cero en θ = 0, y pasa por su máximo positivo en θ = 90º.

Ejemplo

Un cuerpo de masa 5 kg está sujeto al extremo de un resorte de constante k=500 N/m, sobre una superficie horizontal sin rozamiento, etc. El cuerpo es desplazado de manera de estirar el resorte 4 cm, y en t=0 se lo suelta.

Calcular el período, y la frecuencia de las oscilaciones que tienen lugar, escribir la función x(t) y dibujarla. Calcular también la velocidad máxima.

- **Desarrollo**

$$\omega = \sqrt{\frac{500N/m}{5kg}}$$

$$\omega = \sqrt{100\frac{\frac{kg.m}{s^2}\Big/m}{kg}}$$

$$\omega = 10\frac{1}{s} \rightarrow \ f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{10\ ^1\!/\!_s}{2\pi}$$

$$f = 1{,}59\frac{1}{s}$$

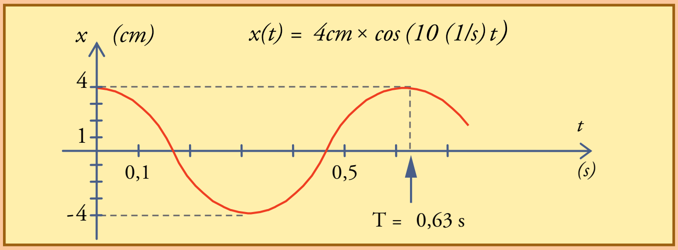
$$f = 1{,}59\ Hz$$

T = 1/f
T = 1/1,59
T = 0,63s

En cuanto a la función x(t) , en una situación simplificada como es ésta sólo debemos elegir entre la función seno y la función coseno. Para ello lo más fácil es mirar la condición inicial: ésta debe ser una oscilación que comienza desde una máxima elongación positiva (x_0=4cm), en t=0.

Y analizando cada función vemos que:

- La función seno comienza en cero (sen(0) = 0), y va aumentando durante el primer cuarto de período. Por lo tanto es claro que no puede corresponder a nuestro caso.
- La función coseno comienza en uno (cos(0) = 1), y va disminuyendo durante el primer cuarto de período. Es decir comienza en el máximo valor positivo, y ése es precisamiente el caso.



Por lo tanto corresponde elegir coseno.

Y por último, si se desea conocer la velocidad máxima, que es la que siempre tendrá el móvil al pasar por la posición de equilibrio, se puede aplicar (A4.6):

$v_{máx} = \omega\ x_{máx} = 10$ [1/s] × 4/cm = 40 /cm/s.

• Aplicación: cálculo del período de un péndulo ideal

Consideremos una oscilación de muy pequeña amplitud. El movimiento limitado a un arco tan pequeño no se distinguirá esencialmente de un movimiento rectilíneo. Si ubicamos un eje cartesiano horizontal fijo, x, con origen en la parte más baja de la trayectoria, las componentes tangenciales de todos los vectores involucrados coincidirán con las correspondientes componentes x.

Elegimos x positivo hacia la derecha. La fuerza tangencial, que ahora es F_x, vale P senθ = m g senθ , y se

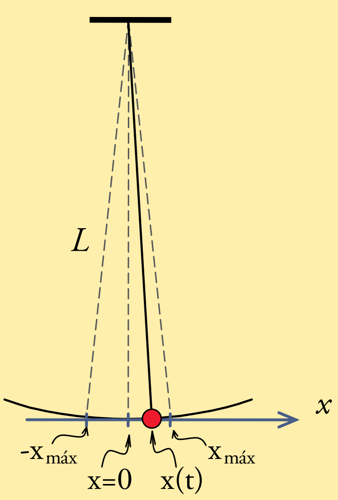


Fig. A4.3. Oscilación de un péndulo en condición de "pequeña amplitud". A los fines del análisis tangencial, puede considerarse que el movimiento ocurre en el eje x.

orienta hacia x = 0; si escribimos senθ = x/L, entonces obtenemos que la fuerza obedece a la misma ley que en el caso del resorte:

$$F_x \cong -mg\,\frac{x}{L} = -\underbrace{\left(\frac{mg}{L}\right)}_{cte=k} x(t) \qquad \text{(A4.8)}$$

Vemos que en esta aproximación la masa oscila a lo largo del eje x exactamente como si hubiese un resorte de constante elástica k = mg/L.

A través de esta conclusión, podemos trasladar cualquiera de las relaciones referidas al resorte, simplemente haciendo corresponder los elementos de los dos movimientos. Por ejemplo, si reemplazamos k = mg/L en la expresión (A4.5) para el período de las oscilaciones elásticas obtenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\frac{\cancel{m}g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(A4.9)}$$

Esta expresión es la que se conoce como 3era ley del péndulo, e indica que el período de estas oscilaciones es independiente de la masa, tal cual debía ser, según hemos dicho al estudiar el péndulo.

Debemos decir dos cosas importantes de esta expresión:

• Si bien la expresión es válida estrictamente para oscilaciones de pequeña amplitud, en la práctica sirve muy bien para oscilaciones de cualquier amplitud. Las diferencias sólo pueden registrarse midiendo con muy buena precisión.

• Esta expresión nos provee de un método cómodo y preciso para determinar el valor de la intensidad del campo gravitatorio. La medición del período se puede hacer con gran precisión simplemente dejando transcurrir muchos períodos (sólo hay que contar bien). La longitud debe medirse con cuidado.

Apéndice 5

El trabajo de las fuerzas interiores

El teorema del trabajo y la energía cinética relaciona el trabajo de la fuerza resultante con la energía cinética de un cuerpo que se puede asimilar a una partícula puntual. Así tenemos un caso muy simple, que sirve para guiar muchos razonamientos, pero que en su simplicidad puede generar algunas ideas engañosas.

Para superarlas es necesario revisar algunos detalles de casos más generales.

Pensemos entonces en un sistema formado por varias partes rígidas, sobre las cuales actúan tanto fuerzas exteriores como interiores (algunas partes pueden estar unidas o vinculadas entre sí de diferentes maneras, algunas uniones pueden ser elásticas, y también puede haber rozamientos).

Tenemos $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{int} + \sum \vec{F}_{ext}$, y por lo que ya hemos dicho al estudiar las leyes de la dinámica sobre que $\sum \vec{F}_{int} = 0$, resulta que $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_{ext}$, y en el movimiento del centro de masa (CM) sólo intervienen las fuerzas exteriores:

$$m_{total} \Delta \vec{v}_{CM} = \vec{F}_R \Delta t = \sum \vec{F}_{ext} \Delta t$$

A partir de este resultado, un análisis superficial puede sugerir, erróneamente, que las fuerzas interiores tampoco deberían modificar la energía cinética de cualquier sistema, cuando en realidad lo único que no pueden modificar es el movimiento del centro de masa.

Efectivamente, si tratamos de calcular el trabajo realizado por todas las fuerzas, encontramos una diferencia muy grande con el procedimiento para calcular el impulso: *no es lo mismo el trabajo de la fuerza resultante, que la suma de todos los trabajos de todas las fuerzas!*

Para ver esto supongamos cada fuerza aplicada en un lugar particular, y calculemos el trabajo total en un cierto movimiento:

$$W_{total} = \Sigma F_{ext,i}\, d_i \cos\alpha_i + \Sigma F_{int,j}\, d_j \cos\alpha_j$$

Donde d_i o dj son las distancias recorridas por cada uno de los puntos sobre los que está aplicada cada fuerza, y α_i , α_j, los correspondientes ángulos (entre cada fuerza y el desplazamiento del punto sobre el que actúa).

En un caso general, los desplazamientos son todos distintos. Son necesariamente iguales solamente en dos casos: en el de una partícula puntual, o en el del movimiento de traslación pura de un cuerpo rígido.

En estos casos, efectivamente todos los d son iguales y salen factor común de la sumatoria, quedando el resultado más simple:

$$W_{total} = (\Sigma Fext,i \cos\alpha_i + \Sigma Fint,j \cos\alpha_j)\ d = F_{R(tangencial)}\ d$$

Según este resultado, la suma de los trabajos de todas las fuerzas es igual al trabajo de la fuerza resultante, y además es igual al trabajo de las fuerzas exteriores actuantes sobre el sistema. Todo esto suena tan bien, que es muy fácil equivocarse y creer que tiene validez general, pero sólo la tiene para estos dos casos citados, y para *casi ninguna otra situación*.

En general, la suma de todos los trabajos de las fuerzas aplicadas no es igual al trabajo de la fuerza resultante: los trabajos de todas las fuerzas aplicadas se pueden calcular cuando se conocen todos los movimientos de las partes donde están aplicadas, mientras el trabajo de la fuerza resultante **ni siquiera puede ser calculado** porque *la fuerza resultante es una abstracción* que no está aplicada realmente en algún lugar definido.

Lo que se hace es definir (arbitrariamente y porque permite obtener un resultado interesante) el trabajo de la fuerza resultante considerada aplicada en el CM. A ese trabajo lo denominamos W_{FR}, y no es igual al trabajo de las fuerzas exteriores (ya que $\vec{F}_R$ es la resultante de ellas, pero ellas están aplicadas en otros puntos), ni es igual al trabajo de todas las fuerzas (ya que las fuerzas interiores son totalmente independientes de $\vec{F}_R$).

Definiendo de esta manera el trabajo de la resultante, *atribuyéndole el desplazamiento del CM*, recuperamos el resultado (6.4) de la partícula puntual: $W_{FR} = \Delta Ec_T$ (6.4')

Donde $Ec_T = ½\ m_{total}\ v_{CM}^2$, es la energía cinética de traslación. Nótese que para la partícula puntual, que consta de un único punto (el cual a la vez es su CM), no tiene sentido la rotación sobre sí misma, por lo que toda la energía cinética es de traslación.

Por otra parte, en el próximo capítulo mostraremos que, para un cuerpo rígido la energía cinética total puede escribirse como la suma de la de traslación más la de rotación, y teniendo eso en cuenta, las expresiones simples más útiles en general, además de (6.4') son:

$W_{total} = \Delta Ec_{total}$

$W_{NC} = \Delta Em$

Donde:

W_{total} es el trabajo de todas las fuerzas exteriores e interiores.

W_{NC} es el trabajo de todas las fuerzas no conservativas exteriores e interiores

Ec_{total} es la suma de todas las energías cinéticas de traslación y de rotación de todas las partes del sistema.

E_m es la energía mecánica total: cinética de traslación más rotación, más potencial, de todas las partes del sistema.

Apéndice 6

Principio de conservación de la energía

Desde el siglo XVIII comenzaron a inventarse y fabricarse las *máquinas de vapor*, que a par-tir de la combustión del carbón hacían trabajo en grandes cantidades, respondiendo a necesidades sociales y de mercado. De la mano de esas máquinas llegó la llamada "Revolución Industrial", y paralelamente se fue desarrollando el concepto de ***energía***, que no puede atribuir-se a una persona, sino a muchos científicos y pensadores que trabajaron de manera más o me-nos independiente a lo largo de los siglos **XVIII** y **XIX**. Casi todos ellos estaban estimulados por los logros prácticos de ingenieros e inventores.

Hay justas razones para atribuir a James Prescott JOULE (físico inglés, 1818-1889), y a Julius Robert von MAYER (médico alemán, 1814-1878), independientemente, el mérito del "descubrimiento" de la **conservación de la energía**. Ambos, por muy diferentes caminos, enunciaron en 1842, de distinta manera, las bases de este principio fundamental. El trabajo de JOULE, rigurosamente ajustado a los procedimientos científicos tradicionales, sirvió inmediatamente de base para los desarrollos posteriores, mientras que el trabajo del desafortunado MAYER, tal vez más especulativo y audaz, pero menos ajustado a la tradición de la Física, fue desacreditado, y recién después de su muerte, reconocido en todo su valor.

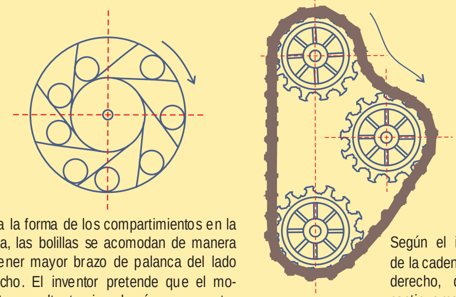
A pesar de las controversias que aún hoy existen acerca del justo valor de cada una de estas contribuciones, así como de otras muchas que no podríamos mencionar aquí, es posible decir, casi sin dudas, que el primer trabajo científico suficientemente difundido en el que se establece completamente el concepto de energía tal cual ahora se lo trata en la llamada física "clásica", es el trabajo publicado en 1847 por Hermann Luis Friedrick von HELMHOLTZ (médico y físico alemán investigador de procesos fisiológicos, 1821-1894), con el título "Über die Erhaltung der Kraft", título que ahora traducimos como "Sobre la Conservación de la Energía".

Es importante decir que este título significa textualmente "Sobre la conservación del Kraft". El vocablo alemán kraft es más adecuado para designar fuerza que energía. HELMHOLTZ investigaba en sus trabajos fisiológicos las "fuerzas vitales", concepto muy amplio y algo vago, que a partir de la publicación de su trabajo permitió definir con precisión esa nueva (o vieja) cosa llamada energía. Así resultó un concepto nuevo, definitivamente distinto del concepto físico de fuerza. De este nuevo concepto tratan estas páginas.

A6.1.- Algunas ideas fundamentales acerca de la energía

La historia está llena de fallidos intentos e ilusiones de lograr máquinas que trabajen sin con-sumir nada, llamadas máquinas de *"movimiento perpetuo"*. Y tantos han sido los inventores, y tan ingeniosos pero siempre fracasados los inventos, que ya en 1775 la Real Academia de Ciencias de París perdió la paciencia y emitió una resolución diciendo que no examinaría más trabajos relacionados con máquinas de movimiento perpetuo. A pesar de esto los intentos han seguido hasta nuestros días, y es seguro que en algún lugar, *en este mismo momento*, hay personas tratando de desarrollar alguna ingeniosa y quimérica máquina de éstas.

Estas máquinas suelen ser de todo tipo, y en general es difícil descubrir la razón específica por la que no funcionan. El inventor nunca se convence de que su máquina no funcionará, y pasa su vida perfeccionándola y creyendo que luego de la próxima modificación va a tener éxito. Pero lo que capacita a cualquier científico actual para descartar una máquina de éstas, por ingeniosa que sea, es la teoría de la energía.



Dada la forma de los compartimientos en la rueda, las bolillas se acomodan de manera de tener mayor brazo de palanca del lado derecho. El inventor pretende que el momento resultante impulsará permanentemente a la rueda a girar en sentido horario.

Según el inventor, el peso de la cadena, mayor del lado derecho, debería impulsar continuamente la rotación en el sentido indicado.

Fig. A6.1. Dos entre los infinitos modelos de máquinas de movimiento perpetuo, inventados para impulsar continuamente aparatos sin consumir ningún tipo de combustible.

¿Qué es la energía? En mecánica hemos podido definir con facilidad qué es el trabajo, y a partir de eso hemos podido definir la energía como algo que representaba en ciertas circuns-tancias la capacidad para hacer trabajo, a través de expresiones de la forma $W_{\text{hecho por el sistema}} = -\Delta E$.

Sin embargo, la mecánica no permite enunciar que la energía mecánica deba conservarse en los casos reales, ni permite enunciar en general si pueden o no existir los "móviles perpetuos". La mecánica tropieza básicamente con el problema de que las fuerzas de fricción eliminan energía mecánica y producen elevación de temperatura, lo que sugiere que, de existir una teoría completa de la energía, ella debe incluir los fenómenos térmicos y, por lo tanto, no es posible dentro de la mecánica.

Eso es efectivamente lo que ocurrió. Para que se desarrollara la teoría de la energía fue necesario que aparecieran primero los aparatos capaces del proceso inverso, es decir, obtener trabajo a partir del calor, que fueron las llamadas *máquinas térmicas*. Las primeras máquinas térmicas fueron las máquinas de vapor, y tratando de explicarlas y mejorarlas se desarrolló la Termodinámica, que reúne los aportes de la ciencia de lo térmico, con la de la dinámica. En este espacio nació la teoría de la energía, es decir: **el principio de conservación de la energía**.

Pero no fue sencillo. La teoría de la energía destruye la posibilidad de existencia del móvil perpetuo, pero la imposibilidad de la existencia de éstos no construye la teoría de la energía: debieron transcurrir alrededor de 70 años desde la mencionada resolución de la Academia, antes de que se pudiera enunciar el principio de conservación de la energía.

Sin pretender dar una definición estricta, y teniendo en cuenta que una parte de la energía puede transformarse en calor, vamos a partir de la idea básica de que la energía es *una propiedad de los sistemas* que se puede concebir como la *cantidad de trabajo o de calor* que el sistema puede generar a expensas de ella.

Así es que la energía no existe como una misteriosa entidad sola y separada de la materia, sino que siempre es la energía de algún sistema que se puede reconocer independientemente. En el mundo moderno reconocemos más o menos fácilmente que:

- Una cierta masa de combustible líquido que cargamos en el tanque de un automóvil (junto con el aire que se requerirá para su combustión), tiene una gran cantidad de energía que se requiere para que el motor trabaje.
- Una bolsa llena de carbón o leña (junto con el aire que se requiere para su combustión), contiene una gran cantidad de energía que se empleará en producir calor –ya sea para un asado, o ya sea para calentar otra cosa–.
- Una pila eléctrica nueva, está "cargada" de cierta cantidad de energía que se requiere para accionar diversos juguetes o mecanismos, y que puede seguir entregando mientras sus elementos estén en condiciones de sustentar la correspondiente reacción química en su interior.
- La batería o acumulador eléctrico de un automotor contiene normalmente una cierta cantidad de energía que podrá utilizarse para hacer arrancar el motor, encender las luces,etc.
- El agua en un embalse, en función de su altura, contiene energía "potencial gravitatoria" que puede entregar a turbinas acopladas a generadores de electricidad, al accionarlas luego de descender por conductos adecuados. Esta energía es distribuida por la red de distribución de energía eléctrica para los más diversos usos.

- Una gran masa de aire en movimiento puede contener una gran cantidad de energía (cinética) que podría emplearse en el accionamiento de los antiguos molinos de viento, o de los actuales molinetes acoplados a bombeadores de agua o a generadores de electricidad, así como también puede manifestarse en la destrucción de galpones, árboles, y edificaciones diversas durante temibles fenómenos meteorológicos.

La conservación de la energía, implica que no puede ser creada ni destruida. Cada sistema sólo puede hacer una cantidad limitada de trabajo o dar una cantidad limitada de calor, hasta agotar su disponibilidad de energía. Por otra parte, esa energía que el sistema pierde no desaparece del universo, sino que ha sido transferida a otros sistemas en estos procesos, y en ellos seguirá existiendo íntegramente.

Pero revisemos cómo fueron generándose las ideas.

A6.2.- La revolución industrial y las máquinas de trabajar

Los primeros pasos de la revolución industrial fueron dados cuando el ingeniero inglés Thomas SAVERY ideó una máquina capaz de extraer el agua que diariamente brotaba de las pare-des de las minas de carbón y se acumulaba en las galerías, anegándolas. SAVERY obtuvo en 1698 una patente para la que él llamó *"máquina de fuego"*. Ésta era una máquina sin partes móviles, que aprovechaba el cambio de volumen en la condensación del vapor de agua, con un sistema de válvulas y cañerías, para succionar el agua de las minas y descargarla afuera.

Desde hacía mucho tiempo había molinos que utilizaban la fuerza del viento, o la de las caídas de agua, es decir, máquinas que aprovechaban algún fenómeno natural, que ya contenía algo en movimiento, para producir otros movimientos. Pero esto era algo nuevo: por primera vez las máquinas hacían trabajo mecánico a partir del calor obtenido del fuego.

Las primeras máquinas eran tremendamente imperfectas, y aún así resultaban económicamente convenientes. Muchas personas ingeniosas se dedicaron a perfeccionarlas, y les fueron incorporando partes móviles.

Uno de los grandes fabricantes fue NEWCOMEN. En 1739 se construyó en su fábrica, una máquina para bombear agua de una mina de carbón en Francia, desde una profundidad de 27 metros, que realizó en 48 horas la tarea que previamente había reque-rido una semana con el trabajo de 50 hombres y 20 caballos operando en turnos de 24 horas al día.

El ingeniero escocés James WATT (1736-1819), comenzó con máquinas de aspecto similar a las de NEWCOMEN, y desarrolló inventos tan decisivos para su aplicación a la industria, que muchas de sus máquinas se vendían con un contrato que exigía el pago periódico de una suma equivalente a un tercio de lo que ahorraban por sustituir una máquina de NEWCOMEN .

Mientras los inventores y los inventos se multiplicaban, la ciencia buscaba explicaciones. Se sabía que el trabajo nunca se hace solo ni gratis. Los nuevos hechos simplemente confirmaban esa experiencia y permitían ver que, en general para poder hacer trabajo se necesitan principalmente dos cosas:

1) Tener algo que pueda hacer el trabajo, por ejemplo, los caballos y todo el sistema de bombeo que pueden accionar, las nuevas máquinas de bombeo recién inventadas, la rueda de paletas ubicada en un lugar con caída de agua, o el aparato que sea (algún tipo de *motor*, en el mundo moderno).
2) Suministrar algo que se va consumiendo proporcionalmente a la cantidad de trabajo que se va realizando. Por ejemplo, forraje y agua (y aire) para los caballos, carbón (y aire) para las máquinas de fuego, un cierto caudal de agua para la rueda de paletas, etc. Eso que se suministra, a medida que es utilizado, se transforma de manera de perder las propiedades que eran esenciales para el proceso. Por ejemplo, el alimento de los caballos se digiere y se transforma en residuos y excrementos que ya no pueden alimentarlos, el oxígeno utilizado en la respiración de los caballos o en la combustión del carbón se combina para formar productos que ya no pueden sustentar la combustión o la respiración, lo mismo le sucede al carbón, y por último, el agua de la rueda de paletas, una vez que ha pasado por ella impulsando su movimiento, se encuentra en la parte baja del río, habiendo perdido la *altura*, que era lo que la capacitaba para mover la rueda.

El perfeccionamiento de las máquinas mostró que cada vez se podía hacer más trabajo con la misma cantidad de carbón, y se planteó una pregunta fundamental:

¿Cuánto trabajo puede producirse a partir de una cierta cantidad de carbón?

No fue fácil responder a estas preguntas, porque existía la complicación adicional de que tam-bién había gran controversia acerca de la *naturaleza del calor*.

Otras importantes preguntas de la época eran: ***¿Qué es el calor?*** *¿Por qué tiene esa capacidad de hacer que las máquinas generen trabajo?*

Se trabajó mucho para aprender acerca de la "fuerza motriz del fuego", y gradualmente se fue acuñando el concepto de energía. Aquí no podremos seguir todo el derrotero que siguió la génesis de este concepto, pero sí revisaremos algunas ideas básicas sobre el calor.

A6.3.- Ideas acerca del calor

Un poco de calórico.

Una de las cuestiones que hubo que resolver para lograr el desarrollo de la teoría de la energía fue que la naturaleza del calor, uno de los actores principales del proceso, era motivo de gran controversia.

La idea predominante en la época era que había un fluido llamado *"calórico"* cuya presencia daba a los cuerpos la calidad de *calientes*. Este fluido era pensado como *material* —concepto asociado fundamentalmente con la idea de algo que no se podía crear ni destruir— y podía penetrar dentro de los cuerpos materiales que al impregnarse de él se calentaban, y al perderlo se enfriaban.

Según estas ideas la cantidad Q de calórico que se suministra a un cuerpo se traduce en una variación ΔT de su temperatura, está dada por:

$$Q = Ce \times m \times \Delta T \qquad \text{(A6.1)}$$

Donde m es la masa del cuerpo, y Ce una constante que depende de la sustancia, denominada calor específico.

Nota 1. El calórico

Podríamos preguntarnos por qué desenterrar ahora un concepto ya perimido como el del calórico. La respuesta es que el calórico era una idea teórica que funcionaba muy bien, y permitió grandes logros. La teoría actual de las máquinas térmicas fue desarrollada por Sadi CARNOT (1796-1832) utilizando el calórico. Para modernizarla, basta con sustituir el término "calórico", por el término moderno "entropía". Haremos una aproximación más simple sustituyendo "calórico" por "calor", sin pensar que es un fluido material, sino una especie de "pseudofluido", cuya cantidad se conserva en los fenómenos como la conducción térmica.

Nota 2. El termómetro y la temperatura.

La temperatura es una variable intensiva que caracteriza el estado del cuerpo desde el punto de vista térmico. Es esencial distinguir el calor, variable extensiva, proporcional a la cantidad de masa que se calienta, de la temperatura, que es independiente de la cantidad de materia, por eso calificada como intensiva. Por ejemplo: la temperatura de 1 cm^3 *y de 1 litro de agua hirviendo es la misma.*

Resulta que algunas propiedades de algunos sistemas, como el estado de dilatación, o el valor de la resistencia eléctrica, o el color (en el caso de cuerpos incandescentes) permiten construir indicadores del valor de la temperatura, llamados termómetros. Para cada caso habrá un tipo de termómetro que indicará el valor de la temperatura, y este valor estará referido a alguna escala (la más usual entre nosotros es la "Celsius", también llamada "centígrada"). Este valor es uno de los "parámetros indicadores del estado del sistema". En los sistemas más simples, en los fenómenos puramente térmicos, éste podrá ser el único parámetro interesante o relevante para describir su estado.

Unidades

La expresión (A6.1) permite definir unidades para el calor (o calórico), eligiendo cualquier sustancia particular, que en general siempre fue el agua.

Una *caloría* es la cantidad de calor que se debe suministrar a un gramo de agua pura en estado líquido, a presión normal (1 atm), que está a 14,5ºC de temperatura, para que aumente su temperatura hasta 15,5ºC. Se puede verificar experimentalmente que de manera aproximada, en un rango de temperatu-ras más o menos amplio, y mientras se tomen precauciones para que el agua no se evapore, una caloría que se suministre a un gramo de agua eleva su temperatura en aproximadamente 1ºC, independientemente de que ello ocurra cerca o lejos del valor 15 ºC. Dentro de este or-den de aproximación, la cantidad de calor necesaria para calentar una masa m de agua es pro-porcional a la variación ΔT de su temperatura, y resulta la siguiente expresión general:

$$Q = 1\ (\mathrm{cal/g.^{o}C}) \times m \times \Delta T \qquad \text{(A6.2)}$$

Antiguamente esta expresión definía la cantidad de calórico que se le debía suministrar al agua para aumentar su temperatura en ΔT. Actualmente define la cantidad de energía que se le debe suministrar como calor al agua para eso mismo, y a través de la idea de que la energía se conserva, como veremos enseguida, esta expresión define la cantidad de energía que almacena el agua en este proceso. Así tenemos una unidad para la energía, emergente de procesos puramente térmicos, que luego veremos cómo se relaciona con la unidad **SI**, el joule.

El calorímetro

El instrumento que mide cantidades de calor es el calorímetro. Consiste esencialmente en un recipiente con un termómetro y con una cierta masa de agua. Dentro de esa masa de agua se sumerge algún sistema o cuerpo en el que ocurre determinado proceso durante el cual el agua recibe (o entrega) cierta cantidad de calor y varía consecuentemente su temperatura. Según la variación de temperatura registrada por el termómetro, aplicando la fórmula (A6.2) se calcula la cantidad de calor recibida por el agua, que es la entregada por el sistema.

El calor y la fricción

En 1798 el conde RUMFORD (Benjamín THOMSON, 1753-1814) realizó una serie de experiencias, intrigado por lo intenso del calor que se producía al horadar los cañones de grueso calibre de la artillería del ejército de Baviera, a cargo de cuya reestructuración técnica estaba designado. Llegó a la conclusión de que la **fricción** parecía ser una **fuente inagotable de calor:** éste se seguiría produciendo mientras continuara habiendo **movimiento con fricción**.

Esto fue fundamental para comprender que no era razonable la idea del calórico como un fluido contenido en los cuerpos, que se transfería de unos a otros conservándose. Más bien, todo parecía indicar que:

El calor se puede producir ilimitadamente a partir de la fricción, mientras dure el movimiento con fricción, durará la producción de calor.

Los experimentos de RUMFORD sirvieron para mostrar que había que desechar la idea del calórico, pero no bastaron para establecer una teoría suficientemente completa que permitiera sustituirlo, de manera que el trabajo realizado contra las fuerzas de fricción se siguió considerando *trabajo aniquilado*, y la teoría del calórico continuó gozando de buena salud por bastante tiempo.

Pero lenta y trabajosamente se fue imponiendo la interpretación *mecanicista* del calor, según la cual, lo que se detecta *macroscópicamente* como aumento de temperatura, es el incremento de la intensidad de *los movimientos microscópicos caóticos* de átomos y moléculas. Esto permite interpretar los procesos con fricción diciendo que en ellos una cierta cantidad de energía mecánica de un movimiento macroscópico, pasa a incrementar la energía de las vibraciones de los movimientos microscópicos caóticos, manifestándose como una elevación de temperatura. De este modo, el trabajo contra las fuerzas de fricción no debería considerarse aniquilado, sino que algo de él, la escurridiza energía, continuaría difundiéndose con el calor.

Si además tenemos en cuenta que las máquinas de vapor son un ejemplo de sistema en que el suministro de calor capacita al sistema para hacer trabajo, podemos decir que claramente el flujo calorífico transporta energía. Este es un transporte que ocurre de forma *térmica*, que es la forma esencialmente *no mecánica*, ya que ocurre simplemente por la diferencia de temperatura entre lugares próximos, sin que medie ningún tipo de fuerza, desplazamiento, ni deformación.

Conducción térmica

Cuando dos sistemas de diferente temperatura se ponen en contacto (o se aproximan suficientemente) tiene lugar el flujo de calor, desde el sistema de mayor hacia el de menor temperatura. Este fenómeno se denomina conducción térmica, y tiene lugar entre dos puntos en los que hay diferencia de temperatura, dentro o no de un mismo sistema. El flujo de calor ocurre al calentar las partes más frías a expensas de las más calientes, tendiendo a llevar todo al equilibrio térmico, es decir a una situación de temperatura uniforme (y puede existir aún sin contacto entre los cuerpos materiales, ya que en ese caso el calor puede fluir por radiación).

Si designamos con Q a la cantidad de energía que ingresa de esta manera al sistema (o que sale, si su signo es negativo), podemos plantear:

$$\mathbf{Q = \Delta E} \qquad \text{(A6.3)}$$

Donde E sigue siendo esa propiedad del sistema denominada energía, que en estos procesos puramente térmicos, debe ser una función de la temperatura.

Las experiencias calorimétricas, con mediciones en fenómenos puramente térmicos, mostraban y muestran muy bien que esa entidad llamada calórico se conservaba: un cuerpo que había sido calentado sólo se enfriaba en la medida en que transfería su calor a otro. Se podía medir muy bien que si se suministraba Q_0 a un cuerpo, el cual cedía cantidades Q_i a varios otros cuerpos, cuando se calculaba la suma total, siempre se encontraba todo el Q_0 inicial.

De manera que la conservación del calórico viene a ser la conservación de la energía, restringido a fenómenos puramente térmicos.

Los experimentos de RUMFORD muestran que no vale la conservación del calórico cuando intervienen fenómenos mecánicos, y permiten que entendamos que es posible considerar la conservación de otro ente más general, denominado energía, que puede ingresar, almacenarse, o salir de un sistema tanto en forma térmica como mecánica, y también, según las condicio-nes, transformarse de una forma a otra.

A6.4.- La conservación de la energía

La conservación de la energía implica dos cosas: que no puede ser creada, y que no puede ser destruida. Las razones para enunciar que la energía no puede ser creada, emergen de toda la experiencia relacionada con la **necesidad** de suministrar algo que tenga energía para poder producir trabajo o calor. Si hubiera algún proceso por el cual la energía pudiera crearse, entonces este proceso podría agregarse a la máquina usuaria de esa energía, y el conjunto no requeriría ya de alimentación. Habríamos cumplido el sueño de los inventores del móvil perpetuo.

Ahora bien, la imposibilidad de construir un móvil perpetuo, la experiencia cotidiana de que todas las cosas o procesos tienden a detenerse cuando se deja de impulsarlos o de suministrarles aquello que los alimenta, *parece* sugerir que la energía, al menos en parte, finalmente desaparece.

Pero hemos visto que ello no es necesariamente así: la disipación no consiste en que la energía desaparezca en un sentido absoluto, sino en que desaparezca de las partes en las cuales se la estaba utilizando, para diluirse cada vez más en movimientos microscópicos caóticos en un ambiente infinito, en el cual finalmente se hace casi imposible detectarla.

Este discurso sirve para sugerir que tal vez sea razonable pensar que la energía se puede conservar, pero no prueba que lo haga.

Hicieron falta infinidad de trabajos que sería imposible considerar, hasta que se logró elaborar completamente el tan buscado concepto de energía, tal que su cantidad total E en un sistema sólo puede ser variada por transferencia con otros sistemas según la siguiente expresión, que particulariza el Principio de Conservación de la Energía para los procesos fundamentales de realizar trabajo y suministrar calor:

$$E_{final} - E_{inicial} = W_{(\text{realizado sobre el sistema})} + Q_{(\text{entregado al sistema})} \qquad \text{(A6.4)}$$

Este enunciado fundamental se conoce también como "Primer principio de la termodinámica".

Nota Práctica

Cuando un cuerpo empuja a otro, dado que las fuerzas que cada uno aplica al otro son mu-tuamente opuestas y de igual módulo (Principio de acción y reacción) el cuerpo que empuja hace exactamente la misma cantidad de trabajo, positiva, que el otro hace negativa, y así resulta que a través de la superficie de separación, la misma cantidad de energía que un cuerpo entrega, lo recibe el otro. El proceso de hacer trabajo transfiere energía, sin crearla ni destruirla. Toda la que abandona a uno de los cuerpos, ingresa al otro.

De la misma manera, si dos cuerpos con distinta temperatura son puestos en contacto, el flujo calorífico que se establece entre ellos, se considera positivo para el sistema que gana energía, y con signo negativo para el otro. De manera que este proceso también conserva la energía: toda la que abandona un cuerpo, ingresa al otro.

Obviamente (A6.2.4) indica que para cualquier sistema completamente aislado (aislado dinámicamente: $W = 0$, y aislado térmicamente: $Q = 0$), la energía se conserva de manera absoluta.

Equivalente mecánico del calor

Unos ingredientes fundamentales para poder desarrollar el concepto de energía y de su conservación, fueron los trabajos independientes y simultáneos de MAYER y JOULE.

Las experiencias de JOULE consistieron en determinar la elevación de temperatura que resultaba de cierta masa de agua, luego de hacer determinada cantidad de trabajo mecánico sobre ella agitándola continuamente con unas paletas. Realizando cuidadosas mediciones en gran cantidad de diversas condiciones, Joule determinó que se lograba el mismo efecto agregando calor al agua directamente por contacto con un cuerpo más caliente, que haciendo trabajo mecánico sobre ella, en la proporción de (expresado aquí en unidades **SI**.):

4,16 N·m de trabajo, por cada caloría

Independientemente MAYER calcula, sobre la base de ciertas especulaciones teóricas y de resultados experimentales que, « el calentamiento de un peso dado de agua desde 0 ºC hasta 1ºC corresponde a la caída de igual peso de agua desde 365 metros ». Eso expresado en joules, es decir en N·m, es tanto como 3.580 J por cada grado por cada kg de agua, es decir 3,58 J por caloría).

En ese momento estos resultados sirvieron de apoyo a la naciente idea de energía, y probaron que **calor y trabajo**, dos cosas muy distintas, son **equivalentes** para elevar la temperatura de los cuerpos. Traduciendo a unidades actuales los resultados de JOULE y MAYER, tendríamos que, 4,16 N·m (según JOULE), y 3,58 N·m (según MAYER), producen el mismo efecto que 1 caloría. Actualmente se acepta el valor **4,185 J : 1 cal**, y se lo denomina "equivalente mecánico del calor".

A partir de que se enuncia la idea completa de energía, el equivalente mecánico del calor no es más que la relación entre dos unidades distintas de energía: el joule y la caloría. En nuestro lenguaje actual podemos enunciar lo siguiente:"

Calor y trabajo son las dos maneras fundamentales de transferir energía, el trabajo es la forma mecánica, empujando a lo largo de una distancia, y el calor es la forma no mecánica propiamente dicha por simple contacto entre cuerpos de diferentes temperaturas.

Degradación de la energía.

A partir de la vida práctica sabemos que todo lo que se usa se estropea, envejece y llega un momento en que no sirve más, y por lo que vemos en la misma vida práctica, eso también pasa con la energía. Por ejemplo: mientras tenemos combustible en el tanque del automóvil, sabemos que podremos utilizar su energía para que el motor haga trabajo; ahora bien, después de gastar todo el combustible, aunque el Primer Principio de la Termodinámica nos asegure que la energía no ha desaparecido, que ahora está íntegramente toda distribuida con el calor en el motor y el ambiente (desparramada en varios kilómetros, posiblemente), el sentido común nos indica, muy sabiamente, que si queremos que el motor siga funcionando tendremos que cargar más combustible, porque no podríamos reunir jamás todo ese calor para utilizar su energía otra vez.

Éste es un caso en que a partir del conocimiento común se llega a una idea básicamente correcta, que también fue enunciada por la Termodinámica con el nombre de "Segundo Principio de la Termodinámica". Este principio, nos enseña que una cosa es la cantidad de energía, que se conserva siempre, y otra cosa es la posibilidad de su aprovechamiento, que inexorablemente va disminuyendo a medida que se la utiliza.

De alguna manera, este fenómeno tiene que ver con que toda situación en la que se *produce* calor es un ejemplo de aumento del grado de desorden de los movimientos a nivel atómico o molecular. En el estado inicial la energía existía tanto como en el final, pero en el estado final la energía está *menos aprovechable* porque está repartida en infinidad de movimientos microscópicos caóticos.

En Termodinámica se logra definir de manera precisa el grado de caos del movimiento molecular, y se le da el nombre de ***"entropía"*** a la variable que lo representa matemáticamente. Las leyes dicen que a medida que se produce calor, la entropía aumenta; y a medida que el calor se difunde llevando un sistema al equilibrio térmico, la entropía también aumenta. Y una vez que la entropía aumenta, nunca disminuye. Cuanto más entropía hay, menos aprovechable y más degradada, está la energía.

La termodinámica concluye que no sólo no es posible el movimiento perpetuo, sino que tampoco es posible una máquina térmica que pueda transformar en trabajo toda la energía que la alimenta.

Apéndice 7

Vectores axiales

Una rotación queda determinada en el espacio si se indica el eje y el sentido de rotación alrededor del mismo.

La ubicación del eje determina al mismo tiempo todos los planos, perpendiculares a él, en los cuales se desplazan los puntos del cuerpo en rotación, asi como los centros de todas las trayectorias circulares de éstos.

Esto significa que el problema de indicar una rotación en el espacio es equivalente al problema de indicar su eje, y uno de dos sentidos posibles asociados con él.

De manera que si, por medio de alguna convención asociamos (arbitrariamente) un sentido de circulación alrededor del eje, con un sentido a lo largo del mismo, podremos utilizar un vector para indicar variables de la rotación, de la siguiente manera:

- Con la dirección del vector indicamos exactamente la dirección del eje.
- Con una convención arbitraria decimos que cada sentido del vector indica un sentido de giro alrededor del mismo.

Hay dos convenciones posibles para asociar el sentido del vector con el sentido de la rotación que representa, y éstas serían: o la convención "dextrógira" (que significa "del giro a derechas", o "de la mano derecha"), o la convención "levógira", o "siniestrógira" (que significa "del giro a izquierdas", o "de la mano izquierda").

Los vectores utilizados para representar variables angulares se denominan vectores axiales (axial significa "perteneciente o relativo a un eje"). Utilizaremos siempre la convención dextrógira, que es la siguiente:

Si se toma el vector axial con la **mano derecha**, con el pulgar apuntando como el vector, los dedos al cerrarse, quedan indicando el sentido de circulación correspondiente alrededor del mismo.

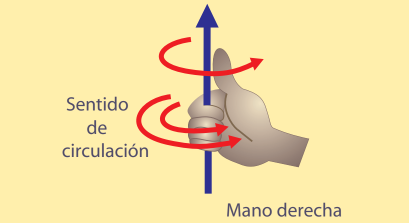


Fig. A7.1. Convención dextrógira.

Otra forma de definir esta misma convención dextrógira es decir que observando el plano de la rotación desde el lado desde el cual la rotación se ve con el sentido antihorario, se debe ver el vector correspondiente salir hacia el observador. Se ilustra en la figura A7.2.

Debe tenerse siempre presente que:

- Un vector axial no indica en absoluto algo que ocurra a lo largo del mismo, hacia uno u otro de sus extremos, sino que indica rotación alrededor del mismo, en uno u otro sentido de circulación.
- Una vez que elegimos una convención, ya sea la dextrógira, o la levógira, para representar una circulación con un vector axial, decimos que este sentido de circulación es dextrógiro o levógiro con respecto al sentido del vector axial.

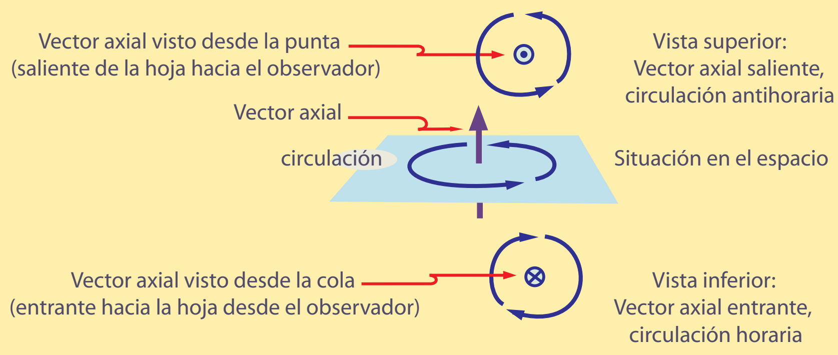


Fig. A7.2. La circulación es dextrógira respecto del sentido del vector axial, si corresponde a alguna de estas figuras. Notar que la misma rotación se puede ver como horaria o antihoraria, según desde qué extremo del eje se la observe.

Con ayuda de los vectores axiales, entonces definimos:

Los ángulos se representan con vectores axiales:

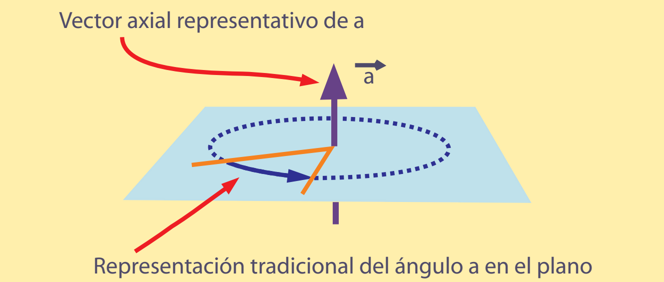


Fig. A7.3. Representación de un ángulo con un vector axial.

La velocidad angular y la cantidad de movimiento angular, se representan con vectores axiales.

La velocidad angular se define dividiendo el desplazamiento angular por el tiempo, de manera que si el desplazamiento angular se expresa con un vector: $\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1$, entonces la velocidad angular resulta el correspondiente vector axial. Si además consideramos que la cantidad de movimiento angular (en una rotación pura, y para los casos simples en que el eje es eje de simetría) se define como el producto del momento de inercia por la velocidad angular, también tendremos naturalmente un vector axial para representar la cantidad de movimiento angular $\vec{J}$

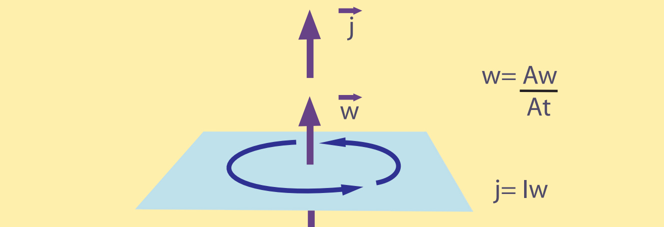


Fig. A7.4. Representación de velocidad y cantidad de movimiento angulares con vectores axiales.

El momento de las fuerzas aplicadas se representa con un vector axial

Si se considera una fuerza actuando en el plano de una rotación, podemos representar el momento con un vector axial cuyo módulo es M = F b, cuya dirección es la del eje, es decir perpendicular al plano, y con

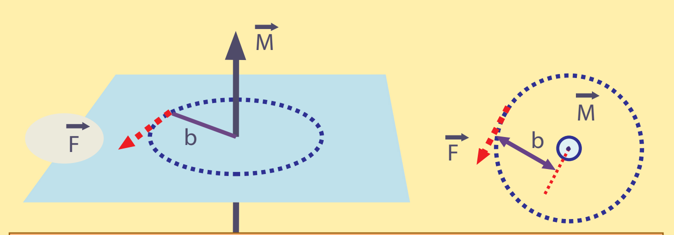


Fig. A7.5. Representación del momento de una fuerza con vectores axiales.

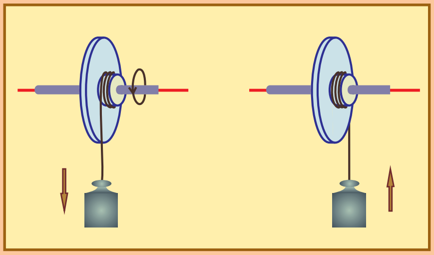
el sentido dado por la convención dextrógira:

Como aplicación de estos conceptos podemos escribir la Ley del Impulso de las rotaciones puras con ayuda de los vectores axiales correspondientes:

$$\vec{M}\ \Delta t = I\ \Delta\vec{\omega} = \Delta\vec{J}$$

• **Ejemplo**

Considerar un volante de hierro montado sobre un eje cilíndrico de hierro, con cojinetes perfectos sin rozamiento. Solidario con este disco hay un pequeño tambor en el cual se enrolla un hilo de 1 m de longitud, del que pende una pesa de masa m = 1 kg.



1) Considerar la situación ilustrada en (a), cuando el hilo lleva desenrollados 60 cm, habiendo partido la pesa desde una situación inicial en reposo, con el hilo totalmente enrollado. Dibujar los vectores axiales momento aplicado sobre el disco, velocidad angular y cantidad de movimiento angular del disco, en el instante considerado.

2) Considerar la situación ilustrada en (b), luego de que el hilo se desenrolló totalmente, y por estar sujeto al tambor, ha comenzado a enrollarse en sentido contrario debido a que el disco, por inercia, ha continuado girando. Dibujar los vectores axiales torque aplicado sobre el disco, velocidad angular y cantidad de movimiento angular del disco, en el instante considerado.

• **Desarrollo**

1) Dado que el disco parte del reposo, la velocidad y la cantidad de movimiento angulares que adquie-re, tienen el mismo sentido que el momento aplicado, y según la regla de la mano derecha, son tres vectores sobre el eje, hacia la derecha: $\rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{J} \rightarrow \vec{M}$

2) Ahora el momento aplicado cambia de sentido, tendiendo a frenar la rotación, que continúa con el mismo sentido anterior. Por lo tanto los vectores son: $\rightarrow \vec{\omega} \rightarrow \vec{J}\,\vec{M} \leftarrow$

Apéndice 8

Movimiento orbital

Hasta aquí siempre hemos utilizado las coordenadas cartesianas para ubicar la posición de puntos en el espacio, pero existen otras formas de hacer lo mismo, como por ejemplo dar su distancia al origen, y los ángulos que ubican el vector posición con respecto a direcciones elegidas de referencia. Este tipo de coordenadas suelen denominarse "polares", o "esféricas".

Nos limitaremos aquí a movimientos en el plano, porque así bastará con un solo ángulo para ubicar un punto.

Consideremos entonces una partícula de masa m moviéndose en el plano de la hoja. Perpendicularmente al plano del movimiento se elige arbitrariamente un eje, cuya intersección con la hoja es el punto O, origen de las coordenadas polares.

A medida que la partícula se mueve, la ubicamos con su distancia al origen, r, y el ángulo θ con la dirección de referencia. Aunque un movimiento sea rectilíneo, si no está alineado exac-tamente con el origen el ángulo θ irá cambiando, de manera que visto desde O, el movimiento tiene una velocidad angular $\omega = \Delta\theta / \Delta t$.

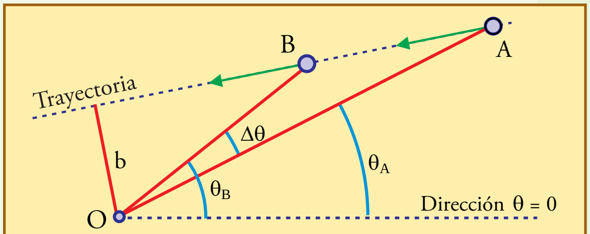


Fig. A8.1. Se ilustra cómo va variando el ángulo que forman las visuales dirigidas desde O a un punto móvil que viaja en línea recta.

Es claro que en este caso no esperamos que la velocidad angular sea constante o que tenga una expresión simple. No estamos tratando de simplificar algo, sino de mostrar una forma de tratar el tema. Un movimiento rectilíneo se complica bastante cuando es descripto en coordenadas polares, pero el movimiento de traslación de un planeta en órbita, en cambio, se analiza naturalmente de esta forma, y ello es causa de que, cuando se hable de un movimiento de traslación de una partícula descripto con respecto a un centro se utilice la denominación "movimiento orbital", aún cuando no exista órbita.

Así es que denominamos *velocidad angular orbital* a la que considera cómo cambia el ángulo con que se ubica la partícula vista desde el punto origen o eje elegido, para distinguirla de la intrínseca, que se refiere al ángulo que giran las partículas del cuerpo con respecto a su centro de masa.

Y de este modo podemos aplicar al movimiento de traslación, eligiendo un punto eje de referencia, todos los conceptos referidos a las rotaciones.

Cantidad de movimiento angular orbital

De la misma manera que para cualquier rotación, se define la cantidad de movimiento angular orbital con respecto al eje O, L_O, de una partícula de masa m y velocidad , como el momento de la cantidad de movimiento, esto es producto del módulo de la cantidad de movimiento lineal m v, por el brazo de palanca b (distancia desde la recta del vector cantidad de movimiento hasta O) Fig. A8.2.

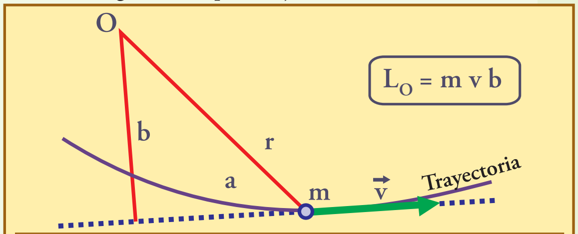


Fig. A8.2. Elementos para definir la cantidad de movimiento angular orbital.

Si aplicamos la Ley del Impulso para Rotaciones tenemos: $\boxed{M_O\, \Delta t = \Delta L_O}$

Donde M_O es el momento resultante de todas las fuerzas exteriores con respecto al centro O.

Nota 1. Velocidad Areal

Si se considera un pequeño desplazamiento AA' = v Δt, de la partícula, se encuentra que AA' es la base del triángulo AA'O, cuya altura es b, de manera que, para el área de este triángulo, tenemos

$Area = ½\ AA'\ b$

$Area = ½\ v\ b\ \Delta t$

Y comparando con la expresión de L_O, tenemos:

$L_O = 2\ m\ \dfrac{Área}{\Delta t}$

Es decir, salvo un factor constante, la cantidad de movimiento angular orbital representa la velocidad areal del movimiento, que es el área barrida en la unidad de tiempo por la línea desde la partícula al centro.

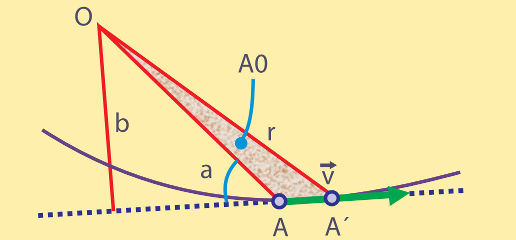


Fig. A8.3. Elementos para definir la velocidad areal.

Nota 2.

Siguen valiendo las expresiones (todos los subíndices se agregan para dejar claro que se habla con respecto al centro O):

$L_O = I_O\ \omega_O$

$I_O = m\ r^2$

$\omega_O = \Delta\theta / \Delta t$

En particular el ángulo Δθ en radianes se puede calcular proyectando el segmento AA' sobre la dirección perpendicular a $\vec{v}$, obteniéndose: $\Delta\theta = \dfrac{AA'\ sen\alpha}{r}$.

Todas estas expresiones son muy naturales y sencillas si r es constante (movimiento circular alrededor de O), pero pueden ser complicadas para aplicar a otros casos.

Fuerzas centrales y Ley de las Áreas

Cuando se da el caso de cuerpos mantenidos en órbita por la fuerza de gravedad, se tiene que la fuerza apunta exactamente hacia el astro central, de manera que su momento es nulo con respecto a dicho astro, y por lo tanto el cuerpo que está en órbita deberá mantener constante su cantidad de movimiento angular orbital con respecto al punto central.

Esta es una característica común de todas las fuerzas alineadas con el centro, ya sean atractivas o repulsivas, que por esto se denominan fuerzas centrales.

Según lo que hemos dicho, entonces, la conservación de L_O implica que se mantiene constante el producto v×b, y también implica que se mantenga constante la velocidad areal.

Este último enunciado es una de las leyes de KEPLER del movimiento planetario, conocida como la Ley de las Áreas. Esta ley había sido enunciada fenomenológicamente por Johanes KEPLER (1571-1630), y luego del desarrollo de la dinámica se entendió que representaba la conservación de la cantidad de movimiento angular, y que era una consecuencia directa de que la fuerza actuante fuese central, es decir alineada con el centro.

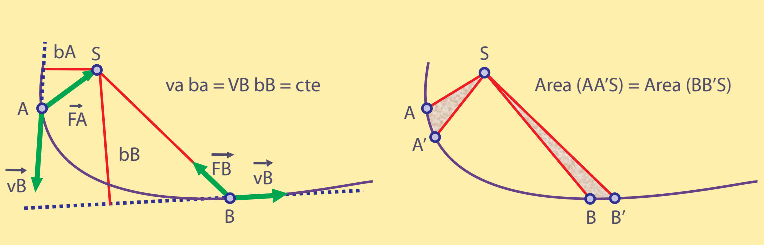


Fig. A8.4. Se ilustra de dos maneras cómo se interpreta la conservación de la cantidad de movimiento angular orbital, en un caso de fuerza central. A la izquierda se muestra, para dos lugares de la órbita, el brazo de momento de la cantidad de movimiento lineal, y a la derecha se muestra, para los mismos dos lugares, el área barrida en un mismo intervalo de tiempo.

Resoluciones, desarrollos y comentarios

RESOLUCIONES, DESARROLLOS Y COMENTARIOS

CAPÍTULO 1

▲ Ejercicio 1.1.

Las dimensiones de la densidad lineal de masa deben ser M/L (masa dividido longitud). Obviamente eso no puede sumarse con una fuerza (de dimensiones $M \times L \times T^{-2}$), de manera que podemos descartar la opción que tiene la suma F+μ. La correcta debe dar L/T, que es la dimensión de la velocidad.

Veamos cada una:

Dimensión de ($\sqrt{\mu F}$) = $\{M \times L^{-1} \times M \times L \times T^{-2}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\mu F}$) = $\{M^2 \times T^{-2}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\mu F}$) = M/T,

que no es L/T, → Incorrecta.

Dimensión de ($\sqrt{\frac{\mu}{F}}$) = $\{M \times L^{-1} / M \times L \times T^{-2}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\frac{\mu}{F}}$) =$\{T^2 \times L^{-2}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\frac{\mu}{F}}$) =T/L,

que no es L/T, → Incorrecta.

Dimensión de ($\sqrt{\frac{F}{\mu}}$) = $\{M \times L \times T^{-2} / M \times L^{-1}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\frac{F}{\mu}}$) = $\{L^2 \times T^{-2}\}^{1/2}$

Dimensión de ($\sqrt{\frac{F}{\mu}}$) = L/T, → dimensión correcta.

Dimensión de ($\frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$) = $\{M \times L \times T^{-2} / M \times L^{-1}\}^{1/2}/L$

Dimensión de ($\frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$) = $\{L^2 \times T^{-2}\}^{1/2}/L = T^{-1}$,

que no es L/T, → Incorrecta.

▲ Ejercicio 1.2

En principio el valor que debemos expresar es: 934.000 hPa, pero así escrito tiene 6 cifras significativas, y debe ser expresado con tres. Para que las cifras significativas sean tres, podríamos escribir 934×10^3 hPa, o 934×10^5 Pa, pero en estos casos estamos utilizando potencias de diez, de manera que lo que falta es elegir prefijos adecuados. Los prefijos adecuados, para no tener que agregar ceros a la derecha de las tres cifras dadas, son los que simbolizan factores mayores de 10^3. Podría ser M, G, T, etc.

Es decir que una respuesta correcta es: 93,4 MPa, y otra: 0,0934 GPa.

CAPÍTULO 2

▲ Ejercicio 2.1

a) $\vec{A} = (-20; 5)$ (todas las figuras están juntas al final).

Las componentes están dadas: $A_x = -20$, $A_y = 5$.

Módulo: $A = \sqrt{(-20)^2 + 5^2}$

$A \cong 20{,}6$.

Ángulo con eje x (en 2° cuadrante):

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{5}{20}$

$\alpha = \text{arctg}\ (0{,}25)$

$\alpha \cong 14°$.

Ángulo con eje y (en 2° cuadrante):

$\beta = 90° - \alpha$

$\beta \cong 76°$.

b) $\vec{B} = -5\ (5\ ;\ -10)$

$B = (-25\ ;\ 50)$.

Componentes $B_x = -25$, $B_y = 50$.

Módulo: $B = \sqrt{(-25)^2 + 50^2}$

$B \cong 55{,}9$.

Ángulo con eje x (en 2° cuadrante):

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{50}{25}$

$\alpha = \text{arctg}(2)$

$\alpha \cong 63{,}4°$

Ángulo con eje y (en 2° cuadrante):

$\beta = 90° - \alpha$

$\beta \cong 26{,}6°$.

c) $\vec{C} = 1/5\ (30\ ;\ -60)$

$C = (6\ ;\ -12)$. Componentes $C_x = 6$, $C_y = -12$.

Módulo: $C = \sqrt{6^2 + (-12)^2}$

$C \cong 13{,}4$.

Ángulo con eje x (en 4° cuadrante):

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{12}{6}$

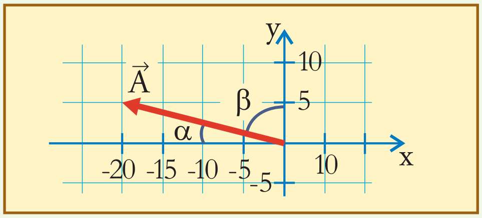
$\alpha = \text{arctg}(2)$

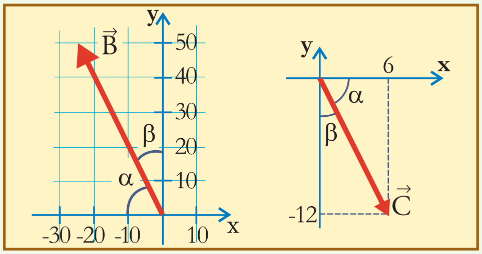
$\alpha \cong 63{,}4°$

Ángulo con eje y (en 4° cuadrante):

$\beta = 90° - \alpha$

$\beta \cong 26{,}6°$.





▲ **Ejercicio 2.2**

El ángulo que forma $\vec{A}$ con el eje horizontal es 140° - 90° = 50°, de manera que

A_x = 30 x cos50°

A_x= 19,3, y

A_y= 30 x sen 50°

A_y= 23,0.

El ángulo que forma $\vec{D}$ con el eje horizontal es 100° + 50° = 150°, de manera que D_x = 35 x cos150°

D_x = -30,3,

D_y = 35 x sen150°

D_y = 17,5.

En cuanto a F , por estar sobre el eje y,

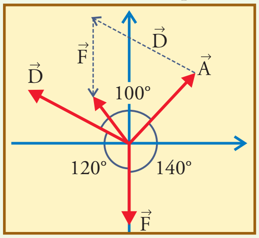
$\vec{F}_x$ = 0, y F_y = -24.

De manera que la suma es

$\vec{A} + \vec{D} + \vec{F}$ = (19,3 ; 23,0) + (-30,3 ; 17,5) + (0 ; -24)

$\vec{A} + \vec{D} + \vec{F}$ = (-11,0 ; 16,5)

El resultado de la suma cualitativa está representado por el vector hueco en la siguiente figura, que no se hace estrictamente a escala, pero que trata de mostrar aproximadamente los ángulos y los tamaños relativos de los vectores. Vemos que el resultado es un vector cuya componente x es negativa y tiene una longitud aproximada parecida a la mitad de F, y componente y positiva, un poco menor que la de $\vec{D}$. Si observamos los resultados del cálculo analítico vemos que concuerdan bien con estas afirmaciones.



▲ **Ejercicio 2.3**

a) Para las componentes horizontales y verticales interesan los ángulos con los ejes (x, y), de las figuras. Para $\vec{D}$, que apunta según el eje vertical hacia abajo, la descomposición es trivial: D_x = 0, D_y = -4.

Para $\vec{L}$ el ángulo con la horizontal es 75°, de manera que L_x = L x cos75°

L_x = 0,52 , y

L_y = L sen75°

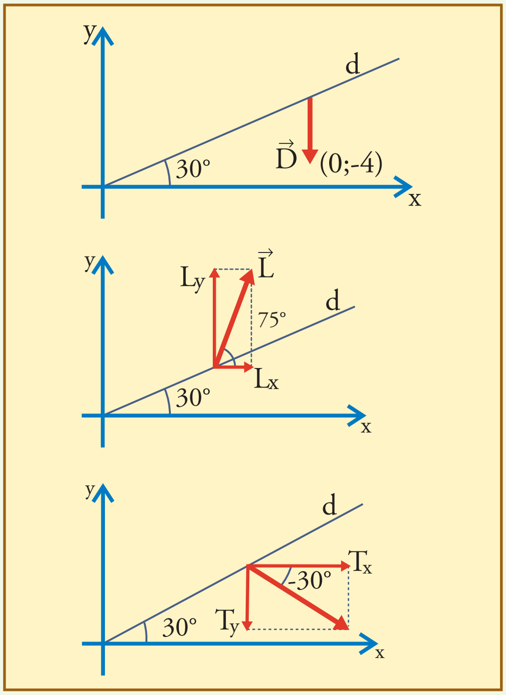
L_y = 1,93.

Para $\vec{T}$ el ángulo con la horizontal es -30°, de manera que T_x = T x cos30°

T_x = 4,33 , y

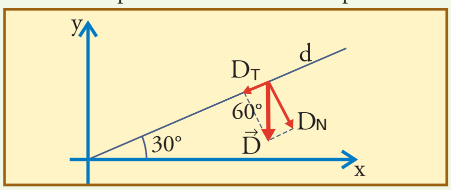
T_y = -T x sen30°

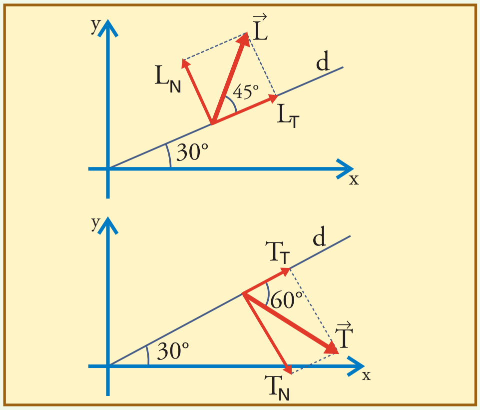
T_y = -2,5.



Nótese especialmente que las componentes y de los vectores $\vec{D}$ y $\vec{T}$ son negativas aunque estos vectores están situados arriba del eje x. Esto es porque el signo de cada componente de un vector indica *hacia dónde apunta*, no dónde está. Para que todo se vea claramente, hay que imaginar el vector trasladado hasta que quede dibujado naciendo en el origen.

b) Ahora interesan los ángulos con la recta d. Utilizamos el subíndice T para las componentes tangenciales, y N para las normales. Aquí no estableceremos ninguna convención para los signos, por lo que consideraremos positivas a todas las componentes.





$D_T = 4 \cos 60°$ $\quad$ $D_N = 4 \text{ sen } 60°$

$D_T = 2$ $\quad$ $D_N = 3{,}46$

$L_T = 2 \cos 45°$ $\quad$ $L_N = 2 \text{ sen } 45°$

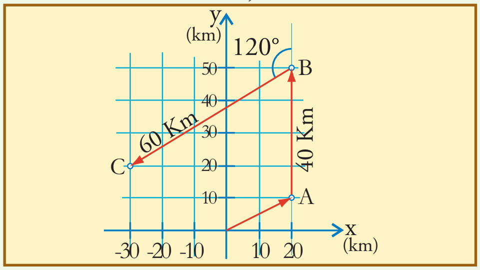
$L_T = 1{,}41$ $\quad$ $L_N = 1{,}41$

$T_T = 5 \cos 60°$ $\quad$ $T_N = 5 \text{ sen } 60°$

$T_T = 2{,}5$ $\quad$ $T_N = 4{,}33$

▲ Ejercicio 2.4

Comencemos con un dibujo de la situación.



a) y **b)** Los vectores desplazamiento son los que han quedado dibujados. Las componentes de los dos primeros, además están dadas en el enunciado: $\vec{D}_1$ = (20 km ; 10 km), y $\vec{D}_2$ = (0 km ; 40 km).
Para $\vec{D}_3$, en cambio, están dados el módulo y el ángulo con el eje y, de donde se deduce:

$D_{3x} = - D_3 \cos 30°$

$D_{3x} \cong - 52$ km

$D_{3y} = -$ D3 sen 30°

$D_{3y} = - 30$ km

Entonces $D_3 \cong$ (-52 km ; -30 km).

Los módulos son: $D_1 = \sqrt{20^2 + 10^2}$

$D_1 \cong 22{,}4$ km ,

$D_2 = 40$ km, $D_3 = 60$ km.

Para los vectores posición tenemos que $\vec{A}$ es dato:
$\vec{A}$ (20 km ; 10 km).

$\vec{B}$ se obtiene sumando $\vec{D}_2$: $\vec{B} = \vec{A} + \vec{D}_2$

$\vec{B}$ = (20 km ; 50 km).

Por último, $\vec{C}$ se obtiene sumando $\vec{D}_3$ a $\vec{B}$:

$\vec{C} = \vec{D}_3 + \vec{B}$

$\vec{C} \cong$ (-32 km ; 20 km).

Los módulos representan la distancia de cada punto al origen:

$A = D_1$

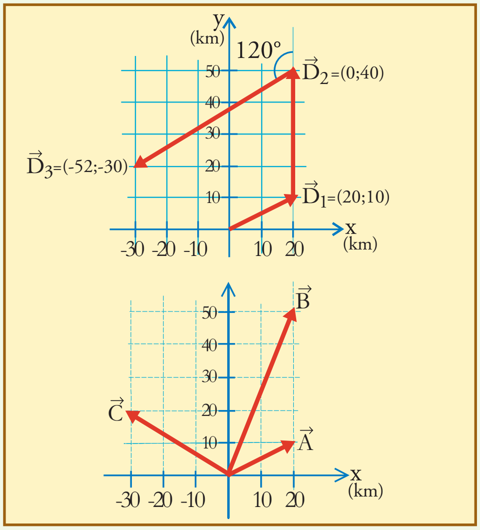
A = 22,4 km

$B = \sqrt{20^2 + 50^2}$

B = 53,9 km

$C = \sqrt{32^2 + 20^2}$

C= 37,7 km.



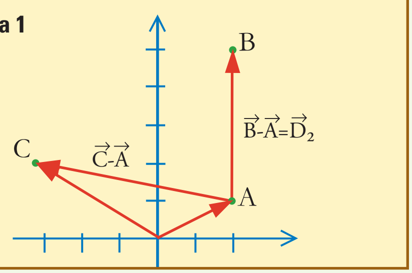


Figura 1

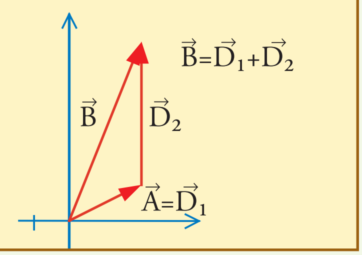
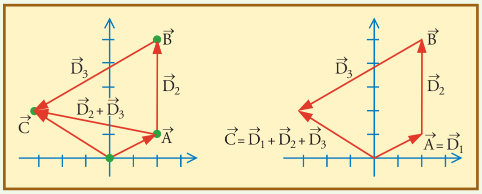


Figura 2

c) En la figura 1 se muestran las diferencias: $\vec{B} - \vec{A}$, que indica tanto el desplazamiento $\vec{D}_2$, como la posición de $\vec{B}$ con respecto a $\vec{A}$, y $\vec{C} - \vec{A}$, que indica tanto el desplazamiento que llevaría desde el punto $\vec{A}$ hasta el C, como la posición de $\vec{C}$ con respecto a $\vec{A}$.
En la figura 2 se muestra la suma $\vec{D}_1 + \vec{D}_2$, que es la posición del punto $\vec{B}$, final, con respecto al origen, o sea el vector $\vec{B}$.
En estas dos figuras se muestran las sumas $\vec{D}_2 + \vec{D}_3$, y $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$. Por ser sumas de desplazamientos, ambas indican la posición del punto final respecto del inicial en cada caso.

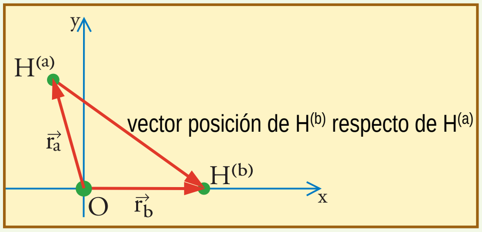


d) $\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 = \vec{C}$
$\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$ = (-32 km ; 20 km),
por ser la suma de los tres desplazamientos sucesivos, es la posición del punto final respecto del inicial.
$|\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3|$ es el módulo del vector anterior, 37,7 km, o sea, es la distancia desde el punto final al inicial.
$|\vec{D}_1| + |\vec{D}_2| + |\vec{D}_3|$ es la suma de los módulos de cada desplazamiento, o sea que es la suma de las distancias recorridas: 22,4 km + 40 km + 60 km = 122,4 km. Es la distancia total recorrida a lo largo del camino.
e) Todas estas cosas han sido calculadas en diversos puntos del ejercicio. Ahora sólo resta saber ordenar algunas ideas.
e1) Son correctas 1, 4, 5, y 6. No son correctos 2 y 3, porque *estos vectores no son fuerzas*. Confundir vectores desplazamiento con fuerzas sería un error grosero que no debe cometerse (ver ejercicio 2.8). Tampoco es correcta la 7 (aunque representa un error más leve), porque la distancia se define como un escalar, no como un vector. La distancia entre 2 puntos es el módulo del vector que indica la posición de uno respecto de otro.
e2) El resultado de la operación ($\vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$), es un vector, y también es un desplazamiento. Por lo recién dicho, no es una fuerza, y tampoco una distancia.
e3) Sólo 1 es correcta (ver (d) también).

▲ Ejercicio 2.5

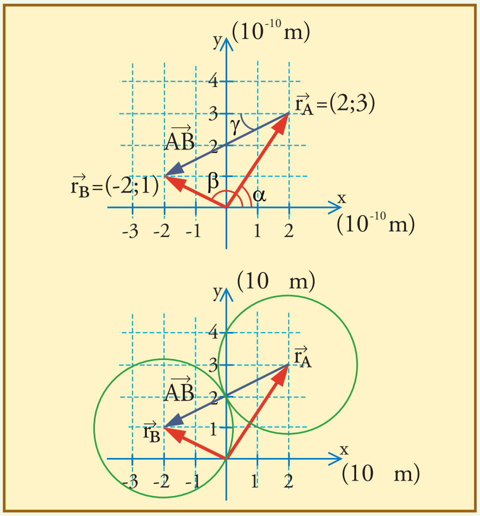
a) La distancia H-O es el módulo del vector $\vec{r}_a$, de manera que sus componentes son:
$x_a \cong 0{,}957 \times 10^{-10} \times \cos 104{,}5°$
$x_a \cong -0{,}240 \times 10^{-10}$ m
$y_a \cong 0{,}957 \times 10^{-10} \times \mathrm{sen}\, 104{,}5°$
$y_a \cong 0{,}927 \times 10^{-10}$ m

Entonces:
$\vec{r}_a \cong (-0{,}240 \times 10^{-10}$ m ; $0{,}927 \times 10^{-10}$ m)
$\vec{r}_a \cong (-0{,}240 ; 0{,}927) \times 10^{-10}$ m
$\vec{r}_b \cong (0{,}957 ; 0{,}000) \times 10^{-10}$ m.
$\vec{r}_a - \vec{r}_b \cong (-1{,}197 ; 0{,}927) \times 10^{-10}$ m. Es la posición del protón $H^{(a)}$ respecto del $H^{(b)}$.
$\vec{r}_b - \vec{r}_a \cong (1{,}197 ; -0{,}927) \times 10^{-10}$ m. Es el vector opuesto al anterior. Es la posición del protón $H^{(b)}$ respecto del $H^{(a)}$.
b) $r_a = r_b \cong 0{,}957 \times 10^{-10}$ m, es la distancia H-O.
$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| = |\vec{r}_b - \vec{r}_a|$
$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| = \sqrt{1{,}197^2 + 0{,}927^2} \times 10^{-10}$ m
$|\vec{r}_a - \vec{r}_b| \cong 1{,}514 \times 10^{-10}$ m
Es la distancia entre los protones.
c) $\vec{r}_a$ representa la posición de $H^{(a)}$ con respecto a O, y $\vec{r}_a - \vec{r}_b$ representa la posición con respecto al otro protón ($H^{(b)}$).
d) La operación vectorial: $\vec{r}_a$ + vector posición de $H^{(b)}$ con respecto a $H^{(a)} = \vec{r}_b$, es analíticamente:
Eje x:
$-0{,}240 \times 10^{-10}$ m + $1{,}197 \times 10^{-10}$ m = $0{,}957\jmath 10^{-10}$ m
Eje y:
$0{,}927 \times 10^{-10}$ m + $(-0{,}927 \times 10^{-10}$ m) = $0{,}000 \times 10^{-10}$ m
Gráficamente:



▲ Ejercicio 2.6

a) Estas distancias son los módulos de los vectores posición:
$r_A = \sqrt{2^2 + 3^2} \times 10^{-10}$ m
$r_A = 3{,}61 \times 10^{-10}$ m
$r_B = \sqrt{2^2 + 1^2} \times 10^{-10}$ m
$r_B = 3{,}24 \times 10^{-10}$ m
Y para los ángulos indicados en la figura tenemos:
$\mathrm{tg}\alpha = 3/2 = 1{,}50 \Rightarrow \alpha = 56{,}3°$
$\mathrm{tg}\beta = -1/2 = -0{,}50 \Rightarrow \beta = 153{,}4°$
b) y **c)** $\vec{AB} = (-2-2 ; 1-3) \times 10^{-10}$ m $= (-4 ; -2) \times 10^{-10}$ m; éste es el vector que indica el desplazamiento pedido.
Su módulo, $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} \times 10^{-10}$ m
$AB = 4{,}47 \times 10^{-10}$ m
indica la distancia que habría que desplazar A, y la dirección (correspondiente al 3^er cuadrante), estaría dada por el ángulo **g** que se muestra en la figura, dado por: $\mathrm{tg}\gamma = ½ \longrightarrow \gamma \cong 26{,}6°$ (o si referimos el ángulo al eje x^+, sería 206,6°).



Para que se diera la situación propuesta en (c), mostrada en la figura de la derecha, el radio de cada esfera debería ser la mitad de la distancia AB, y por lo tanto, su diámetro debería ser igual precisamente a esa distancia: $4{,}47 \times 10^{-10}$ m.

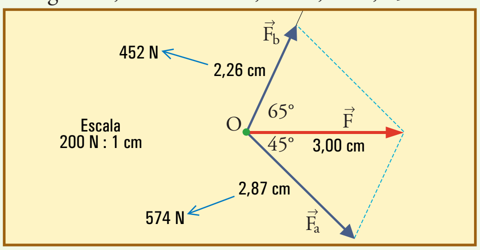
d) Que $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, se muestra dibujando $\vec{AB}$ a continuación de $\vec{r}_A$, y mostrando que su punta señala exactamente el mismo punto que $\vec{r}_B$.

Para mostrar que $\vec{AB}$ es la posición de B con respecto a A, se dibujan ejes x, y, con el origen en A. En este sistema la posición de B quedará señalada por el vector (-4 ; -2) $\times 10^{-10}$ m , que es precisamente $\vec{AB}$.

▲ Ejercicio 2.7

Elegimos una escala 200 N : 1 cm, con la cual la fuerza del enunciado se dibujará de 3 cm de largo. Esta fuerza es la resultante de las fuerzas con las cuales cada cuerda tira de O, que son las que hay que averiguar.

De manera que trazando paralelas a cada cuerda por el extremo de $\vec{F}$ (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos, a lo largo de la cuerda a, un vector de 2,87 cm de longitud, que representa una fuerza de 574 N, y a lo largo de b, un vector de 2,26 cm, o sea, 452 N.



▲ Ejercicio 2.8

Es claro que toda fuerza (en física, o mecánica) es un vector, en función de que, como hemos visto, es un ente con orientación en el espacio.

Pero además, también es claro que hemos estudiado varios elementos o conceptos que son vectores, y no son fuerzas, como los siguientes:

Vector posición. Indica la ubicación (de un punto) en el espacio.

Vector desplazamiento. Indica el cambio, o diferencia entre dos posiciones.

Vector velocidad. Indica la orientación y rapidez de un movimiento.

Está claro que todos estos elementos, (y muchos otros que veremos) no son fuerzas porque no indican una acción que un cuerpo ejerza sobre otro tendiendo a desplazarlo.

Es importante reflexionar sobre el significado de cada concepto que se estudia y utiliza. Afirmar que todo vector es una fuerza, es un tremendo error, consistente en confundir entre sí todos los entes de naturaleza vectorial, ignorando las particularidades de cada uno.

Lamentablemente, es un error bastante difundido y contra el que tratamos de alertar en este ejercicio: caer en esta confusión significa tener una imagen completamente superficial de los problemas estudiados, en la que se ha sustituido el significado de muchos conceptos diferentes, por un mismo símbolo con el cual se los representa. Es un grave error revelador de una metodología totalmente superficial, que rehuye el necesario esfuerzo de interpretación que requiere cada situación.

▲ Ejercicio 2.9

a) El vector desplazamiento es

$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\vec{AB}$ = (80 m ; 60 m).

Su módulo es la distancia entre A y B:

$d_{AB} = \sqrt{80^2 + 60^2}$

d_{AB} = 100 m.

Esa es la distancia recorrida en 4 s, de manera que en cada segundo se recorren 100/4 = 25 metros.

La definición (2.1) dice eso mismo de la siguiente manera: $v = d_{AB}/\Delta t$

v = 100 m

v = 25 m/s.

b) Según (2.3'):

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t};\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \left(\frac{80\,m}{4\,s};\frac{60\,m}{4\,s}\right) = (20\,m/s\,;15\,m/s)$$

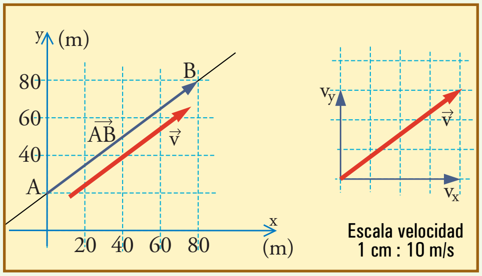
La coincidencia en dirección y sentido de los vectores desplazamiento y velocidad se muestra comparando

$\Delta y/\Delta x$ con v_y/v_x (que son iguales); en la figura además se muestra lo mismo con el vector v dibujado al lado de la trayectoria.

c) $v = \sqrt{20^2 + 15^2}$

$v = 25$ m/s.

Vemos que coincide con $d_{AB}/\Delta t$.



CAPÍTULO 3

▲ Ejercicio 3.1

a) Fuerza resultante normal: *nula*, y fuerza resultante tangencial: *dirigida en sentido contrario a la velocidad*.

b) Fuerza resultante tangencial: *nula*, y fuerza resultante normal: *constante*.

▲ Ejercicio 3.2

a) Si una partícula se desplaza libremente en el espacio (sin que actúen sobre ella fuerzas de ningún tipo) a lo largo de una recta **a**, y no estamos en alguna situación tramposa (por ejemplo, que el sistema de referencia se mueva de alguna manera especial), estamos en las condiciones exactas del Principio de Inercia, por lo cual su velocidad necesariamente debe ser constante, como lo dice la segunda opción presentada.

Acerca de las demás opciones podemos decir:

La afirmación de que su velocidad *puede ser constante*, si bien no implica un hecho inexacto, indica que se desconoce un principio fundamental como el de inercia, ya que deja abierta la posibilidad de que en algunos casos de fuerza resultante nula, la velocidad pueda cambiar. Es una afirmación que sólo podría ser admitida como recurso retórico en algún contexto determinado, y no en general.

La afirmación de que la velocidad puede variar, simplemente implica desconocer las ideas básicas de la física. Una persona que hace esta afirmación está en las mismas condiciones de alguien que no ha estudiado física, y además está mostrando no tener alguna idea definida de lo que puede pasar, ya que deja la puerta abierta a cualquier posibilidad (que la velocidad disminuya o aumente o no varíe).

La afirmación de que la velocidad debe disminuir cuando no actúan fuerzas sobre el móvil, es una vieja y típica idea *aristotélica*. Es una idea influida por el conocimiento de sentido común, y aunque puede indicar que no se ha estudiado física, también puede indicar que las ideas estudiadas en física aún no hayan sido adecuadamente integradas en un esquema de pensamiento, y están conviviendo con ideas erróneas originadas en el sentido común. Es un proceso natural, frente al que debemos estar atentos para que el esquema de ideas no se estacione en una convivencia de ideas contradictorias, sino que evolucione hasta un estadio final en el que esta opción sea claramente rechazada con fundamentos adecuados.

La afirmación de que la velocidad debe aumentar no merece mucho comentario porque está en desacuerdo tanto con la física como con el sentido común. Una persona que elija esta opción probablemente está tratando de llamar la atención, o de producir algún conflicto, o simplemente no leyó bien el enunciado.

b) En todos los casos hay que aplicar una fuerza estrictamente normal (perpendicular), es decir sin componente tangencial. La fuerza debe ser aplicada hacia el lado hacia el cual se desea producir la desviación, y debe:

• Ir cambiando de dirección junto con el movimiento, para mantenerse exactamente perpendicular a la trayectoria en cada instante,

• Mantener el módulo constante para que la curva siempre sea un arco de circunferencia, es decir, mantenga siempre la misma curvatura constante,

• Suspenderse en el instante en que el móvil pasa por el punto en el que deseamos que termine la trayectoria curva. A partir de allí, libre de fuerzas, el movimiento continuará en línea recta en la dirección que tiene en ese lugar.

Es decir, si le llamamos F_0 al módulo de la fuerza que se debe aplicar (hacia la izquierda) en el caso b (circunferencia completa de radio R_0), durante un tiempo T_0, entonces:

Para el caso **c**, debe aplicarse una fuerza del mismo módulo F_0, hacia la derecha, durante la mitad del tiempo ($T_0/2$).

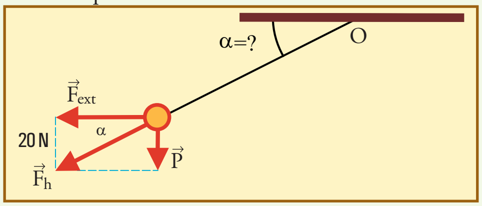
Para el caso **d**, debe aplicarse una fuerza del módulo <u>mayor</u> que F_0, hacia la derecha, durante un tiempo $T_0/8$.

Para el caso **e**, debe aplicarse una fuerza del módulo <u>menor</u> que F_0, hacia la derecha, durante un

tiempo $T_0/2$.
Vale aclarar que no tenemos aún elementos para calcular cuánto mayor o menor que F_0 debe ser el módulo de las fuerzas correspondientes a los casos d y e. Cuando los tengamos (Capítulo 5) podremos calcular que para el caso d el módulo de la fuerza debe ser $2F_0$, y para el e, $½F_0$. En cambio sí podemos calcular el tiempo que debe aplicarse, porque sabemos calcular la longitud de los arcos de circunferencia recorridos, siempre con la misma velocidad.

▲ Ejercicio 3.3

a) Del dibujo se advierte que la fuerza que tira del hilo, $\vec{F}_h$, es la resultante entre el peso y $\vec{F}_{ext}$, y que esta fuerza hace girar el hilo alrededor de O hasta que se alinea con ella, siendo ésta, por lo tanto, la posición de equilibrio.

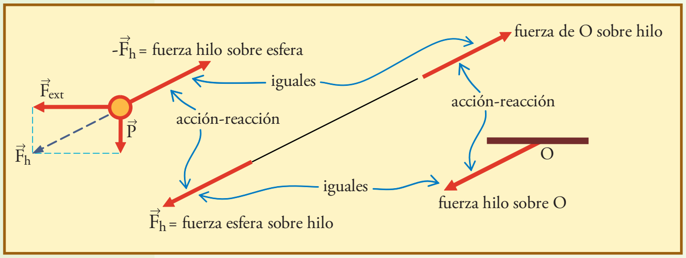


Esto significa que F_h forma con la horizontal el mismo ángulo α que el hilo, y por lo tanto podemos aplicar:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{P}{F_{ext}} \quad , \quad \text{y} \quad F_h = \sqrt{P^2 + F_{ext}^2}$$

Con lo cual siendo P = m g ≅ 14,7 N, resulta
tg α ≅ 0,735 , α ≅ 36,3° , F_h ≅ 24,8 N.
b) y **c)** La reacción a $\vec{F}_{ext}$ no se muestra pues habría que dibujarla sobre el agente que tira de la esfera, y la reacción a $\vec{P}$, que tampoco se puede mostrar, estaría en el centro de la Tierra.

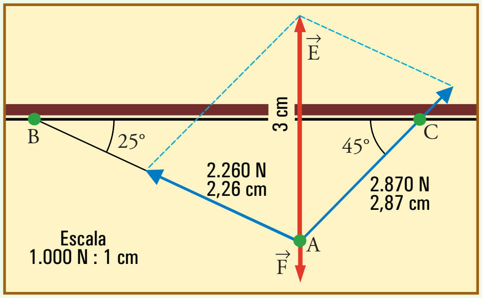
▲ Ejercicio 3.4



El cuerpo al pasar por E (y por cualquier otro punto en su movimiento libre) sólo tiene contacto con el hilo. Eso significa que sobre él, además de la acción de la gravedad, sólo puede haber una fuerza de contacto aplicada por el hilo. La fuerza aplicada por el campo gravitatorio es el peso, vertical hacia abajo, igual en cualquiera de las posiciones, independiente del reposo o del movimiento. La fuerza aplicada por el hilo sólo puede ser alineada con el hilo, *tirando del cuerpo hacia el punto de suspensión* (ya que el hilo no puede empujar). De manera que la única figura que puede ser correcta es la (b).
Si se encuentra la fuerza resultante dibujando el paralelogramo con estas dos fuerzas de la figura (b), se encuentra que la resultante es hacia atrás y hacia arriba. Esto se entiende porque la resultante debe tener una componente normal hacia la izquierda con respecto al movimiento (es decir hacia arriba en la figura), para producir la trayectoria curvada hacia la izquierda, y debe tener una componente tangencial hacia atrás para ir frenando el movimiento, como ocurre en todo el tramo desde D hasta G. Todos los detalles de esto se estudiarán en el capítulo 5.
Elegir alguna de las figuras que muestran un vector hacia delante, corresponde a un pensamiento aristotélico, según el cual un movimiento hacia delante sólo podría ocurrir si hubiese una fuerza hacia delante; y eso a su vez *revelaría que no se entiende lo que es una fuerza*, ya que se pensaría que puede haber fuerza hacia delante sin que haya alguien que la aplique.

▲ Ejercicio 3.5

a) Elegimos una escala 1.000 N : 1 cm, con la cual la fuerza del enunciado se dibujará de 3 cm de largo. Luego dibujamos la fuerza equilibrante de ésta, $\vec{E}$, de 3 cm, hacia arriba, con origen en A. Esta fuerza es la resultante de las fuerzas con las cuales cada cuerda tira de A, que son las que hay que averiguar.
De manera que trazando paralelas a cada cuerda por el extremo de $\vec{E}$ (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos, a lo largo de la cuerda AC, un vector de 2,87 cm de longitud, que representa una fuerza de 2.870 N, y a lo largo de AB, un vector de 2,26 cm, o sea, 2.260 N.



Se recomienda especialmente **no cometer el error de atribuir a cada vector la longitud de la correspondiente cuerda**.

b) Por ser un sistema de tres fuerzas que tiran de A en equilibrio, debemos plantear:

$$\vec{F} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = \vec{0}$$

Por ser una suma vectorial, debe efectuarse con cada componente por separado. Es decir que en realidad tenemos dos ecuaciones:

$$F_x + F_{ABx} + F_{ACx} = 0$$
$$F_y + F_{ABy} + F_{ACy} = 0$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones. Podríamos resolverlo si tuviese dos incógnitas. Pero así escrito tiene cuatro: F_{ABx} , F_{ACx} , F_{ABy} , y F_{ACy} .
No obstante, dado que los ángulos son datos, podemos escribir estas incógnitas en función de los módulos de las fuerzas:
$F_{ABx} = -F_{AB} \cos 25^\circ$; $F_{ABy} = F_{AB} \operatorname{sen} 25^\circ$;
$F_{ACx} = F_{AC} \cos 45^\circ$; $F_{ACy} = F_{AC} \operatorname{sen} 45.^\circ$

Sustituyendo en las dos ecuaciones tenemos:
$F_x - F_{AB} \cos 25^\circ + F_{AC} \cos 45^\circ = 0$
$F_y + F_{AB} \operatorname{sen} 25^\circ + F_{AC} \operatorname{sen} 45^\circ = 0$

Ahora el sistema se puede resolver, pues sólo tiene dos incógnitas. Una forma de hacerlo es la siguiente:
<u>Paso 1:</u> Tomamos la primera ecuación, en la cual, considerando que $F_x = 0$, se obtiene:

$$F_{AB} = F_{AC} \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

<u>Paso 2:</u> Sustituimos F_{AB} en la segunda ecuación, en la cual, además pasamos F_y al miembro derecho:

$$F_{AC} \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ} \operatorname{sen} 25^\circ + F_{AC} \operatorname{sen} 45^\circ = -F_y = 3.000 \text{ N}$$

De donde se despeja:

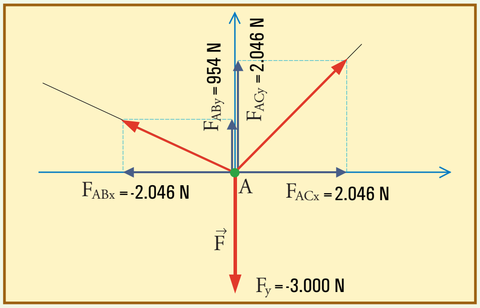
$$F_{AC} = \frac{3000}{sen25^\circ \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ} + sen45^\circ}$$

$F_{AC} = 2.893$ N

Y con este valor en la expresión de F_{AB} obtenida en el paso 1:

$$F_{AB} = 2.893 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

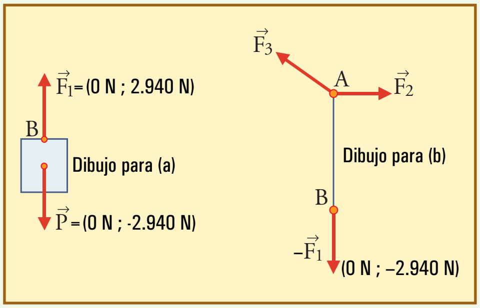
$F_{AB} = 2.257$ N
Obsérvese la buena aproximación que se logró con el método gráfico.
Si ahora calculamos todas las componentes de las fuerzas, podemos hacer una interpretación interesante en el diagrama vectorial, que nos servirá para muchas situaciones parecidas:



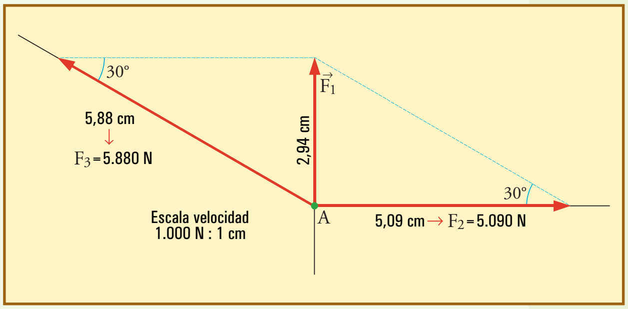
Vemos en la figura cómo se logra el equilibrio en cada eje: F_{ACx} se equilibra con F_{ABx}, mientras que F_y es equilibrada por la suma de las componentes y: 954 + 2.046 = 3.000.

▲ Ejercicio 3.6

a) y **b)** $P = m\, g \cong 2.940$ N;
por equilibrio $F_1 = P \cong 2.940$ N; los valores de F_2 y F_3 no pueden indicarse hasta que los calculemos en el punto c); hasta aquí sólo puede saberse que su resultante debe ser $\vec{F}_1$.



c) Elegimos una escala 1.000 N : 1 cm, con la cual el peso, y $\vec{F}_1$ se dibujarán de 2,94 cm de largo.
De manera que dibujamos en $\vec{F}_1$, y trazando paralelas a cada cuerda por su extremo (cuidado: respetar los ángulos), la descomponemos según las direcciones de éstas, y obtenemos, $F_2 = 5.090$ N, y $F_3 = 5.880$ N (hubiera sido equivalente la figura dibujando $\vec{F}_1$ hacia abajo).



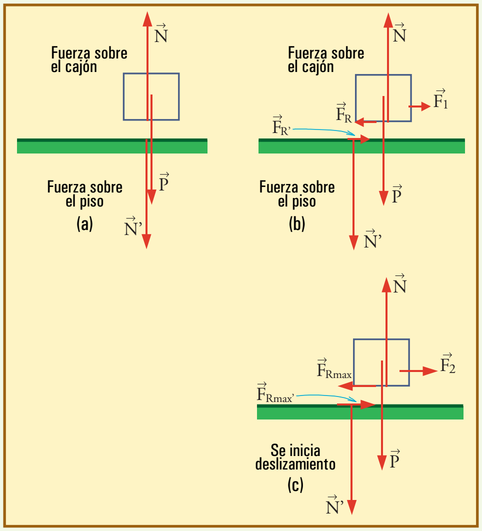
d) Podríamos plantear $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ por componentes, pero dado que vemos en la figura un triángulo rectángulo, resulta más fácil plantear relaciones trigonométricas simples:

$$\frac{F_1}{F_2} = tg30° \rightarrow F_2 = F_1 \ / \ tg\ 30° = F_2 = 5.092\ N$$

$$\frac{F_1}{F_3} = sen30° \rightarrow F_3 = F_1 \ / \ sen30° = F_3 = 5.880\ N$$

▲ Ejercicio 3.7

El procedimiento para los puntos a), b), y c), es exactamente igual a lo que se ha hecho en los ejemplos desarrollados: en a) tenemos simplemente un cuerpo apoyado sobre el piso, sin fuerzas horizontales, en b) se agregan dos fuerzas horizontales en equilibrio sobre el cuerpo, *ambas de valor F_1* (la que aplica el agente hacia la derecha, y el rozamiento, $\vec{F}_R$, hacia la izquierda), y en c) se repite la situación, con ambas fuerzas horizontales de valor $F_{Rmáx}$ (podemos pensar que F_2 supera a $F_{Rmáx}$, pero sólo lo hace levemente, por lo que desde el punto de vista práctico, son iguales).



Ahora bien, lo importante, y lo que se debe encontrar al hacer la experiencia, es que *F_2 es mucho menor que P*. Por ejemplo, para este caso P vale casi 400 N, y F_2 puede ser alrededor de 30 ó 50 N.

Con este ejercicio se espera revisar la idea superficial de que hay que superar al peso, para mover un cuerpo. El peso actúa en dirección vertical, y habría que superarlo para levantar al cuerpo, pero no para moverlo horizontalmente. Recordar la independencia de los movimientos y acciones en los distintos ejes. Lo que hay que superar es el rozamiento, y éste no tiene nada que ver con el peso. Puede ser proporcional a éste, pero la constante de proporcionalidad (cuando existe) puede ser bastante menor que 1!

▲ Ejercicio 3.8

a) k = pendiente

k = 40 N / 20 cm

k =2 N/cm

k = 200 N/m

Dado que x indica desde un extremo al otro del resorte, el valor de x para el cual la fuerza es nula indica la longitud de equilibrio, o sea, 30 cm.

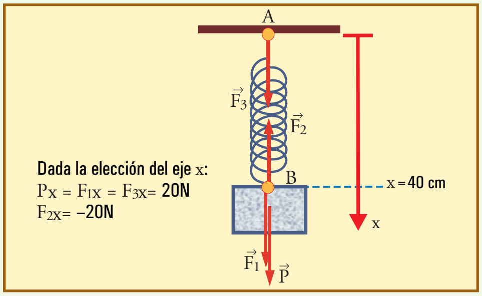
b) Dibujamos cuatro vectores verticales, todos del mismo módulo, igual a:

fuerza elástica = k x (40 cm – 30 cm)

fuerza elástica = 20 N

Estos vectores son: $\vec{F}_2$, hacia arriba, es la fuerza elástica que aplica el resorte en B, como reacción frente a $\vec{F}_1$, con la cual el cuerpo tira de él hacia abajo en (también en B). Por otra parte, $\vec{P}$ es la fuerza del campo gravitatorio aplicada hacia abajo en el centro del cuerpo, y $\vec{F}_3$ es la fuerza elástica tirando hacia abajo del extremo A del resorte.

La forma correcta de decidir el valor de los módulos es: $F_3 = F_2 = 20$ N, por la ley de Hooke. $F_1 = F_2$ porque son un par acción-reacción, y $P = F_2$ por el equilibrio de las acciones sobre el cuerpo.



c) La masa del cuerpo es m = P/g = 20 / 9,8 = 2,04 kg.

d) Con los datos se puede calcular la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Luna: $g_L \cong 1,63$ N/kg $\cong$ (1/6) g (el cálculo está mostrado en la resolución del Ejercicio 3.10).

Sabemos que cuando cambiamos la ubicación del cuerpo (de la Tierra a la Luna, en este caso) no cambia la masa, y obviamente tampoco cambian las propiedades del resorte.

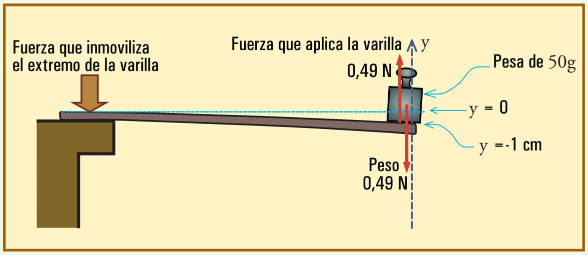
De manera que el peso en la Luna será menor: P' = m g_L = 3,33 N, y el estiramiento del resorte también será proporcionalmente menor: Δx = 3,33N / 2(N/cm) = 1,66 cm.

Dado que la longitud de equilibrio del resorte seguirá siendo 30 cm, tenemos que al suspenderle el cuerpo, en la Luna, se estirará hasta 31,66 cm.

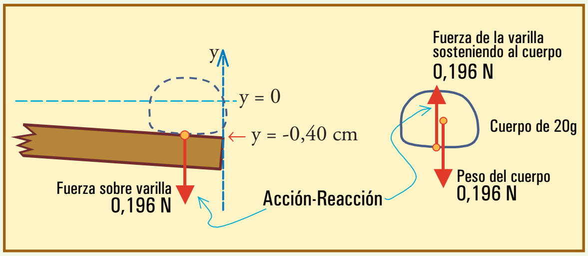
▲ Ejercicio 3.9

Aplicaremos la idea de que si la varilla es elástica, para deformaciones pequeñas en las cuales la curvatura no complique las ideas, el desplazamiento de la punta desde la posición de equilibrio será proporcional a la fuerza aplicada.

a) El peso del cuerpo es m g = 0,49 N, y hace descender al extremo 1 cm, de manera que la constante elástica es: k = 0,49 N / 0,01 m = 49 N/m = 0,49 N/cm.



b) Peso del cuerpo de 20 g:
0,196 N, $|\Delta y|$ = F / k = 0,40 cm.



▲ Ejercicio 3.10

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de cualquier planeta se calcula con la expresión:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Para el caso de la Luna

$$g_L = \frac{6{,}67\times10^{-11}(N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2})\times7{,}4\times10^{22}kg}{(1.738.000\,m)^2} \cong 1{,}63 \text{ N/kg}$$

El campo gravitatorio significa la fuerza gravitatoria por unidad de masa de cualquier cuerpo situado en ese lugar. Es decir que en la Luna un cuerpo de 1 kg, pesa 1,63 N, unas 6 veces menos de lo que el mismo cuerpo pesaría en la Tierra.

b) La opción 1 es obviamente falsa, ya que el cálculo del punto anterior muestra que g_L sólo depende de la masa y el radio de la Luna. Es un concepto que no depende de la existencia de atmósfera (aunque paradójicamente la existencia de atmósfera depende de que exista un campo gravitatorio capaz de retenerla).

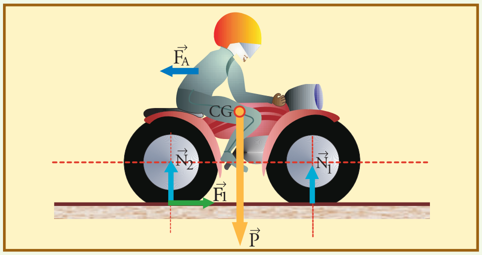
La opción 2 también es falsa, ya que según lo dicho en a), en la Luna un cuerpo de 1 kg es atraído *por la Luna misma*, con una fuerza de 1,63 N.

La opción 3 es verdadera: la fuerza de atracción entre dos cuerpos cualesquiera está dada por la Ley de Gravitación Universal, y para el caso de dos cuerpos de 1 kg de masa cada uno, a 1 m de distancia uno de otro, se obtiene el valor $6{,}7\times10^{-11}$ N, *independientemente de que los cuerpos estén en la Luna, en la Tierra, o en cualquier otra parte*. Entre cuerpos de poca masa la fuerza es tan pequeña que es muy difícil percibirla.

CAPÍTULO 4

▲ Ejercicio 4.1

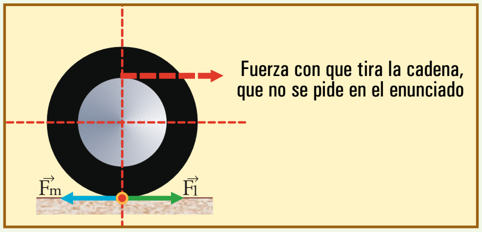
a) Las fuerzas exteriores sobre el sistema considerado son:



- El peso, $\vec{P}$, de módulo igual a 9,8×180 = 1.764 N, aplicado en el CG (es la resultante de la ación del campo gravitatorio distribuida por toda la masa del sistema),
- Las componentes normales de las reacciones del piso, $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$, aplicadas por el piso a las cubiertas a través de la superficie de contacto Sus valores son tales que equilibran al peso: $N_1 + N_2$ = 1.764 N. Además se ha indicado que $N_2 > N_1$, lo cual es un detalle que depende entre otras cosas de la ubicación del CG, y que, aunque no estamos en condiciones de calcular aún, es interesante mencionar.
- La resistencia que el aire opone al avance, distribuida en toda la superficie del sistema, cuya resultante denominamos $\vec{F}_A$ y dibujamos ubicada en un punto cualquiera (no es fácil determinar la ubicación de ese punto, y no interesa aquí). El módulo de $\vec{F}_A$ se obtiene de la tabla: para este sistema viajando a 70 km/h, F_A = 200 N,
- y por último, la fuerza impulsora, $\vec{F}_1$, que es la fuerza de fricción entre goma trasera y suelo, reacción de éste ante la fuerza motriz que la goma le aplica hacia atrás.
- No hay fuerza tangencial sobre la rueda delantera a menos que se apliquen los frenos.

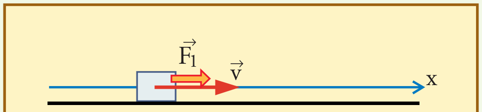
$\vec{F}_1$ debe valer lo mismo que $\vec{F}_A$: 200 N, porque según la Ley del Impulso, para que la moto viaje a velocidad constante, como en este caso, las fuerzas deben estar en equilibrio.

b) Las fuerzas tangenciales que resultan contra el piso se muestran en el siguiente esquema de la rueda trasera, $\vec{F}_m$ es la acción motriz de la rueda sobre el piso, empujando hacia atrás, para provocar la reacción $\vec{F}_1$, del piso sobre la rueda, impulsando al sistema hacia adelante. Ambas fuerzas son mutuamente acción y reacción, se deben al rozamiento entre goma y suelo, y deben valer lo mismo, o sea 200 N.



▲ Ejercicio 4.2

a) Las fuerzas actuantes sobre el cuerpo son: el peso, $\vec{P}$ = (0 ; - m g) ≅ (0 N ; -392 N), la reacción de la mesa, que equilibra al peso, ya que ambas son las únicas fuerzas verticales, o sea $\vec{R}$ ≅ (0 N ; 392 N), y la fuerza aplicada por un agente externo, $\vec{F}$ = (80 N ; 0 N).



Esquema de situación

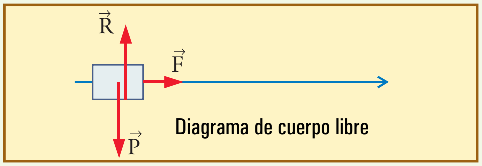


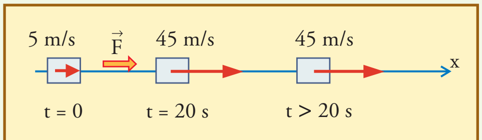
Diagrama de cuerpo libre

Claramente $\vec{F}$ es también la resultante, de manera que es la única que hay que considerar para el movimiento.

b) $\vec{I} = \vec{F} \times 20$ s = (1.600 Ns ; 0 Ns). Se advierte que en el eje vertical todo será nulo en este problema, de manera que podemos simplificar la notación trabajando sólo con las componentes x: $I_x = F_x \times 20$ s = 1.600 Ns. (El dibujo va en el diagrama en el punto c)

c) Para t = 0, p_{0x} = 40 kg × 5 m/s = 200 kg m/s. Aplicamos la Ley: para t = 20 s, $p_x = p_{0x} + I_x$ = 200 kg m/s + 1.600 Ns = 1.800 kg m/s.

Dado que p = m v, entonces la velocidad en t = 20 s, es $v_x = p_x$ / m = 1.800 (kg m/s) / 40 (kg) = 45 m/s.



Situación en el espacio

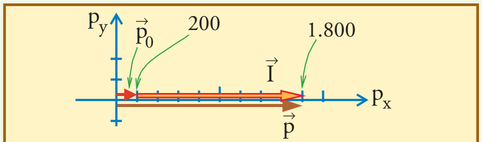


Diagrama vectorial para aplicación de la Ley

d) Es claro que luego de los 20 segundos, al ser nula la fuerza resultante (recordar que es un caso ideal, sin rozamiento) la velocidad debe mantenerse constante, y el cuerpo continúa indefinidamente viajando a 45 m/s.

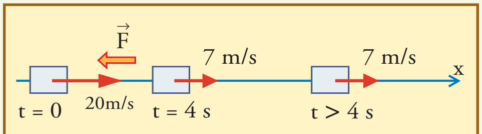
▲ Ejercicio 4.3

Aprovechando lo visto en el ejercicio anterior, nos ahorraremos el análisis de las fuerzas verticales, ya que sabemos que estarán en equilibrio y no influirán en nada. También consideraremos el movimiento a lo largo de x, o sea que consideraremos sólo componentes x de los vectores.

a) Ahora tenemos: cantidad de movimiento inicial: p_{0x} = 20 kg × 10 m/s = 200 kg m/s. Impulso aplicado en 4 s: I_x = –15 N 4 s = – 60 Ns.

Aplicación de la ley:

px = 200 kg m/s – 60 Ns = 140 kg m/s. Luego el movimiento continúa con velocidad constante que vale: v = $v_x = p_x$ / m = 7 m/s.



Situación en el espacio

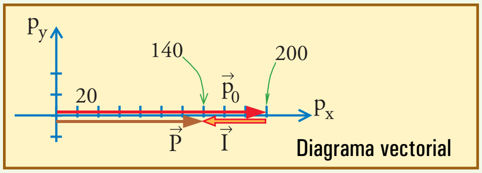


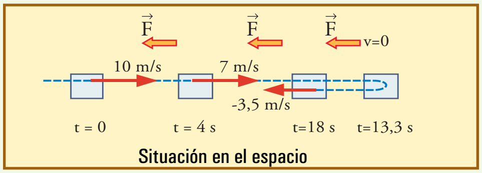
Diagrama vectorial

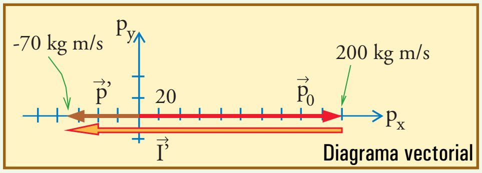
b) Para detener el cuerpo hay que mantener la fuerza aplicada hasta que p sea cero:

$p_x = p_{0x} + I_x$ = 0. Entonces I_x = – 200 Ns, y para ello: $\Delta t = I_x / F_x$ = – 200 / (–15) = 13,3 s.

c) Si continúa aplicada la fuerza después de que el

móvil se detiene, se reiniciará el movimiento en sentido contrario. Para t'= 18 s podremos calcular la cantidad de movimiento p'_x tanto multiplicando la fuerza por 18 s y restándola de la cantidad de movimiento inicial, como multiplicando la fuerza por 4,7 s, que es el tiempo transcurrido desde el instante de reposo (13,3 s):
$p'_x = 200$ kg m/s – 270 Ns = - 70 kg m/s ≅ - 15 N × 4,7 s.
La velocidad es: $v'_x = -70/20 = -3{,}5$ m/s.

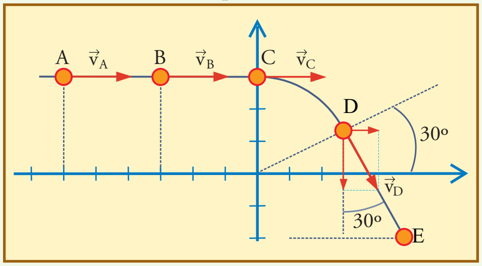




Luego de los 18 segundos, el movimiento continuará libre de fuerzas, es decir manteniendo la velocidad de –3,5 m/s indefinidamente (mientras dure la situación ideal).

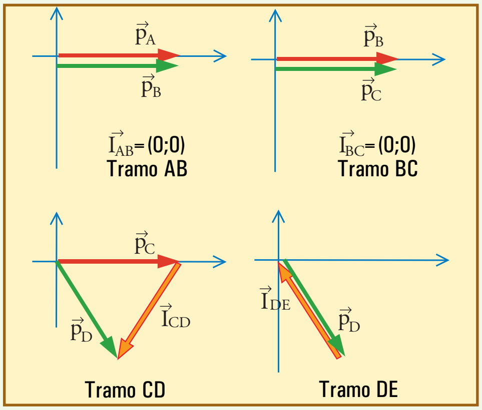
▲ Ejercicio 4.4

a) Según los datos todos los vectores velocidad tienen módulo igual a 6 m/s (excepto en E, en donde vale cero). Al dibujarlos sobre la trayectoria podremos ver más fácilmente sus componentes.

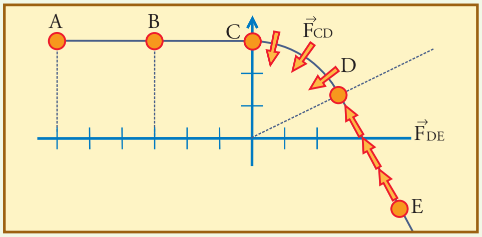


Efectivamente vemos que: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = (6$ m/s ; 0 m/s$)$.
Para las componentes de $\vec{v}_D$ es muy fácil equivocarse, y para evitarlo es necesario observar bien la figura. En ella vemos que $\vec{v}_D$ forma 30° con la dirección vertical, y no con la horizontal, de manera que:
$\vec{v}_D = (6 \text{ sen } 30° \ ; -6 \cos 30°) = (3$ m/s ; -5,2 m/s$)$.
Por último, $\vec{v}_E = (0$ m/s ; 0 m/s$)$.

b) El módulo del vector impulso puede deducirse fácilmente a partir de las figuras:



En los dos primeros tramos es nulo.
En el tramo CD, dado que entre los vectores $\vec{p}_C$ y $\vec{p}_D$, que son de igual módulo, quedan 60°, la figura que se forma es un triángulo equilátero, y por lo tanto el impulso vale lo mismo que los otros lados, es decir, 1.200 Ns.
En DE, como se ve, el módulo del impulso debe ser igual al de $\vec{p}_D$, es decir, 1.200 Ns.
c) Desde A hasta C, no hay fuerza resultante actuando sobre el móvil (como corresponde a un viaje uniforme en línea recta), y por ello el impulso aplicado es nulo.
En CD, debe haber una fuerza (resultante) aplicada hacia la derecha respecto del movimiento, perpendicularmente en cada lugar, para producir la desviación sin variar la rapidez. Nótese que la orientación de los vectores fuerza dibujados es, en promedio, la del vector $\vec{I}_{CD}$.
Por último, en DE, debe haber fuerzas aplicadas de manera tal que la resultante actúe en sentido contrario al movimiento, alineada con la trayectoria (tal como $\vec{I}_{ED}$).



▲ Ejercicio 4.5

a) En todo el tramo AB, incluidos A, y B, tenemos que la cantidad de movimiento es un vector orientado a 60° del eje x, con un módulo igual a 3 kg × 30 m/s = 90 kg m/s. De manera que
$\vec{p}_A = \vec{p}_B = (90 \cos 60°; 90 \text{ sen } 60°) = (45$ kg m/s; 78 kg m/s$)$.

En todo el tramo BC hay un cambio en el vector cantidad de movimiento que inicialmente es $\vec{p}_B$, y finalmente, $\vec{p}_C$.
En todo el tramo CD, incluidos C, y D, tenemos que la cantidad de movimiento es el vector $\vec{p}_C$ orientado a 30° del eje x, con un módulo igual a 3 kg × 17,3 m/s = 51,9 kg m/s. De manera que $\vec{p}_C = \vec{p}_D$ = (45 kg m/s ; 26 kg m/s).

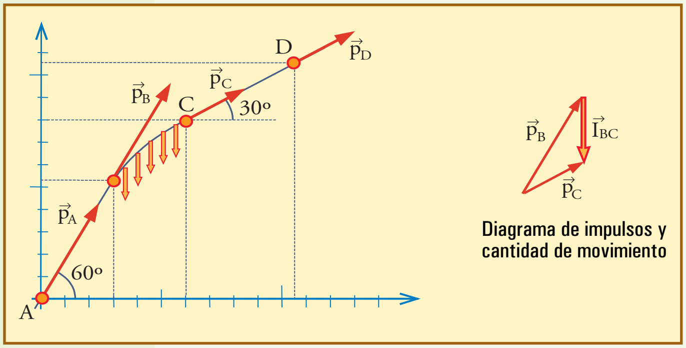
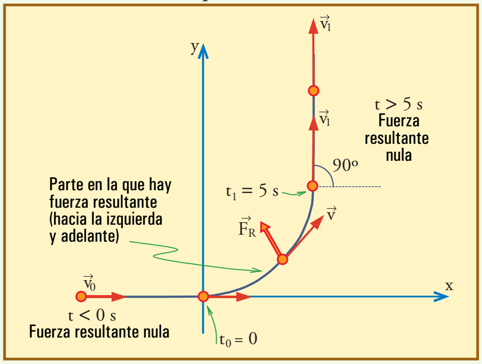


Diagrama de impulsos y cantidad de movimiento

b) Sólo en el tramo BC hay una fuerza resultante, capaz de cambiar la cantidad de movimiento que inicialmente es el vector $\vec{p}_B$ (que es el mismo $\vec{p}_A$), hasta que llegue a ser el vector final, $\vec{p}_C$.
De manera que el vector impulso aplicado es $\vec{I}_{BC} = \vec{p}_C - \vec{p}_B$ = (0 ; -52) kg m/s. En la figura anterior se muestra el diagrama vectorial con esta operación, y sobre la parte BC de la trayectoria se han dibujado varios vectores representativos de la fuerza resultante, supuesta constante, que apunta como $\vec{I}_{BC}$.

▲ Ejercicio 4.6

a) La condición inicial corresponde a un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, es decir, con resultante nula. La acción de la gravedad está siempre equilibrada por la reacción de la superficie, y ninguno de ambos contribuye a la resultante. Para el movimiento sólo deberemos considerar las fuerzas horizontales actuantes.
En este plano horizontal podemos describir el movimiento con dos ejes cartesianos, (x, y). Arbitrariamente ubicamos el eje x en la dirección del movimiento inicial, de manera tal que en t_0 el móvil pase por el origen.
A partir de ese instante, durante 5 segundos la trayectoria se curvará bajo la acción de una fuerza resultante no nula (siempre en el plano horizontal x,y), que deberemos determinar, y luego continuará con un movimiento rectilíneo, en una dirección paralela al eje y. Tanto la etapa inicial (antes de t_0), como la final (después de t_1), serán recorridas sin la acción de fuerza resultante (que será nula).



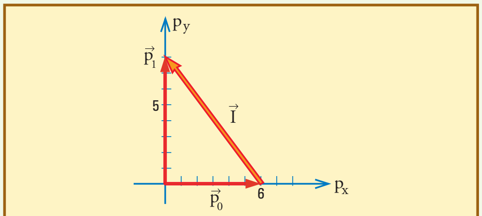


Diagrama vertical

b) La cantidad de movimiento inicial es: p_0 = (6 kg m/s ; 0 kg m/s), y la final, $\vec{p}_1$= (0 kgm/s ; 8 kgm/s), con lo cual, aplicando la Ley del Impulso, el impulso aplicado resulta: $\vec{I} = \vec{p}_1 = \vec{p}_0$ (6 Ns ; 8 Ns).
Dividiendo el impulso por el tiempo que dura la aplicación de la fuerza, se obtiene $\vec{F}$ = (-1,2 N ; 1,6 N).
El módulo de esta fuerza es $(1{,}2^2 + 1{,}6^2)^{½}$ = 2 N.

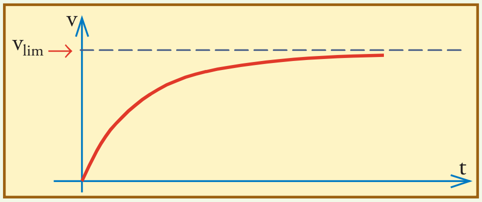
▲ Ejercicio 4.7

a) Considerando que el camino es horizontal, tendremos que las fuerzas verticales estarán equilibradas (el peso se equilibra con la reacción del piso), y por lo tanto, la resultante será horizontal, y tendrá un módulo igual a la diferencia entre el módulo de la fuerza impulsora, y el de la fuerza resistente del aire:

$$F_R = F_I - F_a = 800\ \text{N} - c\ S\ v^2$$

De manera que inicialmente (v = 0), la fuerza resultante vale 800 N, y su valor va disminuyendo a medida que aumenta v, ya que eso hace aumentar F_a.
En cada intervalo de tiempo esta fuerza aplica un impulso $F_R\ \Delta t$ que hace aumentar la cantidad de movimiento, y con ello la velocidad. Pero a medida que la velocidad aumenta tenemos que F_R se hace más pequeño, y con eso también se hace cada vez más pequeño el aumento que sufre la velocidad en Δt.
De manera que la situación es que: la velocidad siempre aumenta porque la resultante siempre es hacia adelante (mientras F_a no llegue al valor 800 N), pero cada vez aumenta menos en el mismo tiempo, como

lo sugiere la siguiente gráfica.



Podemos prever que a medida que F_a se acerca mucho al valor de F_I, la diferencia entre ambas, que es el módulo de la fuerza resultante, se hace tan pequeña que tiende a desaparecer, y la velocidad, aunque siempre aumenta, lo hace tan lentamente que se requiere un tiempo cada vez más largo para poder detectar un mínimo aumento.
Tenemos así que la velocidad crece siempre, pero lo hace sin llegar nunca a un valor límite que no puede alcanzar. Este valor límite es el valor $v_{lím}$ tal que si se lo alcanzara, la resistencia del aire tendría el mismo valor de la fuerza motriz, anulándose la fuerza resultante (con lo cual ya no podría haber aumento (ni disminución) de la velocidad).
Es decir, el valor límite de la velocidad es el que se da cuando $F_I = F_a$:
$F_a = c\ S\ v_{lím}^2 = 800$ N

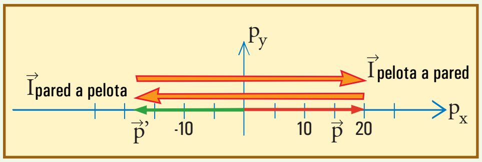
Con lo cual: $v_{lím} = \sqrt{\dfrac{800\,N}{0{,}3\dfrac{N\cdot s^2}{m^4}\,2\,m^2}} = 36{,}5$ m/s

b) Algunas de estas preguntas ya han sido contestadas; pero veamos ahora más detalles.
La velocidad final **aumenta** con la fuerza aplicada, pero **no es directamente proporcional** a ella, ya que la denominación directamente proporcional se reserva para una forma específica de aumentar, que no es la que corresponde aquí.
Diríamos que la relación entre fuerza aplicada y velocidad final es "directamente proporcional", si el cociente $\frac{v_{lim}}{F_I}$ se mantuviese constante para cualquier valor de F_I. Esta condición a veces se enuncia diciendo: "si con doble fuerza se consigue doble velocidad". También es mejor decir, "si v_{lim} y F_I varían en la misma proporción" (no importa si es doble, triple, o cualquier factor).
Para este caso eso no se cumple (para convencerse probar por ejemplo con F_I = 1.600 N, se obtendrá $v_{lím}$ = 51,6 m/s, que no es el doble de 36,5 m/s).
En este caso podemos decir que *el cuadrado de la velocidad* es proporcional a la fuerza, ya que (suprimiendo subíndices) $\frac{v^2}{F} = \frac{1}{c\,S}$ constante independiente de F.
También podríamos decir, extrayendo la raíz cuadrada de la expresión anterior, que v es proporcional a la raíz cuadrada de F.

Pero lo importante es no confundir cualquier relación "creciente", denominación que se aplica a los casos en que la variable dependiente aumenta cuando lo hace la independiente, con la relación directamente proporcional, que es un caso particular de las funciones crecientes.
En cuanto a si el automóvil se detendrá cuando la fuerza de rozamiento del aire alcance los 800 N que es el valor de la fuerza impulsora, ya hemos dicho que no: esa es la situación límite, final, a la cual tiende el proceso de aumentar la velocidad. Si se la alcanza, a partir de allí la velocidad no variará más. Es decir que no se detendrá ni comenzará a detenerse, sino que, por el contrario, se habrá alcanzado la situación de velocidad máxima posible, que se va a mantener de allí en adelante.
Esa es precisamente la situación de velocidad final constante, que se alcanza cuando se equilibran las fuerzas.

▲ Ejercicio 4.8

a) Si ubicamos el eje x en la dirección inicial de marcha de la pelota, entonces tendremos (utilizamos primas para indicar después del choque):
$\vec{v}$ = (10 m/s ; 0 m/s) $\rightarrow$ $\vec{p}$ = (20 kg m/s ; 0 kg m/s)
$\vec{v}'$ = (-9 m/s ; 0 m/s) $\rightarrow$ $\vec{p}'$ = (-18 kg m/s ; 0 kg m/s)
Para obtener el impulso aplicado a la pelota por fuerzas exteriores, aplicamos la Ley del Impulso:
$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = \vec{p}' - \vec{p}$ = (-18 ; 0) – (20 ; 0)
$\vec{I}_{\text{pared a pelota}}$ = (-38 kg m/s ; 0 kg m/s)
(Notar que al *restar vectores opuestos*, se suman los módulos para obtener el módulo del resultado).
Dado que, por Acción y Reacción, mientras hubo contacto, la fuerza que aplicó la pared a la pelota fue exactamente opuesta a la que aplicó la pelota a la pared, tenemos que la pelota aplicó a la pared un impulso exactamente opuesto al que acabamos de calcular:
$\vec{I}_{\text{pelota a pared}} = -\vec{I}_{\text{pared a pelota}}$ = (38 kg m/s ; 0 kg m/s)



Es decir, revisemos el procedimiento: en la Ley del Impulso aplicada a un móvil, siempre interviene el impulso que las fuerzas exteriores le aplican al móvil (en este caso pared a pelota). Luego obtenemos lo que tiene que ver con la acción del móvil sobre el exterior simplemente cambiando el signo a los vectores fuerza o impulso, es decir construyendo los vectores opuestos a los que se obtienen de la aplicación directa de la ley.

b) Los datos propuestos con la nueva pelota más blanda nos permiten decir que antes y después del choque tenemos los mismos vectores cantidad de movimiento que en a), de manera que, aplicando una ley que es fundamental, y por lo tanto, incuestionable, obtendremos el *mismo impulso*.

Ahora bien, si la pelota es más blanda, se aplastará una distancia mayor durante el choque, demorando más tiempo en hacerlo, y luego en rebotar recuperando su forma inicial. De la fórmula $F = I / \Delta t$, obtenemos que, dado que el impulso es el mismo, la fuerza actuante debe ser *menor*.

▲ Ejercicio 4.9

Utilizamos primas para indicar *después* del choque:

$\vec{v} = (-10 \cos 35^\circ \ ; \ 10 \text{ sen } 35^\circ) = (-8{,}2 \text{ m/s} \ ; \ 5{,}7 \text{ m/s})$

$\rightarrow \vec{p} = (-4{,}10 \text{ kg m/s} \ ; \ 2{,}85 \text{ kg m/s})$

$\vec{v}\,' = (10 \cos 35^\circ \ ; \ 10 \text{ sen } 35^\circ) = (8{,}2 \text{ m/s} \ ; \ 5{,}7 \text{ m/s})$

$\rightarrow \vec{p} = (4{,}10 \text{ kg m/s} \ ; \ 2{,}85 \text{ kg m/s})$

$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = \vec{p} - \vec{p}\,' = (4{,}10 \ ; \ 2{,}85) - (-4{,}10 \ ; \ 2{,}85)$

$\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (8{,}2 \text{ kg m/s} \ ; \ 0 \text{ kg m/s})$

$\vec{I}_{\text{pelota a pared}} = -\vec{I}_{\text{pared a pelota}} = (-8{,}2 \text{ kg m/s} \ ; \ 0 \text{ kg m/s})$

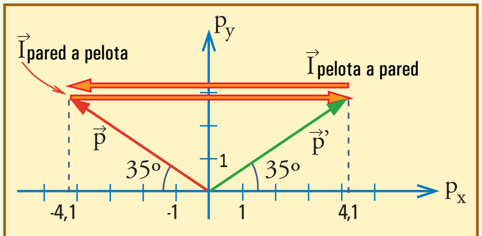
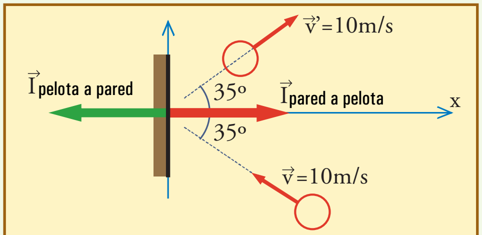


Diagrama de impulsos y cantidades de movimientos



Esquema de la situación, sin escala.

▲ Ejercicio 4.10

La opción correcta es b). Revisemos las ideas.

El movimiento es relativo, y las filmaciones toman como sistema de referencia fijo al satélite. Con respecto a este sistema, claramente la Tierra se mueve, pero este movimiento no es de ninguna manera absoluto, ya que filmado desde la Tierra se vería pasar el satélite contra un paisaje terrestre que estaría fijo, y filmados desde la Luna, se vería en movimiento a ambos. Esto ya ha sido discutido en el texto y no necesita más comentarios.

Veamos lo de la ingravidez. Las filmaciones muestran que todos los cuerpos en el interior del satélite pueden permanecer en reposo (o al menos aproximadamente en reposo) en cualquier lugar en el que se los deje, sin necesidad de que algo o alguien los sostenga. Es decir, lo que llama la atención en este ambiente, esencialmente, es que los cuerpos no tienden a caer. No hay que sostenerlos para que se queden en cualquier lugar o posición.

O sea, es como si no hubiese gravedad. Y parece una prueba bastante concluyente.

Pero ya sabemos (ver texto en Capítulo 3, o resolución del Ejercicio 5.12) que a esa distancia de la Tierra sí debe haber gravedad (y bastante intensa), y eso nos obliga a revisar estas ideas.

Cuando un observador parado sobre el suelo ve caer un objeto, tenemos que el objeto está sometido a la acción de la gravedad, mientras que sobre el observador actúa además, la reacción del piso. Si no hubiese piso, el observador caería con el mismo movimiento del objeto, y no lo vería caer.

Ésta es la situación en la órbita: todos los cuerpos, nave, objetos y tripulantes, están sometidos únicamente a la acción de la gravedad. No hay ninguna fuerza que contrarreste o modifique esta situación (obviamente los motores de la nave no actúan mientras ésta permanece en órbita; en el mismo instante en que el motor aplicara un impulso sobre la nave, si lo hiciese, desaparecería la aparente ingravidez). Así es que todos los objetos en órbita junto con la nave están animados del mismo movimiento, con la misma velocidad, siguen la misma trayectoria, y cualquier filmación los muestra flotando en reposo, como si no hubiera gravedad (para más detalles consultar la resolución del Ejercicio 5.12).

La situación es totalmente equivalente a la de una caída libre. Imaginemos un grupo de científicos haciendo experimentos dentro de una cápsula que se deja caer libremente a lo largo de una gran distancia sin que aire ni nada que la frene, tal que se tienen varios minutos de caída absolutamente libre, y luego un sistema de frenado suave evita daños y catástrofes. En esta situación, mientras dure la caída libre, todos los cuerpos en el interior de la cápsula parecerán flotar, ya que, aunque estarán cayendo libremente, los observadores y el piso también lo harán exactamente de la misma manera.

Una filmación mostraría que todos flotan dentro de la cápsula, mientras que los objetos del exterior se mueven vertiginosamente hacia arriba!, y eso no habría probado, ni que la Tierra está subiendo, ni que se está en un lugar sin gravedad.

Una experiencia sencilla que cualquiera puede hacer para enriquecer estas ideas:

Perforemos una botella plástica en la pared lateral, cerca del fondo con un clavo caliente.

Llenemos la botella con agua, manteniendo tapado el orificio con un dedo.

Manteniendo la botella aproximadamente vertical (y sin colocarle tapa), destapemos el orificio permitiendo que brote un chorrito de agua. La velocidad con que brota el agua depende de la altura de agua por encima de él, y es una manifestación de la presión que se produce dentro de la botella por efecto del peso del agua, es decir, es una manifestación del campo gravitatorio.

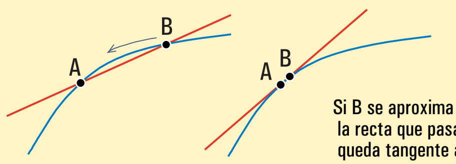
Enseguida soltemos la botella (que no se termine el agua). Veremos que, mientras dura la caída, el agua no sale por el orificio! Ha desaparecido la presión interior, como si hubiera des-aparecido la gravedad. Pero no ha desaparecido, sino que, simplemente, la botella ya no sostiene al agua: cae con ella.

Lo mismo ocurre si lanzamos la botella hacia arriba: tanto durante la subida como durante la bajada, parecerá haber desaparecido la gravedad, y el agua no saldrá por el orificio.

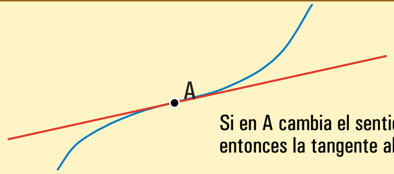
Comentario al ejercicio sobre las tangentes.

Una recta que toca a una curva en un solo punto bien puede ser secante y no tangente, de manera que la primera definición es incorrecta, y conceptualmente muy pobre. El verbo "tocar" puede sonar como una especie de sugerencia de aproximación suave, pero formalmente sólo significa que tienen un punto en común (ya sea cortando o no).

La segunda definición muestra una intención de plantear conceptos más adecuados, pero no lo logra, porque sería válida sólo para ciertas curvas: fallaría en los puntos de inflexión (donde cambia el sentido de la curvatura), y también en los casos en que en el punto de tangencia la curva tuviese un segmento (pequeño o no) rectilíneo.



Si B se aproxima infinitamente a A, la recta que pasa por ambos queda tangente a la curva en A



Si en A cambia el sentido de la curvatura, entonces la tangente allí corta a la curva.

El procedimiento formal para definir la tangencia a una curva en un punto A, consiste en tomar una secante que pase por A y por B, e ir aproximando gradualmente B hasta que esté infinitamente próximo a A. Pero la idea esencial *no es que al final quede un único punto de contacto* (aunque ello pueda ser cierto casi siempre en las situaciones típicas), sino que la dirección de la recta quede *definida por los puntos infinitamente próximos* al punto de tangencia.

La idea que necesitamos para nuestros razonamientos en Física es la de una recta que indique la dirección del movimiento en el instante considerado, y ello significa la recta que se confunde lo mejor posible con la curva en el punto o zona de tangencia. Es decir que lo importante no es el contacto en un único punto, sino que recta y curva compartan *lo más aproximadamente que sea posible* la región de tangencia.

Esto nos dice que las opciones (3) y (4) son correctas.

CAPÍTULO 5

▲ Ejercicio 5.1

a) Δx = área = ½ 2×10^{-3} s × 1000 m/s = 1 m.

b) $F_x = \Delta p_x / \Delta t$

$F_x = (0 - 0{,}020 \text{ kg} \times 1000 \text{ m/s}) / 2 \times 10^{-3} \text{ s}$

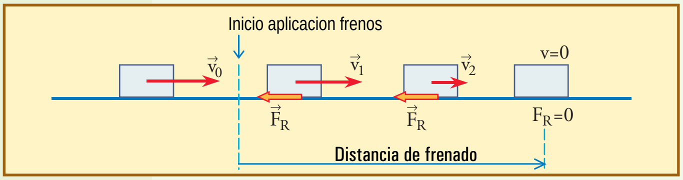
$F_x = -20 \text{ kgm/s} / 2 \times 10^{-3} \text{ s}$

$F_x = -10^4 \text{ N} \rightarrow F = 10^4 \text{ N}$

c) El impulso comunicado por el proyectil al blanco, por Acción y Reacción, es el vector opuesto al que corresponde al impulso aplicado al proyectil para frenarlo, y por lo tanto es igual a la cantidad de movimiento inicial del proyectil: vector en la dirección inicial de avance, de módulo 20 kgm/s.

▲ Ejercicio 5.2

a) No se dibujan las fuerzas verticales, peso y reacción normal del piso, porque están siempre equilibradas y no intervienen directamente en el problema (intervendrían para determinar el valor posible de la fuerza de frenado (rozamiento piso-neumático), si fuera necesario, pero ésta es dato).



b) Este es un movimiento bajo una fuerza constante, es decir, uniformemente variado. Podemos aplicar d = v_m Δt.

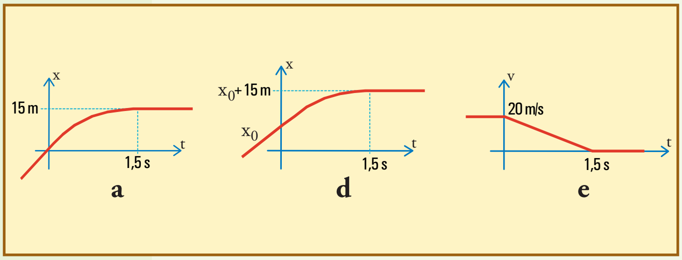
La velocidad media para este movimiento es el promedio entre la inicial, v_0 = 72 km/h = 20 m/s, y la final, cero. Es decir, v_m = 10 m/s.

El tiempo que dura el frenado puede obtenerse de la Ley del Impulso: Δt = m v_0 / F = 900×20/12.000 = 1,50 s.

De manera que resulta d = 10 × 1,5 = 15 m.

También se podría haber aplicado d = v^2 / (2 a), con a = F / m = 12.000 / 900 = 13,33 m/s^2.

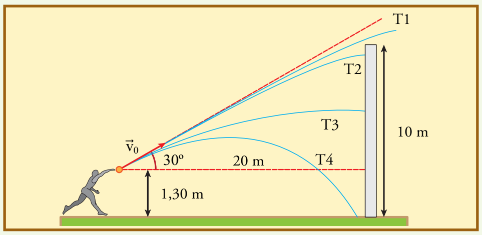
c) Los correctos podrían ser:



En los tres gráficos t = 0 es el instante en que comienzan a aplicarse los frenos. En (d) los frenos comienzan a aplicarse en cualquier lugar x_0, mientras que en (a) se ubica el origen, x = 0, en ese lugar.

▲ Ejercicio 5.3

a) No se piden dibujos, pero haremos un esquema porque siempre es necesario para ordenar las ideas. En el siguiente esquema se muestran las trayectorias posibles del proyectil: T1 pasa por encima del muro sin tocarlo, T2 choca con el muro aún subiendo, T3 choca bajando, es decir después de pasar por el punto más alto, y T4 no llega al muro porque choca antes con el piso. Aún no sabemos cuál corresponderá a este caso.



Sabemos que éste es un caso en el cual tenemos movimiento horizontal uniforme, y movimiento vertical uniformemente variado con aceleración igual a g (hacia abajo).

Esto significa que conviene calcular las componentes de la velocidad inicial en las direcciones horizontal (x) y vertical (y), y trabajar con ellas para cada movimiento.

Calculemos $\vec{v}_0$, que es la velocidad final del proceso de impulsar la piedra, y a la vez velocidad inicial de la trayectoria libre hacia el muro. Dado que antes de ser impulsada la piedra está en reposo, el impulso que se le da, 4 N·s en la dirección indicada, es igual a la cantidad de movimiento $\vec{p}_0$ que adquiere, y por lo tanto, el módulo de la velocidad con la que abandona la mano es: v_0 = 4 N·s / 0,2 kg = 20 m/s.

De manera que v_{0x} = 20 cos 30˚ ≅ 17,3 m/s

v_{0y} = 20 sen 30˚ ≅ 10 m/s.

Ahora, sabiendo que el movimiento en x es uniforme, podemos calcular el tiempo que demora la piedra en llegar al muro, Δt = 20 / 17,3 ≅ 1,16 s, para luego calcular qué ha ocurrido en ese tiempo respecto del eje y.

Sabemos que en el eje y el movimiento será de subida y bajada. Tomamos t = 0 en el instante de la partida, y el valor y = 0 en el piso, de manera que la altura en el momento de llegar al muro será:

y_{muro} = 1,30 + v_{0y} t – ½ g t^2

y_{muro} = 1,3 + 10×1,16 – 9,8 × $1{,}16^2$ / 2 ≅ 6,3 m

Este resultado nos indica que la trayectoria fue T2 o T3.

b) Para saber cómo es el choque, y poder decir algo de la fuerza o el impulso que se aplica en él, debemos calcular el vector velocidad o el vector cantidad de movimiento del proyectil en el instante previo al impacto (t = 1,16 s).

Sabemos que la velocidad en x se mantiene constante, siempre igual a v_{0x}, es decir a 17,3 m/s. En el eje y, en cambio, por acción de la gravedad,

v_y = v_{0y} – g t

v_y = 10 – 9,8×1,16 ≅ -1,37 m/s (el signo negativo nos indica que estamos en la trayectoria T3).

De manera que el choque ocurre con

$\vec{v}$ ≅ (17,3 m/s ; -1,4 m/s), o, multiplicando por m,

$\vec{p}$ ≅ (3,46 kg m/s ; -0,27 kg m/s).

Ahora bien, en general hay formas bastantes típicas de rebotar: el rebote tiende a ser bastante simétrico con respecto a la normal a la superficie (del muro en este caso), y con pérdida de alguna fracción del módulo de la velocidad, mayor o menor según los materiales constituyentes de los cuerpos que chocan. En función de la cantidad de movimiento inmediatamente después de rebotar, $\vec{p}$, podremos aplicar la Ley del Impulso para obtener $\vec{I} = \vec{p}' - \vec{p}$. Esto sirve tanto para determinar el impulso aplicado por el muro a la piedra, como el aplicado por la piedra al muro (ya que sólo hay que cambiarle signos).

Ahora bien, al tratar de hacer la resta $\vec{p}' - \vec{p}$, nos encontramos que:

• La componente perpendicular a la pared (p_x en este caso), cambia de signo (porque el cuerpo ha rebotado), de manera que la resta se transforma en una suma: $|p'_x - p_x| = |p'_x| + |p_x|$. Dado que p'_x puede valer cero si no hay rebote, o llegar a ser, en valor absoluto, igual que p_x, tendremos que I_x, en valor absoluto puede ir desde p_x, hasta 2 p_x (para nuestro ejemplo, desde 3,46 hasta casi 7 kg m/s).

• La componente paralela a la pared, por otra parte, no cambia de signo, ya que si el cuerpo incide desde un lado de la normal a la superficie, rebota hacia el otro lado de la normal, es decir, conservando el signo de esta componente paralela. En consecuencia la diferencia p'_y - p_y es una resta de cantidades parecidas, que siempre da un valor pequeño para I_y.

Es decir que aproximadamente, el impulso se puede determinar bastante bien, sin saber detalles exactos del choque. Para este caso, en una aproximación gruesa, $\vec{I} \cong$ (5 ó 6 kg m/s ; 0 kg m/s).

En cambio, hablar de la fuerza aplicada es más difícil, porque requiere que antes se conozca el impulso, y que además se sepa el tiempo que dura el contacto, ya que entonces F = I / Δt.

Todo esto se puede corroborar bastante revisando los ejercicios 4.8 y 4.9, en los que se puede calcular bien el impulso aplicado, que cumple con todo lo dicho aquí, pero queda claro que para iguales formas de rebotar actuará siempre el mismo impulso, con fuerzas más grandes si los cuerpos son más duros, y viceversa.

▲ Ejercicio 5.4

a) La gráfica dice que inicialmente el cuerpo viaja hacia arriba con la máxima velocidad (≅20 m/s), la cual va disminuyendo. A los 2 segundos deja de subir: se detiene por un instante, y luego la velocidad se hace negativa, es decir, el cuerpo comienza a descender, con una velocidad que crece negativamente hasta t = 4 s. Es claro que estamos describiendo un cuerpo lanzado hacia arriba, que llega al punto más alto en 2 s, y cae, llegando al suelo presumiblemente en t = 4 s. Si además calculamos la aceleración resulta $\Delta v / \Delta t \cong -10$ m/s^2, valor muy cercano a g, que corresponde perfectamente con la opción 2.

b) La fuerza neta actuante sobre el móvil, ha sido constante, ya que ha producido una variación uniforme en la velocidad, y orientada hacia abajo, porque la pendiente de la gráfica es negativa (y por todo lo dicho antes).

▲ Ejercicio 5.5

a) Ya sabemos que estos vectores deben ubicarse tangencialmente en cada punto. Calculemos sus módulos.

En AB el movimiento es variado. La velocidad vale cero en A, y en B alcanza el valor v_B que mantendrá constante hasta D. Desde allí la velocidad disminuye hasta ser cero en E.

De manera que sólo faltaría calcular el valor v_B, que sería igual a v_C y a v_D. Pero sabemos que este valor también es igual a la velocidad media en BC, ya que en ese tramo el movimiento es uniforme.

Entonces: $v_B = \frac{30m}{t_C - t_B} = \frac{30m}{7{,}5s}$ = 4 m/s (aunque no se pregunta podemos verificar que en AB la velocidad media (40 m /Δt_{AB}) resulta la mitad de este valor, como corresponde al promedio entre v_A y v_B).

Ahora podemos expresar cada vector velocidad como par ordenado (ver Fig. A y B):

$\vec{v}_A = \vec{v}_E$ = (0 m/s ; 0 m/s) ; $\vec{v}_B = \vec{v}_C$ = (4 m/s ; 0 m/s); $\vec{v}_D$ = (0 m/s ; -4 m/s).

b) El tramo CD se recorre uniformemente en un lapso Δt = distancia / v. La distancia es la longitud del arco CD, d_{CD} = ½ π R = π × 30 m / 2 = 47,1 m, de manera que el tiempo demorado es:

Δt_{CD} = 47,1 / 4 = 11,8 s, y el instante en que llega el móvil a D es: t_D = 11,8 + 27,5 = 39,3 s.

Para el tramo DE el movimiento es uniformemente variado, por lo cual v_m = ½ ($v_D + v_E$) = 2 m/s, y Δt = distancia / v_m = 30 / 2 = 15 s.

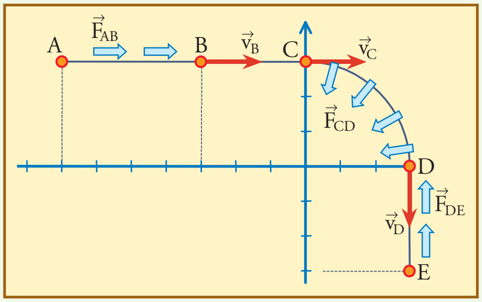
De manera que t_E = 39,3 + 15 = 54,3 s.

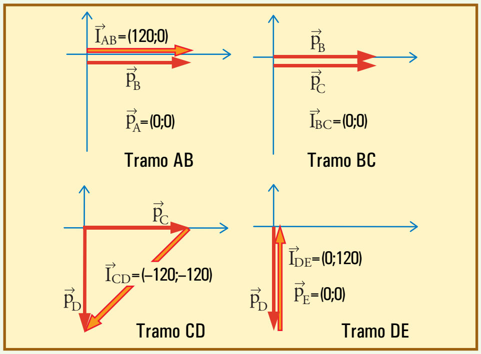
c) En el tramo AB debe haber una fuerza neta alineada con la trayectoria (tangencial), hacia adelante, para hacer que se inicie el movimiento y que aumente la velocidad. El módulo de esta fuerza, según la Ley del Impulso, debe valer m v_B / Δt = 30×4 / 20 = 6 N.

En el tramo BC la fuerza resultante debe ser nula, dado que el movimiento es rectilíneo y uniforme (no hay cambio en el vector $\vec{p}$).

En el tramo CD debe haber una fuerza resultante hacia la derecha para producir la desviación, y sin componente tangencial, para que el módulo de la velocidad se mantenga constante. Además el módulo de esta fuerza debe ser constante para que la curva sea uniforme (arco de circunferencia). Es decir, esta fuerza debe ser la centrípeta, de valor m v^2/R = 30×4^2/30 = 16 N.

En el tramo DE debe haber una fuerza neta alineada con la trayectoria (tangencial), hacia atrás, para producir el frenado. El módulo de esta fuerza, según la Ley del Impulso, debe valer m v_D / Δt = 30×4 / 15 = 8 N.



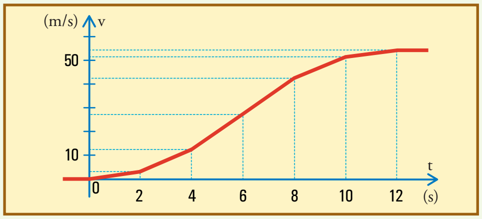


Vemos cómo todos los impulsos obtenidos, representados con flechas huecas, se relacionan directamente con las fuerzas halladas en c).

▲ Ejercicio 5.6

a) El impulso aplicado por F en los 12 segundos mostrados vale tanto como el área de la gráfica:
I(0 →12s) = (½) 9.000N × 12 s = 54.000 N·s
Como el móvil parte del reposo, y ésta es la fuerza resultante, éste debe ser también el valor de la cantidad de movimiento del móvil al final del intervalo, de manera que la velocidad debe ser:
v = 54.000 N·s/ 1.000 kg = 54 m/s
b) Éste es un movimiento rectilíneo con velocidad siempre creciente en los primeros 12 s, aunque la fuerza disminuya después de t=6s, ya que siempre actúa en el mismo sentido que es el del movimiento. Atención porque es muy fácil confundirse: una cosa es que disminuya la fuerza que se aplica, y otra es lo que sucede con la velocidad!
La velocidad aumenta más rápidamente cerca de t=6s, que es donde la fuerza es mayor. Luego sigue aumentando pero más lentamente, hasta que en t=12s el movimiento (siempre rectilíneo) se hace uniforme, manteniendo el valor de la velocidad final adquirida, ya que desaparece la fuerza. La gráfica correspondiente a estas afirmaciones es la que se muestra al final.
c) El método seguido en (a) para calcular la velocidad final, puede aplicarse, con un poco de paciencia, para calcular la velocidad en cualquier instante. Por ejemplo, podemos calcular la velocidad cada 2 s, y obtenemos los valores que se muestran en la siguiente tabla, y graficados a continuación.

Intervalo (s)	Área (kg m / s)	Δv (m / s)	v_{final} (m /s)
0 → 2	3.000	3	3
2 → 4	9.000	9	12
4 → 6	15.000	15	27
6 → 8	15.000	15	42
8 → 10	9.000	9	51
10 → 12	3.000	3	54
12 → t > 12	0	0	54



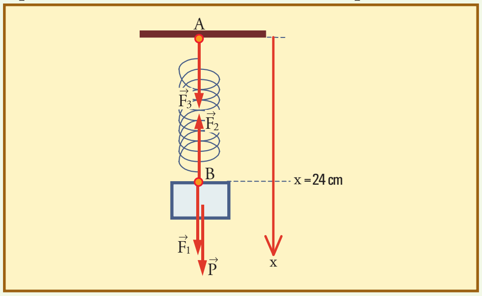
Nótese que si bien no hemos podido expresar la velocidad como una función del tiempo, siempre podemos calcular su valor en cualquier instante.

▲ Ejercicio 5.7

a) Dibujamos cuatro vectores verticales, todos del mismo módulo, igual a:
fuerza elástica = k × (0,24 m – 0,15 m) = 36 N
Estos vectores son: $\vec{F}_2$, hacia arriba, es la fuerza elástica que aplica el resorte en B, como reacción frente a $\vec{F}_1$, con la cual el cuerpo tira de él hacia abajo en (también en B). Por otra parte, $\vec{P}$ es la fuerza del campo gravitatorio aplicada hacia abajo en el centro del cuerpo, y $\vec{F}_3$ es la fuerza elástica tirando hacia abajo del extremo A del resorte.

La forma correcta de decidir el valor de los módulos es: F_3 = F_2 = 36 N, por la ley de Hooke. F_1 = F_2

porque son un par acción-reacción, y P = F_2 por el equilibrio de las acciones sobre el cuerpo.



b) La masa del cuerpo es m = P / g = 36 / 9,8 = 3,67 kg.

c) La respuesta correcta es la c3), dado que la posición de equilibrio, x = 24 cm, tiene que ser el punto medio de la oscilación.

Si queremos elaborar un poco más la explicación, podemos decir que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo $\vec{F}_2 + \vec{P}$ (en la figura anterior, cuyo módulo vale $F_2 - P$), es una fuerza que actúa hacia arriba desde que soltamos al cuerpo en x = 30 cm, hasta que el cuerpo llega a la posición de equilibrio, x = 24 cm. Así tenemos que a lo largo de 6 cm ha actuado una fuerza *neta* hacia arriba impulsando al cuerpo. Aunque esta fuerza ha ido disminuyendo, siempre ha actuado hacia delante, porque $F_2 > P$, de manera que la velocidad ha aumentado hasta ese punto. Y en ese instante en que se anula la fuerza neta (justo F_2 = P en x = 24 cm), el cuerpo está con su máxima velocidad. Claramente no puede detenerse allí. Seguirá avanzando hacia arriba en contra de la fuerza neta que comenzará a actuar hacia abajo (F_2 será menor que el peso mientras x sea menor que 24 cm), y por lo que sabemos de estas oscilaciones, el cuerpo avanzará 6 cm más, después de la posición de equilibrio, es decir hasta x = 18 cm.

▲ Ejercicio 5.8

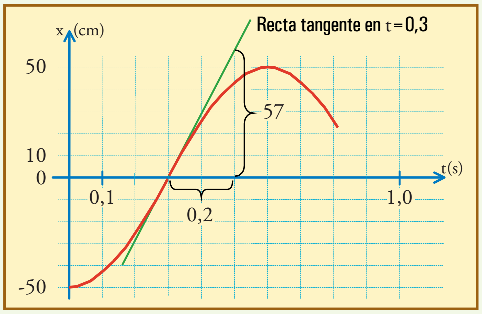
a) En la gráfica podemos observar directamente que hay medio período desde t = 0 hasta t = 0,6, de manera que T = 1,20 s, y f = 1/T ≅ 0,83 1/s (0,83 ciclos/s).

b) En t = 0,2 leemos x_1 = -25 cm, y en t = 0,3 leemos x_2 = 0,0 cm → Δx = 25 cm → v_m = Δx/Δt

v_m = 250 cm/s

v_m = 2,5 m/s.

c) Para esto trazamos la tangente en t = 0,3 s, que es el punto de máxima pendiente, y determinamos su pendiente.



Vemos que los valores que pueden leerse son: Δx/Δt = 57 cm / 0,2 s = 285 cm/s = 2,85 m/s. Éste debe ser el valor de la velocidad instantánea máxima, que corresponde al instante t = 0,3 s (y también a cualquier instante en el que el móvil pase por la posición de equilibrio). Vemos que hemos obtenido un valor un poco superior al de la velocidad media en la décima de segundo anterior (entre t = 0,2 y 0,3), lo cual es muy razonable.

Comparemos con el valor dado por la expresión teórica: ω × amplitud = 2 π f × 50 cm ≅ 262 cm/s.

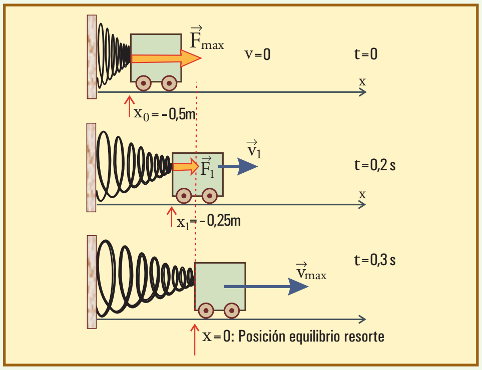
Vemos que hemos trazado la tangente con la inclinación un poquito exagerada, pero está dentro de lo razonable (10% de diferencia).

d) La fuerza aplicada por el resorte está dada por F_x = -k x. En t = 0,2 s tenemos F_{1x} = -20 ×(-0,25) = 5 N (signo más porque es en sentido positivo).

En t = 0,3 s, tenemos x_2 = 0, con lo cual F_2 = 0.

e) Para t = 0,2 s, tenemos x_1 = -0,25 m, y v_x positiva. Dado que acabamos de calcular que F_{1x} (correspondiente a ese instante) es positiva, eso significa que la fuerza está haciendo aumentar la velocidad → opción III. Esto está de acuerdo con el hecho de que una décima de segundo después la velocidad ha aumentado, llegando a su valor máximo.

Para t = 0,3 s, tenemos fuerza nula, como acabamos de ver → opción II. Aunque no se pida, siempre es útil ver estas cosas en un esquema:



▲ **Ejercicio 5.9**

a) Según la gráfica el período es T = 0,60 s. Con este valor, sabiendo la constante elástica del resorte, aplicamos $\omega^2 = k / m$, para despejar

$m = k / \omega^2 = k\,T^2 / 4\,\pi^2 \cong 0{,}182$ kg.

b) Algo fácil es definir instante inicial al que corresponde al primer máximo: $t_0 = 0{,}20$ s; $x_0 = 3$ cm; $v_0 = 0$ m/s.

Otra posibilidad un poco más complicada es:

$t_0 = 0$ s; $x_0 \cong -1{,}6$ cm; v_0 = valor positivo que habría que calcular a partir de la pendiente de la gráfica en ese lugar (se obtiene aproximadamente 27 cm/s).

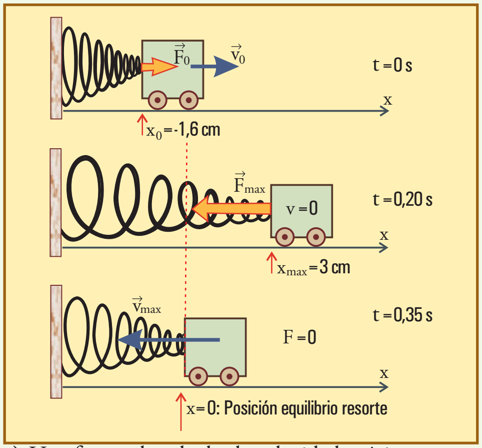
c) Los instantes de fuerza neta nula son los que corresponden a los pasajes por la posición de equilibrio, x = 0, es decir: t = 0,05 s, 0,35 s, 0,65 s, etc.

Los instantes de fuerza neta máxima son los que corresponden a los pasajes por las máximas elongaciones, es decir: t = 0,20 s, 0,50 s, 0,80 s, etc.

Los instantes de velocidad máxima son los de máxima pendiente en la gráfica, es decir los que corresponden a los pasajes por la posición de equilibrio, x = 0, es decir: t = 0,05 s, 0,35 s, 0,65 s, etc.

Los instantes donde el cuerpo se detiene son los pendiente nula en la gráfica, es decir los de máxima elongación: t = 0,20 s, 0,50 s, 0,80 s, etc.

d)



e) Una forma de calcular la velocidad máxima es por medio de la pendiente de la gráfica (ver ejercicio anterior). Se obtiene aproximadamente un valor de 32 cm/s.

Otra forma es aplicando

$v_{máx} = \omega\, x_{máx} = (2\,\pi / 0{,}60\text{ s}) \times 3\text{ cm} = 31{,}4$ cm/s.

Vemos que hay una excelente coincidencia.

f) Entre 0,05 s y 0,35 s. Esto es entre dos pasajes sucesivos por la posición de equilibrio, o sea, con la velocidad máxima, primero positiva, y luego negativa.

Tenemos $p_x(0{,}05) = 0{,}182$ kg 31,4 cm/s = 0,0572 kg m/s, y $p_x(0{,}35) = -0{,}0572$ kg m/s.

Entonces $I_x = -0{,}0572$ kg m/s - 0,0572 kg m/s = -0,115 N·s.

Entre 0,35 s y 0,50 s. Esto es entre un pasaje por la posición de equilibrio, y la subsiguiente detención en la máxima elongación.

Tenemos $p_x(0{,}35) = -0{,}0572$ kg m/s, y $p_x(0{,}50) = 0$

Entonces $I_x = 0 - -0{,}0572$ kg m/s = +0,0572 N·s.

Entre 0,50 y 0,80 s. Son dos instantes de velocidad nula, por lo tanto $I_x = 0$ para este intervalo (hay un impulso positivo para llevar el móvil a la máxima velocidad, y luego el mismo negativo para frenarlo: el impulso total en el intervalo resulta nulo, aunque haya habido un cambio neto de posición).

Para la fuerza media desde una posición de equilibrio hasta volver a ella, consideramos el intervalo desde 0,05 s hasta 0,35 s (en valor absoluto):

$F_m = I / \Delta t = 0{,}115 / 0{,}3 = 0{,}383$ N.

El valor máximo es $F_{máx} = k\,x_{máx} = 20 \times 0{,}03 = 0{,}60$ N.

En este proceso la fuerza va desde 0 N hasta un valor máximo de 0,6 N y vuelve a 0 N. No esperamos que el valor medio sea el promedio entre 0 y 0,6 (que sería 0,3 N), porque en este movimiento la fuerza no varía uniformemente. El valor 0,383, resulta perfectamente esperable.

▲ **Ejercicio 5.10**

a) Sabemos que éste es un movimiento con aceleración constante en el eje vertical (y), de valor $a_y = -g = -9{,}8$ ms^2.

De manera que $y_{máx} = ½\, v_0^2 / g = 1.653$ m (consideramos la velocidad final igual a cero).

Sabiendo que la velocidad media es 180/2 = 90 m/s, el tiempo demorado es 1.653/90 = 18,4 s.

También puede calcularse el tiempo para que la velocidad llegue a cero, usando que varía linealmente: $v_0/g = 18{,}4$ s.

b) Si el proyectil es lanzado oblicuamente, consideramos el movimiento como superposición de: un movimiento uniforme en x, con velocidad $v = v_0 \cos 50°$, y un movimiento uniformemente variado en y, con velocidad inicial $v_{0y} = v_0$ sen 50° = 138 m/s.

Con este dato, hacemos los mismos cálculos del punto anterior: $y_{máx} = ½\, v_{0y}^2 / g = 970$ m.

Tiempo hasta altura máxima: $v_{0y}/g = 14{,}1$ s.

La velocidad en el punto más alto ahora ya no es cero, como lo era en a), porque aunque se anula vy, la velocidad conserva su componente x:

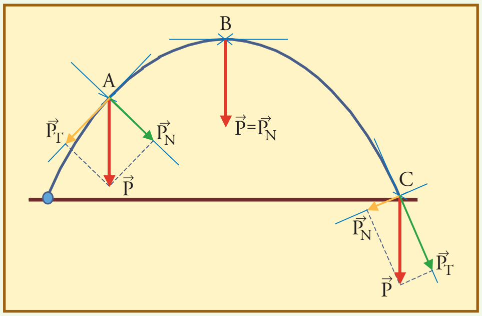
$v(y_{máx}) = v_{0x} = v_0 \cos 50° = 115{,}7$ m/s

▲ **Ejercicio 5.11**

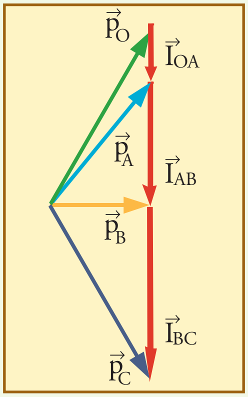
a) Para esto calculamos la componente y de v_0:

$v_{0y} = v_0$ sen 60° = 26 m/s. $\rightarrow h_B = ½\, v_{0y}^2 / g = 34{,}4$ m.

b) En todos los puntos tenemos $v_x = v_{0x}$ = 30 cos 60° = 15 m/s. En cuanto a v_y, aplicamos $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2\,g\,\Delta y$.
Para el punto A, Δy = 34,4 / 2 = 17,2 m $\rightarrow v_{Ay}$ = 18,4 m/s.
Para el punto B, $\rightarrow v_{By}$ = 0 m/s.
Para el punto C, $\Delta y = 0 \rightarrow v_{Cy} = - v_{0y}$ = – 26 m/s.
De manera que $\vec{V}_A$ = (15 m/s ; 18,4 m/s) ;
$\vec{V}_B$ = (15 m/s ; 0 m/s) ; $\vec{V}_C$ = (15 m/s ; –26 m/s) .
c) La fuerza resultante sobre la piedra es el peso, $\vec{P}$, que es un vector constante vertical hacia abajo. Podemos ver que la componente tangencial es hacia atrás antes de B, haciendo disminuir la velocidad a medida que el cuerpo se acerca al punto más alto, nula allí, y hacia delante en la bajada, después de B, haciendo aumentar la velocidad. La componente normal, en cambio, siempre hacia la derecha, curva la trayectoria continuamente hacia abajo.

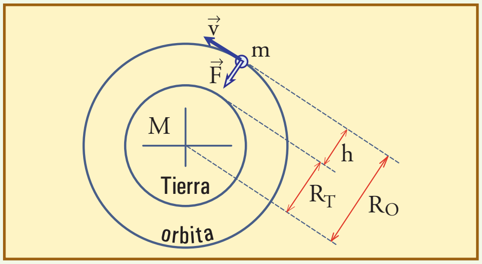


Ninguna de estas componentes es constante, y la curvatura tampoco lo es: la curva es una parábola, y no un arco de circunferencia.
e) Teniendo las velocidades, podemos calcular fácilmente las cantidades movimiento:
$\vec{p}_O$ = (30 m/s ; 52 m/s) ; $\vec{p}_A$ = (30 m/s ; 36,8 m/s)
$\vec{p}_B$ = (30 m/s ; 0 m/s); $\vec{p}_C$ = (30 m/s ; –52 m/s).



El diagrama muestra que el impulso en cualquier tramo es un vector vertical, porque la fuerza resultante, el peso, lo es. El módulo de cada impulso es proporcional a la duración del tramo. El tramo OA dura bastante menos que el AB, porque aunque $h_A = ½\, h_B$, la velocidad es mayor en OA que en AB.

▲ Ejercicio 5.12
a) Es importante entender que la *única fuerza actuante sobre el satélite* en este caso, es la gravitatoria, de módulo $F = G\,m\,M / R_O^2$, orientada hacia el centro de la Tierra.



Debemos considerar que el radio de la órbita es $R_O = R_T + h \cong$ 7.370 km.
b) Dado que la gravitatoria, por ser la única fuerza actuante en este MCU, debe ser la centrípeta, debemos plantear:

$$F = G\frac{M\,m}{R_O^2} = \frac{m v^2}{R_O}\ ,$$

de donde se obtiene: $v = \sqrt{\frac{G\,M}{R_O}} \cong$ 7.370 m/s
(vemos que m se simplifica, y todo lo que vamos a calcular *es independiente de la masa de los cuerpos en órbita*).
El período del movimiento es:
$T = 2\,\pi\,R_O / v \cong$ 6.284 s = $1^h\ 44^m\ 44^s$.
c) El campo gravitatorio a distancia R_O del centro de la Tierra está dado por:

$$g' = \frac{GM}{R_O^2} = g_{sup} \times \left(\frac{R_T}{R_O}\right)^2$$

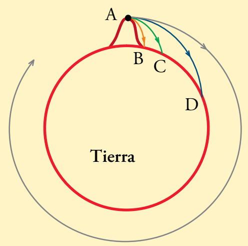
de lo que resulta: g' = 7,32 N/kg ≅ 75% de g_{sup}.
Es decir, vemos 1.000 km sobre la superficie no es un gran alejamiento del centro de la Tierra, y como consecuencia de ello el campo gravitatorio sólo se debilita un poco, y la situación en la órbita está muy lejos de la condición de ingravidez que se percibe tan claramente en fotos y películas sobre el tema.

¿Cómo se entiende esto?
La ingravidez es **aparente**. La apariencia de ingravidez resulta del hecho de que tanto el satélite como sus pasajeros y todo su contenido, están animados del **mismo movimiento**. Como vimos en la fórmula para la velocidad (y para el período), todos los cuerpos grandes y pequeños viajarían de la misma manera, en la misma órbita, a la misma velocidad, *independientemente de su masa*.
Al estar todos los cuerpos en **reposo relativo** unos

respecto de los otros (aquí tenemos un ejemplo de cómo la idea de movimiento depende del sistema de referencia), si uno de ellos filmase a los otros, ellos se verían en reposo en la filmación, y *parecería que flotan*.

Pero no flotan. Están una situación que, dinámicamente, equivale a la **caída libre** de cualquier proyectil en ausencia de perturbaciones: de no ser por la gravedad, que los desvía continuamente curvando sus trayectorias hacia la Tierra, estos cuerpos, al igual que un proyectil, viajarían en línea recta.

Dado que la Tierra es redonda, es posible concebir un tiro que se inicie horizontalmente desde suficiente altura (donde ya no haya aire ni obstáculos), con una velocidad tal que el proyectil nunca se acerque al suelo. Esa caída libre especial constituiría una órbita circular. En esta órbita debe suceder lo mismo que en cualquier caída libre: si alguien salta desde un sitio medianamente alto sosteniendo una piedra u otro objeto pesado similar, mientras permanece en caída libre no puede sentir el peso del objeto. Como cae con la misma velocidad que éste, lo ve mantenerse inmóvil. Pero eso no es por ausencia de gravedad, sino porque *la gravedad hace que ambos adquieran la misma velocidad*, y así mantengan un estado de *inmovilidad relativa*.



Desde un punto muy alto, A, se lanzan horizontalmente proyectiles. Los que se lanzan con menos velocidad caen más cerca (en B), y con mayor velocidad, cada vez más lejos, en C, D, etc.
Si la Tierra fuese plana, todos chocarían con su superficie; pero siendo esférica, es posible concebir una velocidad tal que el proyectil, siempre en caída libre, nunca llegue a su superficie: entra en órbita.

d) Esto parece complicado pero es muy sencillo. Si retomamos la expresión $F = G\dfrac{M\,m}{R_O^2} = \dfrac{m\,v^2}{R_O}$, y, en lugar de colocar valores

numéricos reemplazamos v en función del período, $v_1 = 2\,\pi\,R_O\,/\,T$, despejando queda: $\dfrac{T^2}{R_O^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$

Si el cociente entre dos variables se mantiene constante, esas variables son directamente proporcionales. En este caso T^2 es directamente proporcional a $R_O{}^3$, que es lo que dice la ley en cuestión.

La constante de proporcionalidad es $4\pi^2/GM$, sólo depende de la masa del astro central, que puede determinarse a partir de los datos correspondientes del cuerpo en órbita.

e) Cualquier habitante de otro planeta simplemente observando la Luna podría obtener los datos de la órbita, y sin conocer la masa de la Luna, podría obtener la masa de la Tierra despejando de esta ley:

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\,\frac{R_O^3}{T^2} \cong 6{,}03\times10^{24}\ \text{kg}$$

Vale saber que éste es el método que aplicamos para conocer la masa del Sol y de cualquier planeta o astro que tenga satélites en órbita a su alrededor.

Comentarios sobre las preguntas referidas al movimiento oscilatorio

a) Un cuerpo no tiene “fuerza de avance”. Eso no existe. Fuerza es lo que el resorte le aplica, en este caso tirando de él para frenarlo. Por Acción y Reacción el cuerpo tira del resorte hacia adelante con una fuerza de exactamente la misma intensidad en todo momento.

b) Una fuerza nunca puede igualar a una velocidad, ya que son cosas de diferente naturaleza y dimensión.

c) Vale el mismo comentario a).

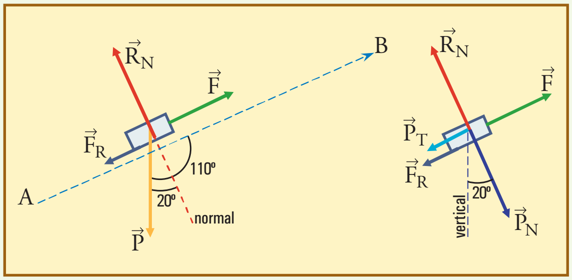
d) Obviamente hay que aplicar la Ley del Impulso: $m\,v_2 = m\,v_1 + I_{x(t1\rightarrow t2)}$ e igualar esta expresión a cero.

CAPÍTULO 6

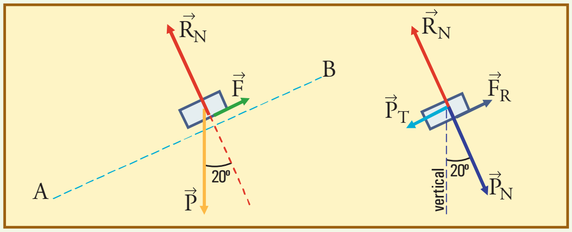
▲ Ejercicio 6.1

a) En la figura de la izquierda se muestran las fuerzas exteriores aplicadas sobre el cajón, que son: $\vec{F}$, la fuerza de 400 N con la que tira la cuerda en la dirección del plano; $\vec{P}$, el peso (acción del campo gravitatorio), de valor mg ≅ 784 N, vertical hacia abajo; $\vec{R}_N$, la parte normal de la reacción del plano, que debe valer tanto como Pcos20° ≅ 737 N, para equilibrar a P_N ; y $\vec{F}_R$, la acción del rozamiento, ejercida por el plano sobre el cajón, tangencialmente al plano (podemos decir que contituye la parte tangencial de la reacción del plano). Para averiguar el valor de $\vec{F}_R$ tenemos que plantear el equilibrio de las acciones tangenciales, y para que ello se vea más claramente hemos agregado la figura de la derecha, equivalente a la anterior, reemplazando en la misma al peso, por sus componentes P_N y P_T.

De manera que, según estos datos (velocidad constante que implica equilibrio de fuerzas tangenciales), observando la figura de la derecha deducimos fácilmente que $F = P_T + F_R$. Dado que
$P_T = P$ sen 20° ≅ 268 N, entonces F_R ≅ 132 N.



b) W_F = 400 N × 100 m = 40 ×10^3 J = 40 kJ
W_{RN} = 0 J (fuerza perpendicular al desplazamiento)
W_{FR} = - 132 N × 100 m = - 13,2 kJ
W_P = 784 N × 100 m × cos 110°
W_P = - 268 N × 100 m = - 26,8 kJ
$\sum W_i$ = 40.000 – 13.200 – 26.800 = 0 = ΔEc.
c) Si definimos cero la energía potencial en A: Ep_A = 0, entonces ΔEp = Ep_B = P y_B . Dado que y_B = 100 m × sen 20° = 34,2 m, resulta Ep_B = 784 N × 34,2 m = 26,8 kJ.
Con esto, E_{mA} = Ec_A + Ep_A = ½ 80 × $0{,}5^2$ + 0 = 10 J ; Em_B = Ec_B + Ep_B = 10 J + 26,8 kJ (vemos que la Ec es irrelevante aquí) ; ΔE_m = 26,8 kJ = W_F + W_{FR}
d) Lo que sucede al cortarse la cuerda, desde el punto de vista de las fuerzas, es que desaparece la fuerza F, de 400 N, que tiraba tangencialmente hacia arriba. Eso inmediatamente se traduce en que se invierte el sentido de la fuerza de rozamiento, ya que el cuerpo deja de subir y tiende a deslizarse hacia abajo (por acción de P_T). De manera que el diagrama de cuerpo aislado ahora muestra las siguientes fuerzas.



Dado que P_T supera al rozamiento (el rozamiento se invierte pero no aumenta de valor, y P_T no cambia), el cuerpo deslizará aceleradamente hacia la parte baja del plano. En todo el trayecto BA se harán los siguientes trabajos: W_{FR} = -132 N × 100 m = -13,2 kJ, y W_P = 268 N × 100 m = 26,8 kJ, de manera que ΔEc = $\sum W_i$ = 26,8 – 13,2 = 13,6 kJ. Dado que el cuerpo parte del reposo en B, éste es el valor de la energía cinética con que llega a A, y de allí que $v_A = \sqrt{2\,Ec/m} \cong$ 18,4 m/s.
e) Para que el cuerpo quede detenido al cortarse la cuerda, debe darse que, durante la subida, $F_R > P_T$. De este modo el cuerpo sube arrastrado por la cuerda que tira con F = P_T + F_R, pero al desaparecer $\vec{F}$, $\vec{F}_R$ se invierte, y $\vec{P}_T$ ahora no puede vencerla. Claro que ahora el equilibrio se alcanza con un nuevo valor de la fuerza de rozamiento, F_R' = P_T, menor que el que tenía en la subida.

▲ Ejercicio 6.2

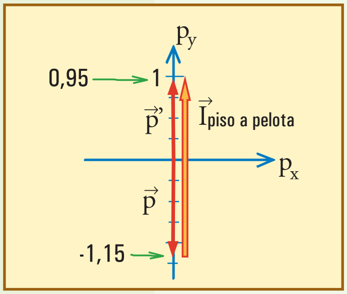
a) Sabemos que en este movimiento se conserva la v_x, por lo cual calculamos v_{0x} = 30 cos 60° = 15 m/s. En el punto más alto, B, tendremos v_B = 15 m/s, y Ec_B = 2×15^2/2 = 225 J.
Esto nos permite calcular la energía potencial y luego la altura en B, sin recurrir a las fórmulas del MRUV. Efectivamente, la energía cinética inicial es Ec_A = 2×30^2/2 = 900 J.
De manera que la conservación de la energía mecánica implica:
Ep_B – Ep_A = Ec_A – Ec_B
Ep_B – Ep_A = 900 – 225
Ep_B – Ep_A = 675 J
$Ep_B - Ep_A = m\,g\,(h_B - h_A) \rightarrow h_B - h_A = 675/(2{\times}9{,}8) = 34{,}4$ m.
Ésta es la altura de B con respecto a A, y si tomamos h_A = 0, entonces h_B = 34,4 m.

b) Con esta elección la energía total inicial vale lo mismo que la cinética allí, 900 J, y la potencial en B es la que ya ha sido calculada: Ep_B = 675 J.
En C tendremos un valor negativo:
Ep_C = 2 × 9,8 × (-50) = – 980 J.
La conservación planteada en C es:
Ec_C + (-980 J) = 900 J, de donde se deduce que Ec_C = 1.880 J, y v_C = (2×1.880/2)^{½} = 43,3 m/s.

▲ Ejercicio 6.3

a) Podemos calcular la velocidad con que la pelota llega al piso aplicando $v = \sqrt{2\,g\,h}$ = 7,67 m/s, pero también por conservación de E_m. Tomamos Ep = m g h, y entonces $Ep_{inicial}$ = 0,15 × 9,8 × 3 = 4,41 J; dado que en el piso Ep_{final} = 0, resulta que la energía cinética allí vale 4,41 J.
La cantidad de movimiento al llegar al piso es: p = 0,15 × 7,67 = 1,15 kg m/s, la cual debe ser igual al impulso aplicado por la fuerza peso durante la caída, es decir a P×Δt (siendo Δt el tiempo que dura la caída).
Por otra parte, la energía cinética al llegar al piso, debe ser igual al trabajo hecho por la fuerza peso, es decir a P × 3 m.
b) El área de la gráfica mostrada nos da el valor absoluto del impulso (pelota-suelo, o suelo-pelota, es lo mismo). Si elegimos como siempre el eje y vertical

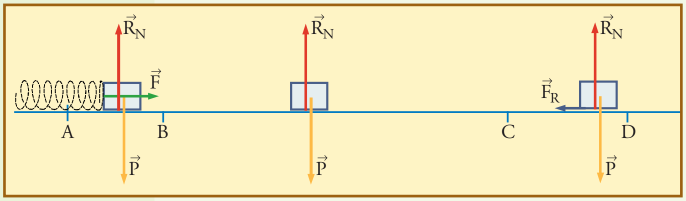
positivo hacia arriba, para este choque tenemos:
Antes p_y = - 1,15 kg m/s
Durante el intervalo de 0,02 s que dura el contacto según la gráfica: I_y = 2,10 N·s (aplicado por el suelo a la pelota). Habría que sumar el impulso de la fuerza peso, ya que también actúa sobre la pelota en este proceso: $-P \times \Delta t = 0{,}15 \times 9{,}8 \times 0{,}02 = -0{,}03$ N·s (vemos que en un tiempo tan corto su efecto es prácticamente irrelevante, por lo cual no lo consideraremos aquí).
De manera que tomamos I_y = 2,10 N·s.
Después: $p_y' = p_y + I_y = -1{,}15 + 2{,}10 = 0{,}95$ kg m/s.
Vemos que en valor absoluto p'< p, es decir que v'< v: el choque ha sido parcialmente elástico.



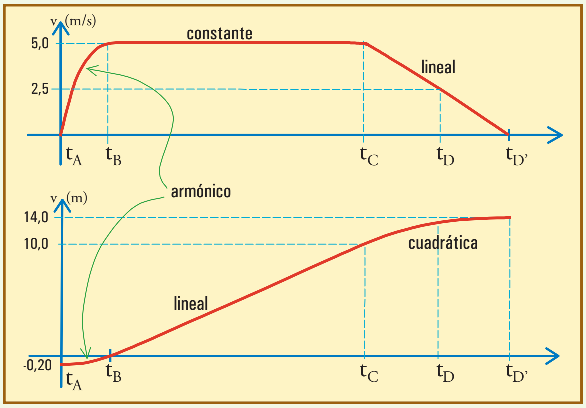
c) v'= 0,95 kg m/s / 0,15 kg
v'= 6,33 m/s;
$Ec' = 0{,}15 \times 6{,}33^2 / 2$
Ec' = 3,00 J;
se han perdido 4,41- 3,00 = 1,41 J.
La pelota subirá hasta que Ep valga 3,00 J , es decir
$h_{final} = 3{,}00 / (0{,}15 \times 9{,}8) = 2{,}04$ m.

▲ Ejercicio 6.4

a) Le llamamos $\vec{F}$ a la fuerza que aplica el resorte, $\vec{P}$ es el peso, $\vec{R}_N$ es la reacción normal (perpendicular) del piso, y $\vec{F}_R$ es la fuerza de roce, que viene a ser la parte tangencial de la reacción del piso.



b) v_B se calcula a partir de la energía cinética en B, que debe ser igual a la potencial del resorte en A (para llegar a esto se parte de la conservación entre A y B: $Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$, con $Ec_A = 0$, y $Ep_B = 0$).
De manera que $Ep_A = 10.000\ (N/m) \times (0{,}2m)^2/2$
Ep_A = 200 J ;
$v_B = (2 \times 200/16)^{½} = 5$ m/s.
Entre B y C la resultante es nula, de manera que el movimiento es uniforme, y entonces $v_C = v_B$ = 5 m/s. Desde C en adelante la fuerza resultante es la de rozamiento, que va frenando al móvil, y en principio no sabemos si éste va a llegar a D. Una forma posible de averiguarlo es suponer que llega a D, y plantear la energía cinética alli: $Ec_D = Ec_C - W_{CD}$; si obtenemos un valor positivo, ése es, y si obtenemos un resultado negativo, absurdo porque Ec debería ser siempre positiva, es indicación de que el cuerpo se detuvo antes de ese punto.
Procedemos entonces: 200 J – 50 N×3 m = 50 N → sí llega a D, con 50 J de energía cinética,
→ $v_D = (2 \times 50/16)^{½} = 2{,}5$ m/s.
Otra forma posible consiste en calcular dónde se detiene en cuerpo (D'). Para esto planteamos
$Ec_{D'} = 0 = Ec_C - F_R\, d_{CD'} \rightarrow 50\ N \times d_{CD'} = 200$ J
→ $d_{CD'}$ = 200 / 50 = 4 m (esto corrobora que sí llega a D, ahora hay que calcular la energía y velocidad allí, como hicimos antes).
A continuación están las gráficas pedidas. Son cualitativas porque es muy difícil mostrar en la misma escala 20 cm y 10 m. Por comodidad, colocamos el origen de x en el punto B.



c) Entre A y B, el movimiento es un cuarto de oscilación en el extremo de un resorte. Por lo tanto dura $T/4 = \pi\ (m/k)½ / 2 \cong 0{,}0628$ s
→ si $t_A = 0$, $t_B \cong 0{,}0628$ s.
Entre B y C el movimiento es uniforme, con v = 5 m/s,
→ Δt = 10m / 5(m/s) = 2 s ; entonces $t_C \cong 2{,}06$ s.
Entre C y D, o D', el movimiento es MRUV, la velocidad, por lo tanto disminuye de manera lineal, y podemos aplicar $\Delta t = \Delta x / v_m$. Entonces, hasta D, v_m = (5+2,5)/2 = 3,75 m/s, Δt_{CD} = 3m / 3,75(m/s) = 0,80 s.
Y desde D hasta D',
v_m = 2,5/2
v_m = 1,25 m/s
$\Delta t_{DD'}$ = 1/1,25
$\Delta t_{DD'}$ = 0,80 s.
De manera que t_D = 2,86 s, y $t_{D'}$ = 3,66 s.

▲ Ejercicio 6.5

a) Dado que la posición de equilibrio del resorte está en x = 0, sólo hay contacto con él en los valores x < 0. En x > 0, es decir, antes de t = 0 y después de t ≅ 0,32 s, el cuerpo se mueve libremente, y la gráfica es una recta, de pendiente negativa primero, y positiva después.

La pendiente de estas partes rectas es fácil de determinar, y podemos ver que se recorren 50 cm en 0,1 s, de manera que la velocidad pedida, en valor absoluto es v_0 = 0,50 m / 0,1 s = 5 m/s.

Es decir, para t ≤ 0, v_0 = - 5 m/s ; y para t ≥ 3,15 s, v_f = 5 m/s.

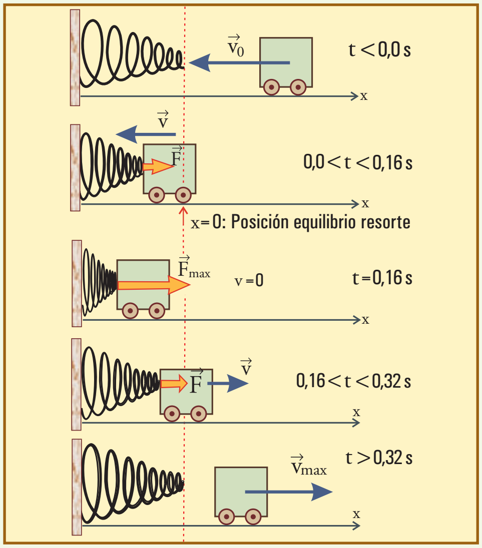
b) El resorte se comprime 50 cm. esto significa que llega a almacenar una energía Ep = 2000×0,5²/2 = 250 J. Dado que ésta debe ser también la energía cinética del cuerpo antes y después, podemos calcular la velocidad correspondiente v = (2 Ec / m)^½ = 5 m/s (vemos que confirma exactamente el resultando anterior).

c) Para el intervalo propuesto podemos ver que:

Entre -0,1 s y 0,0 s, no hay contacto con el resorte (W = 0).

Entre 0,0 s y 0,16 s, el resorte es comprimido, por lo cual hace trabajo negativo, quitando energía cinética al cuerpo. Éste es frenado por la fuerza, que actúa en sentido contrario al avance.

Entre 0,16 s y 0,32 s, el resorte se expande, haciendo trabajo positivo y dando energía al cuerpo. Éste es empujado por la fuerza en el mismo sentido del avance.



▲ Ejercicio 6.6

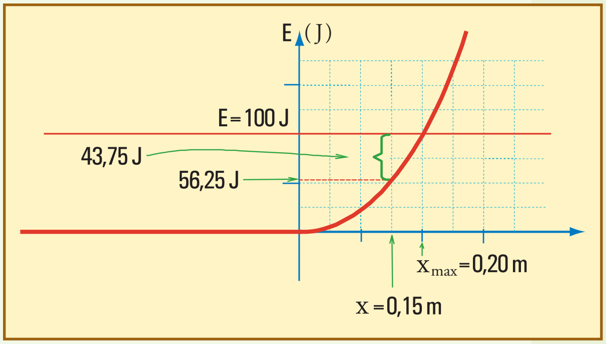
a) E es la energía mecánica total, expresada como suma de la cinética y la potencial del resorte. Para esta última se ha definido el valor cero para el resorte en equilibrio, que corresponde al cuerpo en todos los valores negativos de x. La gráfica para x > 0 corresponde al término ½ k x² = 2.500 x², como se verifica fácilmente dando valores.

b) Si el cuerpo viaja por los x negativos con Ec = 2 × 10² / 2 = 100 J hacia el resorte, dado que allí Ep = 0, entonces E = 100 J, es un valor que se mantendrá constante en todo el movimiento. De manera que el móvil llegará a comprimir el resorte hasta un lugar $x_{máx}$ en el cual v, o sea Ec, se anule. En este punto se cumplirá Ep = 100 J = 2.500 $x_{máx}^2$, de manera que podemos calcular $x_{máx}$ = 0,2 m.

En la gráfica se entiende claramente que este valor de x es la abscisa del punto de intersección entre la recta que indica el valor E = 100 J, y la gráfica Ep(x). Esto es interesante porque, dado que E se mantiene constante, y E – Ep es el valor de Ec, en la gráfica podemos leer la energía cinética del móvil en cada lugar, como la distancia (vertical) desde la gráfica Ep(x) hasta la recta horizontal que marca el valor de E. Donde estas líneas se intersectan resulta Ec = 0, el móvil se detiene, y no puede avanzar hacia donde E < Ep, ya que eso correspondería a una Ec negativa, que no puede existir.

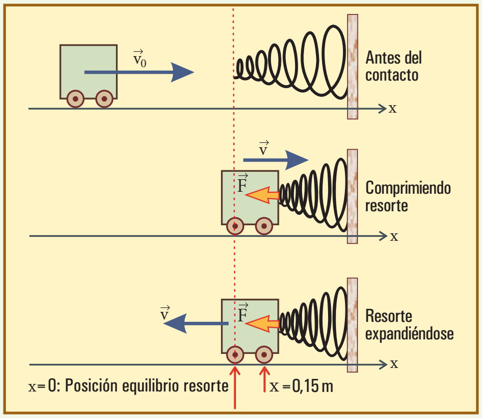
La gráfica, nos indica, entonces, con el lenguaje de la energía, lo que ya sabíamos por dinámica: el cuerpo retornará hacia los x negativos, e irá teniendo, en cada lugar, la misma energía cinética con que pasó antes hacia la derecha.

c) En la gráfica leemos en x = 0,15 m, que Ep ≅ 55 J (es difícil leer con mucha exactitud), de manera que Ec, que es lo que falta para el valor E = 100 J, vale ≅45 J. Si se aplica la fórmula se obtienen valores bastante parecidos (Ep = 2.500×0,15² = 56,25 J, y Ec = 43,75 J).



De manera que v² = 2 Ec / m = 43,75 m²/s², y por lo tanto v = ± 6,62 m/s. Hemos hecho el cálculo de esta manera para que se vea más claramente que, según la fórmula, la velocidad puede ser tanto positiva como negativa. De manera que el cálculo vale para la ida con el valor positivo, y para la vuelta con el negativo.

d) La fuerza tiene componente F_x = – k x = – 750 N, negativa tanto a la ida como a la vuelta.



▲ **Ejercicio 6.7**

Planteamos conservación de la energía mecánica: $E = ½\ m\ v^2 + m\ g\ y$ = constante, y calculamos su valor en B:

$E = 2×0,2^2/2 + 2×9,8×0,04 = 0,040 + 0,784 = 0,824$ J.

Dado que $Ep_A = 0$, entonces

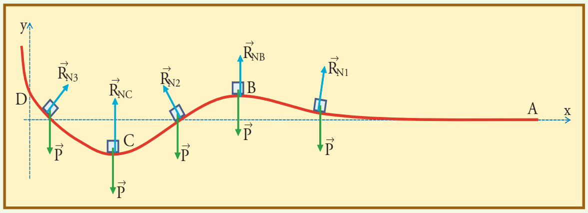
$Ec_A = 0,824$ J, y $v_A = (2×0,824/2)^{½} = 0,908$ m/s (además sabemos que en este movimiento la velocidad puede ser calculada independientemente de la masa, a partir de $v^2 = v_0{}^2 – 2\ g\ \Delta y$, que para este cálculo hubiese sido: $v_A{}^2 = 0,2^2 - 2 \times 9,8 \times (-0,04) = 0,824$, de donde se obtiene el mismo valor ya calculado).

A partir de que el cuerpo es lanzado en A con $v_A = 0,908$ m/s hacia la izquierda, su velocidad disminuye (de módulo) en la subida, pasa por B con $v_B = 0,200$ m/s, luego aumenta en la bajada hasta un valor máximo en C, dado por:

$v_C{}^2 = 0,2^2 – 2×9,8×(-0,10) = 2,000 \rightarrow v_C = 1,414$ m/s, desde allí la velocidad disminuye y el cuerpo se detiene un poco más allá de D (en D tiene la misma velocidad que en B, ya que están a la misma altura), para volver luego pasando con las mismas velocidades en sentido contrario por todos los puntos.

Es claro que en este caso ideal, sin rozamiento, es *imposible ganar el juego*, dado que si el cuerpo pasa por B hacia la izquierda, luego pasará inexorablemente por allí hacia la derecha, con exactamente la misma velocidad. Sólo cabría la posibilidad de que el cuerpo no volviese si tuviese la energía exacta para llegar al punto B, y quedase detenido allí, lo cual no sólo es de tan bajísima probabilidad que nunca ha ocurrido, sino que sería una situación inestable que podría revertirse espontáneamente.

Las fuerzas actuantes, esquematizadas en la figura siguiente, al no haber rozamiento, consisten sólo en el peso y la reacción normal de la pista, absolutamente independientes de que el cuerpo pase por cada punto hacia la izquierda o hacia la derecha.

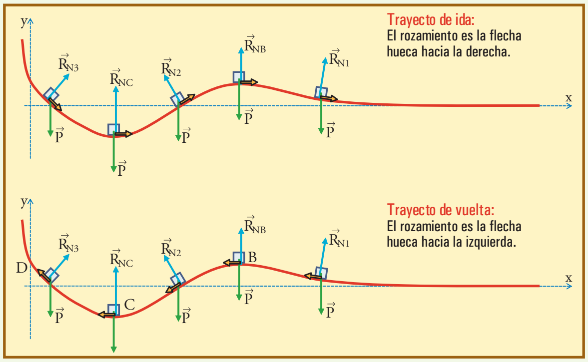


En la figura no se han mostrado las componentes del peso. Se ha tratado de respetar el tamaño de la reacción en cada lugar. La reacción normal de la pista no equilibra necesariamente a la componente normal del peso, ya que la resultante entre ambas es la fuerza normal correspondiente a la curvatura de la trayectoria, así tenemos que R_{N1}, R_{NC}, y R_{N3} son mayores, cada una, que la correspondiente P_N, mientras que R_{NB}, es menor que P_{NB}. A su vez, en B y en C, $P_N = P$.

b) Si hay rozamiento necesitamos saber cuánto vale para poder calcular las velocidades. Sin saber el valor, pero suponiendo que es muy débil, a priori podemos decir que, para que el cuerpo pase por B con $v_B = 0,2$ m/s, deberíamos lanzarlo en A con v_A' levemente mayor que 0,908 m/s hacia la izquierda. Luego el movimiento continuará de manera muy parecida a lo que se describió, pero como el rozamiento continuamente hará disminuir su energía mecánica, pasará por cada lugar con una velocidad levemente menor, en valor absoluto, que la que hemos calculado. Es decir, pasará por C con v_C' algo menor que 1,414 m/s hacia la izquierda, si llega a D (puede no llegar) lo hará con velocidad menor que 0,2 m/s, se detendrá en un lugar más bajo que el lugar en el que se hubiese detenido sin rozamiento, y retornará, pasando por C con v_C''< v_C'< 1,414 m/s. Luego su velocidad disminuirá mientras sube hacia B. Si llega a B lo hará con v_B' < 0,2 m/s, y desde allí se acelerará en la bajada, pero comenzará a frenarse levemente en la parte horizontal, llegando casi seguramente a A, pero con velocidad v_A'' < 0,908 m/s < v_A'.

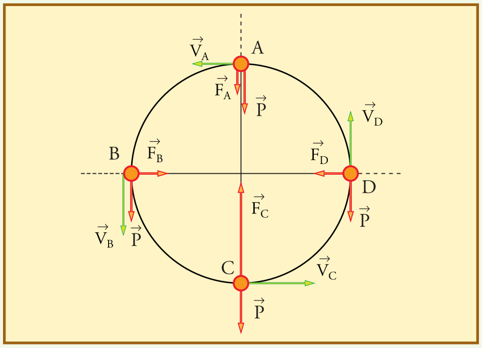
Esto nos indica que es posible ganar el juego gracias al rozamiento: es más fácil si el rozamiento es grande, más difícil si es pequeño, y sería imposible si no lo hubiese. Para ganar hay que lanzar el cuerpo con la mínima velocidad tal que le alcance la energía para pasar por B. Lo que le sobre de energía al pasar por B, *debe ser disipado por el rozamiento* en el trayecto B→C→…D…→C→B. Si el rozamiento no alcanza a disipar este exceso, el cuerpo no quedará atrapado

y pasará por B hacia A.
La gráfica de las fuerzas será exactamente la misma anterior, pero mostrando una pequeña fuerza de rozamiento siempre hacia atrás, que cambiará entre la ida y la vuelta.



▲ Ejercicio 6.8

a) Las fuerzas actuantes son exactamente las mismas que para el caso de un péndulo: el peso $\vec{P}$, que es un vector constante, y la fuerza del hilo $\vec{F}$, siempre a lo largo del hilo, hacia el centro O. En la figura están mostrados estos vectores fuerza (flechas huecas), junto con los vectores velocidad (flechas negras) en cuatro puntos de la trayectoria A, B, C, y D. Al igual que en el péndulo, es claro que el movimiento no puede ser uniforme, ya que la fuerza resultante tiene componente tangencial, que es la de $\vec{P}$ (puesto que $\vec{F}$ no tiene).



Otra forma de decir lo mismo, es desde el punto de vista de la energía: en este movimiento sólo trabaja la fuerza peso, de manera que la energía mecánica total se mantiene constante:

$$E = ½\ m\ v^2 + m\ g\ y = \text{cte}.$$

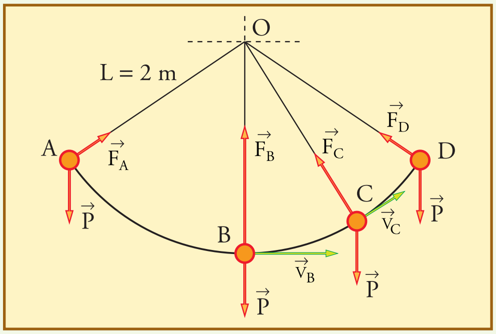
b) La velocidad en cualquier punto se puede calcular con $v^2 = v_A^2 + 2\ g\ (y_A - y)$.
Así tendremos, para los puntos B y D ($y_B = y_D = 0$):
$v^2 = 5^2 + 2×9{,}8×1{,}5 = 54{,}4\ m^2/s^2 \rightarrow v_B = v_D = 7{,}37$ m/s.

Para el punto más bajo, C (y_C = -1,5 m):
$v^2 = 5^2 + 2×9{,}8×3 = 83{,}8\ m^2/s^2 \rightarrow v_C = 9{,}15$ m/s.

c) La componente normal de la fuerza resultante, en cada lugar, está dada por m v^2/ R, que es la expresión para la fuerza centrípeta.
Ahora bien, en este caso (tal como en cualquier péndulo), esa fuerza resulta de la composición de $\vec{F}$ con la componente normal del peso.
Así resulta que en los puntos B, y D, en los que el peso no tiene componente normal (ver figura), tenemos $F_B = F_D = 2 × 7{,}37^2 / 3 = 72{,}53$ N.
En cambio en A y en C, el peso es directamente normal, pero en A actúa hacia el centro y en C hacia fuera. De manera que tenemos:
$F_A = m\ v_A^2 / R - P = 2 × 5^2/1{,}5 - 2 × 9{,}8 = 13{,}73$ N
$F_C = m\ v_C^2 / R + P = 2 × 9{,}15^2/1{,}5 + 2 × 9{,}8 = 131{,}33$ N

▲ Ejercicio 6.9

a) Se muestran cualitativamente las fuerzas con flechas huecas (los otros vectores mostrados no son fuerzas). La fuerza del hilo claramente no hace trabajo en ningún tramo, ya que es siempre perpendicular al movimiento. La fuerza peso hace trabajo positivo en el tramo AB, dado que tiene componente tangencial en el mismo sentido del movimiento, y hace trabajo negativo en BC y en CD, porque su componente tangencial es hacia atrás en estos tramos.



b) Aplicamos (5.20):
$F_B = m\ v_B^2/ L + m\ g = 4×4^2/2 + 4×9{,}8 = 71{,}2$ N (notar que la fuerza centrípeta, m v_B^2/ L, que vale 32 N, es igual a 71,2 N – 39,2 N, que es el módulo del vector resultante de $\vec{F}_B + \vec{P}$).
c) Aplicamos $v^2 = v_B^2 - 2\ g\ (y - y_B)$, y despejamos $y - y_B$, la altura respecto de B: $y - y_B = (v_B^2 - v^2) / 2\ g$.
En A, $v_A = 0$,
$\rightarrow\ y_A - y_B = v_B^2 / 2\ g = 4^2/(2×9{,}8) = 0{,}816$ m (es la altura hasta la cual subiría un proyectil lanzado verticalmente con velocidad v_B, como corresponde a la conservación de la energía).

En C : $y_C - y_B = (4^2–3^2)/(2×9,8) = 0,357$ m.

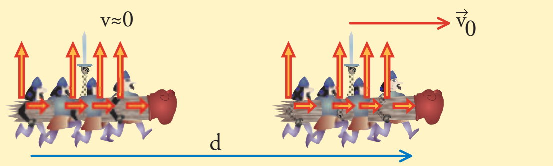
d) Considerando cero la energía potencial en A, los valores de las energías, en J, son (tener en cuenta que $y_A - y_B = 0,816$ m ; $y_A - y_C = 0,816 - 0,357 = 0,459$ m):

	E_p	E_c	E_{total}
A	0	0	0
B	-32	32	0
C	-18	18	0
D	0	0	0

▲ Ejercicio 6.10

Los soldados empujan al ariete a lo largo de una cierta distancia d hasta que adquiere una determinada velocidad v_0 (la máxima con la cual ellos pueden correr cargándolo). En este proceso realizan un trabajo $W = F_h \times d$, donde F_h es la fuerza horizontal resultante que aplican al ariete para acelerarlo.

Además, los soldados aplican una considerable fuerza vertical para sostener al ariete contra la acción de la gravedad. La fuerza vertical podría ser muy grande y cansar a los soldados más que la F_h, pero eso puede evitarse con un mecanismo adecuado. Por ejemplo, en algunas películas suelen verse arietes que cuelgan de soportes que les permiten un movimiento pendular, y los soldados sólo se encargan de aplicarles rítmicamente fuerzas horizontales para golpear la puerta.



Durante la carrera previa cada soldado aplica determinada fuerza horizontal que hace aumentar la velocidad del ariete a lo largo de la distancia d, además de una gran fuerza vertical necesaria para sostenerlo.

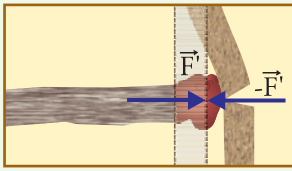
El ariete adquiere entonces una energía cinética $Ec_0 = ½m\, v_0^2 = W$, y sólo podrá detenerse si una cantidad de trabajo W' igual es efectuado por una fuerza externa que le quite esa cantidad de energía. Es decir:

$$\text{detener ariete} \rightarrow W' = \Delta Ec = -Ec_0$$

En este caso, quien le aplicará una fuerza al ariete en el sentido de detenerlo será la puerta, que debería impedir su avance. Pero la realización de un trabajo negativo W' por parte de la puerta es una forma de decir que ella, mientras aplica la fuerza F' contra el avance, debe ceder la distancia d' tal que:

$W' = - F'\,d'$, o lo que es lo mismo, $F' \times d' = Ec_0 = F \times d$.

La fuerza F' que el ariete aplica es igual en módulo (acción y reacción) a la fuerza con que el portón resiste su avance. Será mayor contra los portones más resistentes (algo similar ya se vio en el Ejercicio 4.8). Cuanto más grande sea F', más pequeña será d', la distancia que el ariete avanza. Pero nunca será d' = 0, cosa que sí podría ocurrir si los soldados empujaran el portón directamente con sus manos (cuando el ariete choca, en realidad no interesa que ellos aún continúen aplicando la fuerza F_h, pues ella es muy pequeña comparada con F').



Durante el choque el ariete avanza a una cierta distancia d´ aplicando la fuerza F' que sea necesaria

La puerta necesariamente cederá una cierta distancia $d' = d \times F_h / F'$. ¿Significa eso que infaliblemente el ariete romperá la puerta? No. La puerta puede ceder una cierta distancia elásticamente, y luego recuperar su forma inicial sin sufrir daño permanente. También podría suceder que se rompa el ariete, mientras a la puerta no le suceda nada grave.

Lo que los soldados logran con el ariete es compensar lo pequeño de la fuerza F_h que pueden aplicar, haciendo que ella actúe a lo largo de una gran distancia, de manera que gracias a la acumulación de la energía cinética y al teorema que dice que ella sólo puede disminuir haciendo trabajo (fuerza × distancia), puede garantizarse que el ariete aplicará una fuerza F' tan grande como sea necesario para que la puerta (o el ariete o ambos) ceda una cierta distancia. Y la esperanza de los soldados invasores es que la puerta sufra daño permanente con la deformación d' infringida repetidas veces, mientras que la de los defensores es que el daño lo sufra el ariete (o los soldados atacantes) antes.

▲ Ejercicio 6.11

a) El planteo es muy similar al del ejemplo desarrollado en el texto. Designamos:

t_0: instante de velocidad nula del martillo, inmediatamente antes de comenzar a ser impulsado hacia abajo.

t_1: instante previo al contacto del martillo con el clavo

t_2: instante en que clavo y martillo se detienen luego de penetrar (el clavo) 6/3 = 2 cm en la madera.

Según los datos $Ec(t_1) = Ec_1 = 1\text{ kg} \times (10\text{ m/s})2/2 = 50$ J,

de manera que si aplicamos $W_{FR} = \Delta Ec+\Delta Ep$ para el sistema martillo entre t_1 y t_2, obtenemos:
$\Delta Ec = -50$ J ; $\Delta Ep = -9{,}8$ N × 0,02 m = – 0,196 J (vemos que es prácticamente irrelevante el peso del martillo aquí, razón por la cual en la práctica no se siente diferencia entre golpear vertical u horizontalmente; no obstante conservaremos el peso en todo el planteo).
$W_{FR} = -50$ J – 0,196 J = – 50,2 J = trabajo de la fuerza con que la cabeza del clavo frena al martillo.
Ahora bien, por acción-reacción, este último trabajo, cambiado de signo, es el que hace el martillo sobre el clavo hundiéndolo, que por lo tanto es también 50,2 J. Como además el clavo tiene velocidad nula tanto en t_1 como en t_2, si le aplicamos la misma expresión obtenemos que W_{FR} sobre él es nulo en este intervalo, y por tanto, la fuerza media que lo empuja es igual en valor absoluto a la que lo frena, y podemos calcularla sabiendo que hace un trabajo de 50,2 J en 2 cm: F = 50,2 J / 0,02 m ≅ $2{,}51 \times 10^3$ N.
b) La fuerza media que impulsa al martillo, por otra parte se averigua de la misma manera que la que frena al clavo: aplicamos $W_{FR} = \Delta Ec+\Delta Ep$ para el *sistema martillo* entre t_0 y t_1, y obtenemos:
F × 0,80 m = 50 J – P × 0,80 m →
F = 50/0,8 – P = 62,5 – 7,84 = 54,66 N
(aquí el peso no fue tan irrelevante: martillando para abajo, el peso del martillo nos ayuda en la fase del impulso)
c) El trabajo hecho por la fuerza de rozamiento, -50,2 J, significa que desaparecen 50,2 J de energía mecánica (de los cuales 50 eran cinética y 0,2 potencial del martillo). Por lo tanto deben aparecer, distribuidos entre el clavo, la madera, y luego el ambiente, 50,2 J de energía no mecánica, a la cual llamaremos térmica, ya que se manifiesta exclusivamente a través de la elevación de la temperatura de las partes (estamos despreciando energía que se propaga con las vibraciones que se producen, el sonido, etc.).
d) El proceso de martillar horizontalmente es exactamente el mismo que el descripto en el ejercicio anterior, de golpear con un ariete.
Si analizamos los martillazos verticales, en cambio, aparece la contribución del peso. Ya vimos que durante el golpe prácticamente no hay diferencia entre considerar o no considerar el peso. En cambio en la fase del impulso podemos decir que, a la energía que le imprimimos al martillo, la gravedad le agrega la energía potencial del martillo, aumentando directamente la fuerza del impacto, o la profundidad que penetrará el clavo. A esa energía extra, por otra parte, la tenemos que suministrar nosotros en la fase de levantar el martillo.

▲ Ejercicio 6.12
Dado que 1 kWh = 3,6 MJ, tenemos que:
960 kWh = 3456 MJ; esa energía repartida en un año ($365 \times 24 \times 3600 = 31{,}536 \times 10^6$ s) representa una potencia de: $3456 \times 10^6 / 31{,}5 \times 10^6 \cong 110$ W. Corresponde a la potencia de una lámpara de filamento fuerte, o un par de televisores pequeños, o, tal vez, un motor de licuadora. Mucho menos que una estufa, y mucho más que una lámpara de bajo consumo.

▲ Ejercicio 6.13

$$\frac{112\, libras \times 196\, pies}{60\, segundos} \cong 366 \text{ libras} \times \text{pie/segundo}$$

366 + ½ 366 ≅ 549 ≅ 550 libras × pie/segundo

Si definimos que este valor es 1 HP, para expresarlo en watts debemos traducir las libras a newtons, y los pies a metros.
Tomamos el valor dado en Capítulo 3,
1 libra = 0,4536 kg (tanto de fuerza como de masa), para este caso, de fuerza. Para traducirlo a newtons, debemos multiplicar por 9,8: 1 libra ≅ 4,445 N.
Por otra parte, tenemos 1 pie = 0,305 m, de manera que:
550 libras × pie/segundo ≅ 550 × 4,445 × 0,305 ≅ 746 W

▲ Ejercicio 6.14
Vale aclarar que para todos los casos se explica lo que sucede con la energía a partir de un aparato o ser que hace un trabajo, sin considerar a expensas de qué energía ha sido hecho el trabajo, ni rastrear la energía hacia atrás en el tiempo.
También es importante aclarar que se han mencionado sólo las energías que se consideran importantes para cada caso, sin entrar en muchos detalles finos que podrían plantear demasiadas complicaciones.
1. Se realiza trabajo positivo sobre la varilla al doblarla, pero dado que ella puede realizar trabajo positivo al recuperar su forma, podemos pensar que acumuló gran parte de ese trabajo como energía potencial elástica.
2. Se realiza el mismo trabajo positivo sobre el caño de cobre que en el punto anterior sobre la varilla de mimbre. Pero ahora nada de ese trabajo se acumula como energía elástica. Sin embargo, el Principio de Conservación de la Energía nos asegura que esa cantidad de trabajo se ha acumulado como energía de algún tipo. Si no conocemos algún mecanismo especial por medio del cual el cobre acumule energía, debemos pensar que se acumuló como energía térmica, produciendo cierta elevación de temperatura del

cobre (y del ambiente cercano).
3. El trabajo es acumulado en su mayor parte como energía cinética del carro.
4. En este caso el trabajo realizado al empujar el escritorio no se acumula mecánicamente, ya que es disipado en su totalidad por el rozamiento. Se acumula como energía térmica del escritorio, piso y ambiente.
5. Una parte del trabajo hecho por el motor sobre la bombeadora, se disipa en rozamientos entre las partes mecánicas de la misma, otra parte en rozamientos con el agua, otra parte en rozamientos del agua con la cañería, y consigo misma (torbellinos), y otra parte, la útil, se acumula como energía potencial del agua en lo alto en el depósito. Todas las partes disipadas por el rozamiento desaparecen como energía mecánica, pero se acumulan como energía térmica, según la elevación de temperatura de las diversas partes intervinientes.
6. Parte del trabajo se transforma en energía potencial de todos los cuerpos que llegan a lo alto de la colina. Otra parte, incluida la que momentáneamente es energía cinética durante la marcha, ya no es más energía mecánica cuando el automóvil se detiene, y va a energía térmica de las partes y el ambiente.
7. El trabajo hecho sobre la jabalina se transforma casi íntegramente en energía cinética de la misma. Luego, a medida que ésta viaja, se va disipando una parte por el rozamiento, mientras una parte de la cinética juega transfiriéndose a potencial en la subida, y volviendo a cinética en la bajada. Al clavarse la jabalina toda la energía cinética que le resta es disipada por el rozamiento. Es decir que, finalmente, todo el trabajo hecho sobre la jabalina, es energía térmica de la jabalina y el ambiente.
8. El trabajo se acumula en gran medida en energía potencial elástica del arco. Alguna parte seguramente se ha disipado y es energía térmica de las partes.
9. La energía potencial almacenada en el arco, es el trabajo que éste hace sobre la flecha, y para él valen las mismas consideraciones que para la jabalina del punto anterior.
10. Una pequeña parte del trabajo hecho sobre el generador se disipa en rozamientos, otra parte se disipa en los conductores eléctricos, y la mayor parte se acumula como energía potencial electroquímica en los reactivos del acumulador. Toda la parte disipada se manifiesta en elevación de temperatura de las partes.
11. En este caso la parte que no se disipa en rozamientos ni en los conductores del generador, se disipa en la lámpara, irradiándose como energía de la luz y el calor correspondiente. Una parte de esta energía se manifiesta en la elevación de la temperatura de las partes de la lámpara, muy notable, pero a medida que transcurre el tiempo, esa parte no varía, es decir no acumula más energía, la cual sin embargo sigue disipándose a ritmo constante. De manera que podemos pensar que la mayor parte de la energía viaja con la luz y el calor irradiados, mani-festándose como un aumento de la temperatura de partes cada vez a más lejanas del ambiente y los alrededores.
12. Si el generador no alimenta a nada, es decir, no entrega energía eléctrica a otros sistemas, entonces podemos asegurar que tampoco la está generando, y tampoco está tomando energía del motor. Esto, que puede asombrar, se entiende mejor cuando se conocen las leyes completas del funcionamiento de los generadores: por determinadas razones que tienen que ver con las fuerzas entre las corrientes eléctricas, la fuerza necesaria para producir la rotación del generador con determinada velocidad, aumenta proporcionalmente a las corrientes que circulan por sus conductores. Si no circula corriente porque el generador no está alimentando a otro sistema, entonces el motor no debe realizar trabajo sobre el generador, el cual podría mantenerse girando por inercia indefinidamente. Es decir, se detendría por el rozamiento, y el motor sólo debería proveer la energía que disipa el rozamiento. Mientras que, en cambio, cuando el generador alimenta eléctricamente a otro sistema, el motor que lo impulsa debe vencer una resistencia mecánica extra, que no se origina en el rozamiento sino en las corrientes con las que el generador alimenta a los sistemas correspondientes.
Así es como, en virtud de estas leyes de la electricidad, se entiende cómo el Principio de Conservación de la Energía explica la transferencia de energía en este tipo de sistemas.

CAPÍTULO 7

▲ Ejercicio 7.1
Tenemos que en los casos (a) y (c) el eje pasa por el centro geométrico, el cual, dado que el cuerpo es homogéneo, es el centro de masa.
Aplicando teorema de Steiner, podemos decir, por un lado, que el momento de inercia es menor en el caso (a), que en el (b), y en éste menor que en el (e), y por otro lado, que en el caso (c) menor que en el (d).
Además, en el caso (c), que tiene la materia más cerca del eje, el momento de inercia es menor que en el (a), y por la misma razón, en el caso (d) es menor que en el (e).
Esto es suficiente para decir que el menor momento de inercia corresponde al caso (c), y el mayor al (e).
A igualdad de forma y dimensiones, el mayor momento de inercia será el del material de más masa, o sea de

mayor densidad; para estos materiales, de hierro.

▲ Ejercicio 7.2

a) El brazo de palanca de $\vec{F}_A$ es r, de manera que el momento aplicado por $\vec{F}_A$ con respecto al eje es M_F = 10 N × 0,02 m = 0,2 N·m, positivo por el sentido antihorario. Dado que además actúa el roce, con un momento M_{roce} = -0,010 N·m, el momento neto es M = 0,2 – 0,01 = 0,19 N·m.

b) Sabemos que para el momento de inercia puede despreciarse la contribución del eje y del pequeño tambor en el que se enrolla el hilo. De manera que aplicando la fórmula para el momento de inercia de un cilindro o disco respecto de su eje, tenemos $I = ½\ m\ R^2 = 9 \times 0{,}17^2/\ 2 = 0{,}13$ kg·m².

c) El trabajo hecho sobre el sistema por $\vec{F}_A$ es 10 N × 0,80 m = 8 J; el trabajo hecho por el rozamiento es $M_{roce}\ \Delta\theta$, siendo Δθ = 80 cm / r = 40 radianes → W_{roce} = -0,40 J. De manera que el trabajo neto ha sido 8 J – 0,40 J = 7,6 J, y éste debe ser el valor de la energía cinética de rotación adquirida, con lo cual la velocidad angular debe ser:

$\omega = (2\ Ec/\ I)^{½}$ = 10,8 1/s.

La cantidad de movimiento angular intrínseca es J = I ω = 0,13 × 10,8 = 1,40 J·s.

d) De no haber rozamiento, la rueda continuaría girando indefinidamente por inercia conservando la velocidad adquirida, pero habiéndolo, podemos decir que se frenará en un tiempo dado por

$\Delta t = \Delta J/\ M_{roce}$ = (0 – 1,4) J·s / (-0,01 N·m) = 140 s.

▲ Ejercicio 7.3

a) $I = (2/5)\ m\ R^2 = 0{,}4 \times 30\ \text{kg} \times (0{,}2\ \text{m})^2 = 0{,}48$ kg·m²

b) Cantidad de movimiento angular intrínseco:

J = I ω = 0,48 kg·m² × 10 (1/s) = 4,8 J·s.

Para averiguar el momento aplicamos la Ley del Impulso para las rotaciones:

M Δt = ΔJ → M = ΔJ / Δt = 4,8 / 4 = 1,2 N·m

▲ Ejercicio 7.4

a) La potencia suministrada puede escribirse como:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{M\ \Delta\theta}{\Delta t} = M\ \omega.$$

En régimen el sistema ha alcanzado una velocidad angular a la cual el momento aplicado por el motor se equilibra con los rozamientos del sistema. Por lo tanto, el momento aplicado por el motor es lo mismo que el resistente: M = P / ω.

Debemos escribir ω en rad/s:

$$10^4\ \text{r.p.m.} = 10^4\ \frac{vueltas}{\text{min}} \times \frac{2\pi\ rad}{1vuelta} \times \frac{1\text{min}}{60seg}$$

$$10^4\ \text{r.p.m.} = \frac{10^4\ 2\pi}{60}\ \frac{rad}{s}$$

10^4 r.p.m. ≅ 1047 1/s.

Entonces M = 100 W / 1.047 (1/s) = 0,0955 N·m

b) Para la cantidad de movimiento angular, J = I ω, y la energía cinética, necesitamos el momento de inercia.

$I = ½\ m\ R^2$ = 2 kg × (0,1 m)2 / 2 = 0,01 kg·m²

Entonces J = 0,01 × 1047 = 10,47 J·s

$Ec = ½\ I\ \omega^2 = 0{,}01 \times 1047^2\ /2$ = 5.481 J.

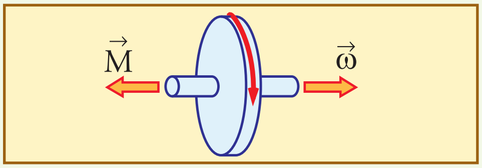
c) Tanto la fuerza centrífuga ($F_c = m\ \omega^2\ R$) como el peso de cualquier trozo de materia serán proporcionales a la masa, por lo cual podemos compararlos haciendo el cociente F_c / P: $\dfrac{F_c}{P} = \dfrac{\omega^2 R}{g} \cong 11.200$

Es decir, y esto es lo que interesa en un proceso de centrifugado, es como si hubiésemos aumentado el campo gravitatorio en un factor 11.200.

▲ Ejercicio 7.5

a) J = I ω = 0,2 kg·m² × 30 rad/s = 6 J·s

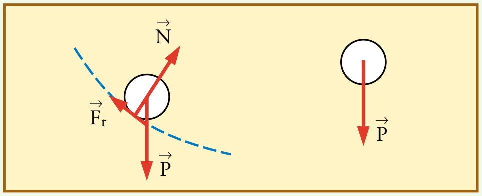
b) M = ΔJ / Δt = (0 - 6) / 3 = -2 N·m (el signo indica que el sentido es contrario al de la rotación inicial).



▲ Ejercicio 7.6

a) A la izquierda se muestran las fuerzas actuantes sobre la bolita mientras rueda en contacto con la rampa. Como se ve, ni el peso, ni la reacción normal de la pista aplican momento con respecto al centro de la bolita, y sólo el rozamiento $\vec{F}_r$ lo hace, en el sentido de acelerar la rotación, y frenar la traslación (esta fuerza transfiere parte de la energía de traslación a rotación).

A la derecha se muestra la única fuerza actuante en la caída libre, el peso, como siempre, que no puede influir sobre la rotación, por lo cual la velocidad angular (intrínseca) se conservará desde que la bolita abandona la rampa.



b) Conservación de la energía:
$E = ½ m v^2 + ½ I \omega^2 + m g h$ = constante.
Consideramos altura cero en B:
$Ep_A = 0,600 \times 9,8 \times 0,10 = 0,588$ J; $Ep_B = 0$ J
$Ep_C = -1,176$ J.
Dado que en A la energía cinética es cero, podemos calcular allí la energía total E = 0,588 J; con este valor también tenemos la energía cinética en B (ya que $Ep_B = 0$): $Ec_B = 0,588$ J.
Ahora bien, este valor está repartido entre traslación y rotación: $0,588 \text{ J} = ½ m v_B^2 + ½ I \omega_B^2$
Para determinar cuánto vale cada término tenemos que considerar la condición de que la bolita rueda sin deslizar: $\omega = v/R$. Si sustituimos esto en la expresión de la energía cinética, queda:

$$Ec_B = ½ m v_B^2 + ½ I \frac{v_B^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v_B^2$$

Si se tiene en cuenta que para una esfera $I = (2/5) m R^2$, queda

$$Ec_B = \frac{1}{2}\frac{7}{5} m v_B^2 = \frac{7}{5} Ec_{T(B)}$$

Es decir que en B, la energía cinética de traslación es 5/7 de la energía cinética total (0,420 J), y por ende, la de rotación debe ser 2/7 de la misma (0,168 J).
De manera que
$v_B = \sqrt{2 \times 0,42 / 0,6} = 1,18$ m/s
y $\omega_B = v_B/R = 47,33$ rad/s
Para el punto C decimos que la velocidad de rotación no ha cambiado desde B:
$\omega_C = 47,33$ rad/s, $Ec_{R(C)} = 0,168$ J
y sólo ha aumentado la de traslación (en la medida en que ha disminuido la potencial):
$E = 0,588 \text{ J} = Ec_{T(C)} + 0,168 \text{ J} + (-1,176 \text{ J})$
Entonces: $Ec_{T(C)} = 1,596$ J, y $v_C = 2,31$ m/s.
c) La inspección de la fórmula de la conservación de la energía,
$½ m v^2 + ½ I \omega^2 + m g h$ = constante
habida cuenta de que I es proporcional a m, muestra que m se puede simplificar, y, como ya sabemos sobre todos estos movimientos, las velocidades no dependen de la masa. De manera que, con el cambio (c1), no variaría la velocidad.

Tampoco variaría la velocidad si se disminuyera el diámetro, dado que siempre tendríamos que $I/R^2 = (2/5)$ m, y al sustituir eso llegaríamos exactamente a los mismos valores de velocidad.
Estamos tentados de pensar que nada afectaría a las velocidades, pero sin embargo, si la esfera fuese hueca, cambiaría la relación I/R^2 (en una esfera hueca, sería mayor que (2/5) m).
Al efectuar los cálculos encontraríamos que la esfera rodaría con mayor proporción de energía de rotación frente a traslación, y eso haría que se obtenga menor velocidad de traslación (y de rotación).

▲ Ejercicio 7.7
El sistema debe conservar la cantidad de movimiento angular, y como para simplificar vamos a considerar que cada astronauta es una partícula puntual, (ambos de la misma masa m), estamos hablando de la cantidad de movimiento angular orbital, que inicialmente es:

$$L = 2 m v_0 b$$

Ahora bien, si los astronautas simplemente esperan hasta estar a 10 m uno de otro, y en ese momento se sujetan con la cuerda para no alejarse más, continuarán con un movimiento circular uniforme de 5 m de radio, y 2 m/s de velocidad lineal cada uno. En este movimiento estarán girando con un período de $2\pi R / v = 15,7$ segundos, y sentirán una fuerza centrífuga (que será igual a la que tensará la cuerda) de $m v_0^2/R = 64$ N, es decir, condiciones bastante suaves.
Pero a medida que tiren de la soga para acercarse, no podrán evitar que aumente la velocidad para conservar $L = 2 m v R$. Cuando hayan reducido su separación a 5 m, tendremos R = 2,5 m, y v = 4 m/s, estarán girando con un período de 3,9 segundos, y la fuerza centrífuga valdrá 512 N. Es decir la situación ya será incómoda: girarán muy rápido, y para acercarse tendrán que tirar de la cuerda con una fuerza que ya se acerca al valor del peso (en la Tierra) de cada uno.
Una persona no puede tirar con una fuerza mucho mayor que su peso en la Tierra, de manera que lo que se pueden aproximar no es mucho. Pero además lo logran a expensas de adquirir una tremenda velocidad de rotación. Su pongamos que logran llegar a 3 m uno de otro, tendremos: R = 1,5 m, v = 6,67 m/s, T = 1,4 s, y F = 2370 N.
No sólo es una situación insostenible, sino que si se rompiese la cuerda (o si se soltasen y no estuviesen enganchados), cada uno se alejaría del otro con una velocidad bastante mayor que la inicial, y con una molesta rotación sobre sí mismo.
Podemos preguntarnos de dónde sale la energía cinética que adquieren: pues de su propio trabajo tirando de la cuerda. Tenemos aquí un ejemplo más de cómo una fuerza interior puede aumentar la energía cinética de un sistema aislado.