

Capítulo 6

Geometría proyectiva

Inés Saltiva

6.1. Introducción

Observemos las dos mesas de la Figura 6.1

Y veamos la figura 6.2 ¿Qué ocurre si se la mira desde el borde derecho de la página?

Dentro de estos ejemplos hay mucha geometría escondida y, para encontrarla, tenemos que remontarnos al siglo XV, a la época del Renacimiento y, en lugar de buscar entre los matemáticos de esa época, hacerlo entre los pintores. Esto no suena tan raro, dado que los ejemplos se tratan de dibujos y de su interpretación.

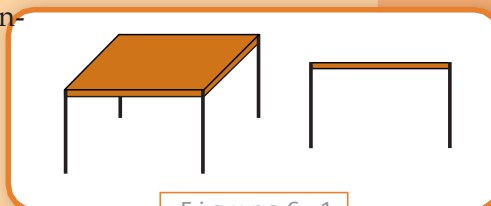


Figura 6.1

Uno de los cambios que se produce en la pintura del Renacimiento es el estudio de la perspectiva, y uno de sus precursores fue Giotto di Bondone. Él marcó un nuevo rumbo en la búsqueda de realismo y sensación de profundidad. Lo siguió Filippo Brunelleschi, que logró encontrar leyes geométricas para la perspectiva. No escribió ningún tratado sobre el tema, sino que mostró su sistema en la práctica. Pintó dos paneles que representaban dos plazas de Florencia usando su técnica. Para aumentar la sensación de realismo, pintó el cielo de uno de sus paneles con plata, de manera que el cielo real se reflejara, y entonces se podía ver cómo las nubes corrían empujadas por el viento sobre la perfecta composición de edificios pintados.

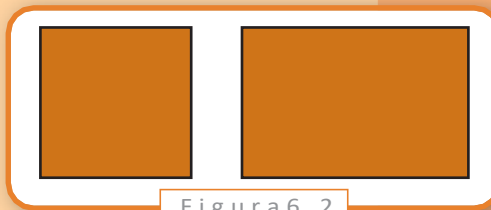


Figura 6.2

Hubo varios artistas impresionados por las obras de Brunelleschi. Los primeros en trabajar usando perspectivas geométricas fueron Masaccio, Fra Angélico y Paolo Ucello. Sin embargo, sería León Battista Alberti quien por primera vez dejaría por escrito esas reglas. Nacido en 1404 en Roma, fue arquitecto, matemático, poeta, filósofo, músico y arqueólogo. Entre otras obras, publicó "De Pictura" en 1436, donde escribió la primera definición científica de perspectiva, que puede analizarse de la siguiente manera.

Supongamos que miramos una nube a través de una ventana. El ojo recibe los rayos luminosos que salen de cada punto del objeto, y con estos rayos forma la imagen que recibe el cerebro. Ahora, para cada uno de esos rayos marquemos el lugar donde cruza la ventana;

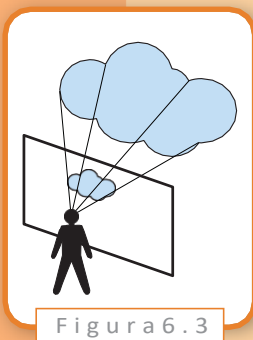


Figura 6.3

cuando la nube se haya ido, todavía podremos “verla” en la ventana (ver la figura 6.3). Es muy importante no cambiar de posición durante todo el proceso.

A los rayos que usamos para dibujar en el vidrio se los llama *proyección*, y al conjunto de los puntos que quedaron marcados en la ventana, y que forman el dibujo de la nube, se lo llama *sección*.

El problema era, en ese entonces, cómo se debía pintar un objeto para que pareciera estar “más allá” de la tela. Piero della Francesca, Andrea Mantegna y más tarde Alberto Durero se suman a la búsqueda de esa técnica. Pero, para esa época, el estudio de las proporciones ya no estaba restringido sólo a los pintores y artistas. En 1509 Luca Pacioli publica “De Divina Proportione”, un libro con ilustraciones de Leonardo da Vinci que trata sobre la proporción áurea y la perspectiva, entre otros temas geométricos. Gracias a esta obra, Durero se interesa por la matemática en relación con el arte, con lo que empieza un estudio de la misma que no abandonó en su vida y que marcó una profunda influencia en sus obras.

La evolución de la perspectiva en la pintura se puede observar a partir de los cuadros de distintos artistas renacentistas. Hemos elegido algunas que muestran esta evolución, en los cuales se observa gradualmente cómo mejora la técnica para dotar de profundidad a la pintura, y cómo varían las proporciones a la distancia. Primero, en *La última cena* (1302/05) de Giotto di Bondone, se observa una noción de perspectiva muy básica, y alejada de la que asociamos al cuadro de igual nombre de Da Vinci, pintada casi doscientos años después. Por otra parte, en *El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres*, de 1437, se observan ya nociones más precisas, si bien no siempre se mantienen paralelas líneas que deberían serlo. En *El Tributo* de Masaccio (iniciado por Massolino en 1424, terminado en 1480 por Lippi) se observa claramente el uso de la perspectiva para resaltar la figura central de Cristo, quien está dibujado de la misma altura que los Apóstoles, y convergen a él las líneas de los escalones, el dintel de la puerta, el frente del edificio (antes se acostumbra representarlo más

alto, para indicar su importancia). Por último, en *El tránsito de la Virgen* (1462) de Andrea Mantegna se observan ya las reglas de la perspectiva de Alberti excelentemente combinadas, por ejemplo: la línea del horizonte bien definida, un



La última cena



El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres



El tributo

punto de fuga que da una perspectiva central, un segundo falso punto de fuga en la iglesia que se ve en el horizonte, el embaldosado del piso integrado a esta perspectiva.

6.1.1. ¿Cómo hacer para pintar en perspectiva?

En el caso más sencillo, cuando se busca el efecto de una vista de frente, los artistas utilizan lo que se llama “punto de fuga”. Un ejemplo típico, es el dibujo de las vías del tren cuando el observador se sitúa en ellas. Las vías parecen unirse a lo lejos aunque en la realidad sean paralelas. Vamos a dibujar una caja sobre el suelo para ver cómo se hace.

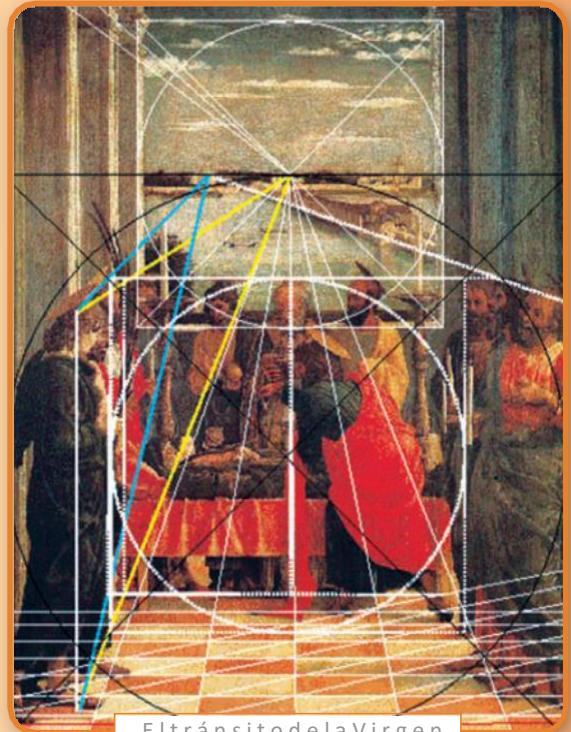
El primer paso (figura 6.4) es decidir dónde está el horizonte y cuál será el punto de fuga.

En el segundo paso, vamos a marcar las esquinas del frente de la caja y marcar suavemente las rectas que unen cada una de estas esquinas con el punto de fuga (figura 6.5)

Ahora, sobre estas rectas tenemos que marcar las esquinas visibles de la parte trasera de la caja (figura 6.6)

Ahora, completamos las líneas horizontales y verticales que podemos ver de la caja (figura 6.7)

Y, como último paso, hacemos las líneas laterales siguiendo las rectas del punto de fuga (figura 6.8).



El tránsito de la Virgen

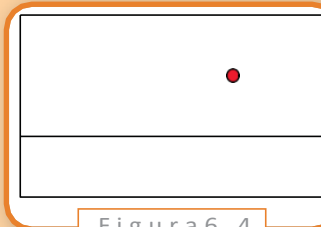


Figura 6.4

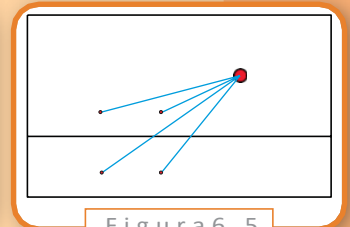


Figura 6.5

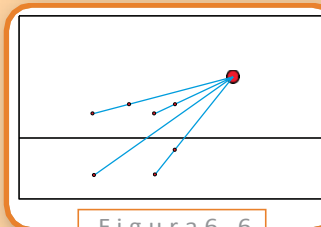


Figura 6.6

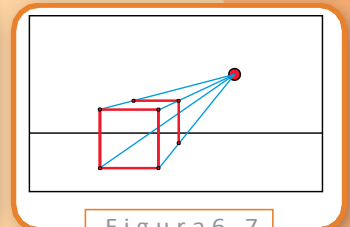


Figura 6.7

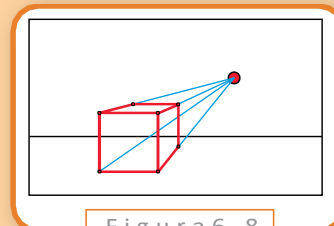


Figura 6.8

Esta técnica permite conseguir cualquier tipo de vista: frontal, desde arriba o abajo, desde la derecha o la izquierda. El efecto cambiará según cómo elijamos el punto de fuga.

Con este procedimiento se logra traer el infinito hacia un punto en la tela, con lo que, por comparación, se puede dar una sensación de distancia y profundidad.

Conviene hacer distintas vistas, cambiando el punto de vista, para entender cómo funciona el efecto.

6.1.2. Secciones cónicas

Como vimos, es relativamente sencillo dibujar en perspectiva objetos con bordes rectos, ya que basta con encontrar los vértices y completar con líneas rectas. El caso de objetos con bordes curvos como, por ejemplo, una rueda es más difícil. Una figura tan sencilla como un círculo no se verá, dibujado en perspectiva, como otro círculo.

Consideremos el siguiente ejemplo: iluminamos con una linterna una hoja de papel. Si la linterna se encuentra perpendicular a la hoja, el cono de luz tiene forma circular; pero si inclinamos la linterna, el círculo se empieza a deformar y toma varias formas distintas (ver figura 6.9).

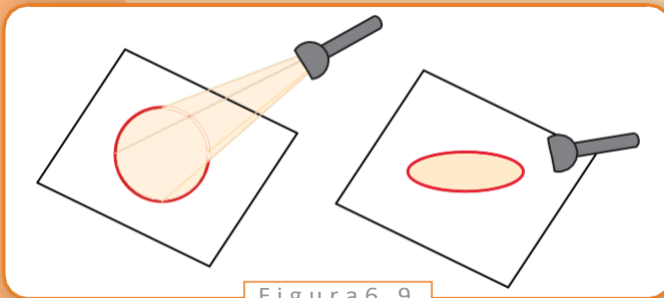


Figura 6.9

Se puede pensar estas figuras como la intersección de un cono y un plano: el cono es el haz de luz de la linterna y el plano es la hoja de papel. Estas intersecciones se llaman *secciones cónicas*: elipse (incluye a la circunferencia), parábola e hipérbola.

Las secciones cónicas, o más brevemente las cónicas, pueden definirse de distintas maneras. Analíticamente, son las curvas definidas por una ecuación del tipo:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

donde a , b , c , f , g , y h son números fijos.

Ejemplo: una circunferencia de radio R está dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Las cónicas se pueden definir según ciertas propiedades de tipo métrico.

Podemos definir la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto que llamamos su centro.

Para el caso de la elipse, existen dos puntos llamados *focos* con la siguiente propiedad: desde cualquier punto de la elipse, si trazamos dos segmentos conectándolos con los focos, como se muestra en la figura 6.10, la suma de las longitudes de estos segmentos no varía. En particular, en la circunferencia estos dos puntos se confunden en el centro de la misma.

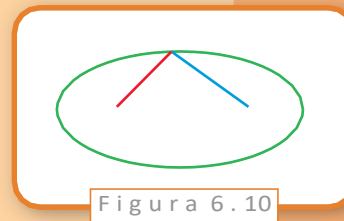


Figura 6.10

Observación. Esta definición nos da un método para dibujar elipses, que Descartes llamaba (¡en 1637!) el método de los jardineros. Se clavan dos estacas en la tierra en los puntos elegidos como foco de la elipse, y se ata un hilo a ambos. Luego, se estira el hilo con una rama y la hace girar manteniendo tenso el hilo. La figura que queda marcada es una elipse.

Definimos una elipse de dos formas diferentes (si cortamos el cono con un plano, o vía las distancias a los focos), veamos que efectivamente si cortamos un cono con un plano inclinado adecuadamente obtenemos una elipse.

Esta demostración fue dada por Germinal Dandelin, y utiliza las llamadas esferas de Dandelin. Estas esferas son tangentes al cono y al plano; una por arriba y otra por debajo. Esto significa que cada esfera toca al cono en una circunferencia, y al plano en un punto.

Llamemos S_1 a la esfera inferior, K_1 a la circunferencia que comparte con el cono y F_1 al punto donde toca al plano. Y de la misma manera, sean S_2 la esfera superior, K_2 la respectiva circunferencia de tangencia y F_2 la intersección con el plano.

Probemos que F_1 y F_2 cumplen la propiedad que se pide a los focos de una elipse. Para eso elijamos un punto P cualquiera que pertenezca a la intersección del plan con el cono. Tenemos que mostrar que la distancia

$$D = F_1P + PF_2$$

no depende del punto P elegido, o sea que es constante.

Tracemos una recta que una a P con el vértice del cono O , y llamemos Q_1 al punto donde esta recta cruza a la circunferencia K_1 y Q_2 al punto donde cruza a la circunferencia K_2 .

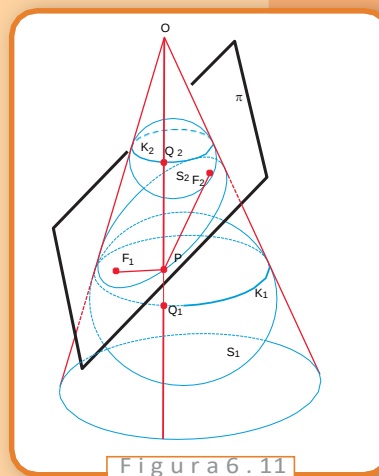


Figura 6.11

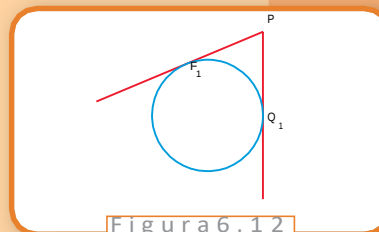


Figura 6.12

Consideremos los segmentos PF_1 y PQ_1 , que pertenecen a rectas tangentes a S_1 y que pasan ambas por P . Por la simetría radial de la esfera, tenemos que ambos segmentos deben medir lo mismo.

Trabajando de la misma manera con la esfera superior, tenemos que las distancias PF_2 y PQ_2 son iguales.

Entonces tenemos

$$PF_1 = PQ_1 \qquad PF_2 = PQ_2$$

Si sumamos ambas ecuaciones nos queda

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2$$

O sea

$$\begin{aligned} D &= PQ_1 + PQ_2 \\ &= Q_1Q_2 \end{aligned}$$

Como las circunferencias de tangencia son perpendiculares a la recta que une al vértice con P para cualquier punto P , tenemos que Q_1Q_2 sólo depende de la inclinación del plano, como queríamos ver.

Ejercicio 1

Analizar las propiedades geométricas que definen a la parábola y a la hipérbola. Hallar las ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares y cartesianas.

6.1.3.

Anamorfosis



Figura 6.13

Hemos empezado a descubrir cuál es la geometría oculta detrás de nuestro primer dibujo pero, ¿qué pasa con los rectángulos de la figura 6.2? ¿Cómo se deforman?

Si miramos detenidamente el cuadro *Los embajadores* de Hans Holbein (figura 6.13.), ¿Qué es lo que se ve a los pies de los embajadores? ¿Y si se mira desde la parte inferior derecha de la hoja? Se ve la calavera de la figura 6.14

En este famoso cuadro Holbein usa la técnica de la *anamorfosis*. La anamorfosis es un tipo de representación de un objeto. En esta representación la perspectiva está deformada de modo tal

que obliga al espectador a colocarse en un punto especial y único (que no es el usual frente a la pintura) para verlo bien. El rectángulo a la derecha en la Figura 6.2 es una representación anamórfica de un cuadrado.

De esta forma, la geometría puede enseñarnos cómo “deformar” los objetos, o ayudarnos a saber si existe algún punto desde el cual mirar una pintura para encontrar figuras “ocultas”.

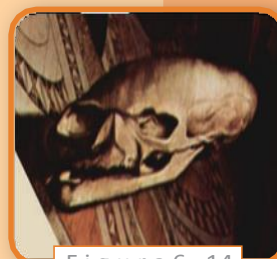


Figura 6.14

¿Cómo hacer un dibujo anamórfico? Se traza una cuadrícula sobre el dibujo que se quiere convertir en imagen anamórfica, numerando cada uno de los cuadrados y señalando la diagonal del cuadrado que conforma el contorno externo de la cuadrícula (ver figura 6.15).

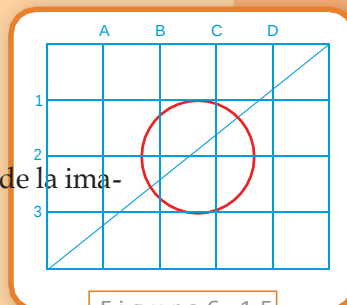


Figura 6.15

A continuación, se procede a distorsionar la red de la forma siguiente: se traza un lado del mismo tamaño y número de divisiones que el de la imagen original. Se elige un punto X a considerable distancia de dicho lado y se unen las divisiones con el punto X , como en la figura 6.16.

Desde el punto X se traza una recta vertical ligeramente menor a la altura de la cuadrícula original y se une su punto extremo, que denominaremos como Y , con el punto inferior izquierdo de la nueva cuadrícula, ver figura 6.17.

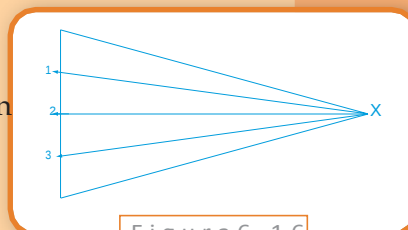


Figura 6.16

Esta última línea cortará las líneas que concurren en X en varios puntos. A partir de los puntos así obtenidos, se trazarán unas rectas verticales, paralelas entre sí, que formarán la cuadrícula distorsionada, como en la figura 6.18.

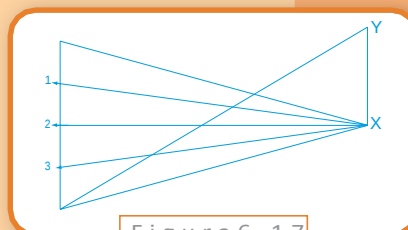


Figura 6.17

A continuación, se irá dibujando la imagen, trasladando todos los puntos básicos a sus lugares correspondientes en la nueva red distorsionada (figura 6.19). Para poder ver el dibujo sin distorsiones, tal y como es en la realidad, se debe colocar el papel en forma casi perpendicular a la cara y mirar la imagen desde la derecha.

Cuanto más lejos se halle del punto X , mayor será la distorsión de la imagen, que aparecerá estrecha y aplastada.

Esta es una forma muy elemental de generar una imagen anamórfica, en la actualidad cualquier reproductor digital de películas, o programas de procesa-

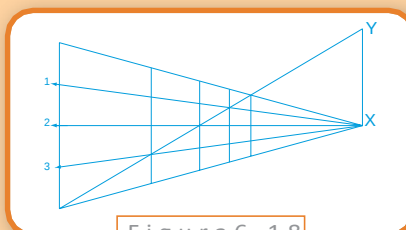


Figura 6.18

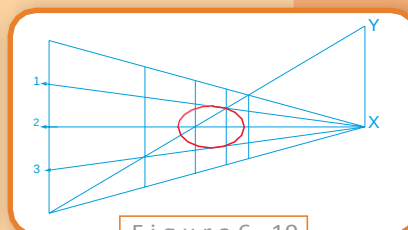


Figura 6.19

miento de imágenes, pueden cambiar las proporciones de la imagen según los formatos habituales. También se puede lograr esta clase de efectos mediante lentes especiales, como en el viejo “Cinemascope”.

En la actualidad, existen diversos usos de los dibujos anamórficos. En algunas canchas de fútbol o rugby se pueden ver imágenes publicitarias pintadas sobre el césped con la particularidad de que si son tomadas por determinadas cámaras parecen realmente carteles verticales; y pueden provocar alguna sorpresa cuando un jugador les camina por encima y parece flotar sobre un cartel.

También es muy útil la deformación anamórfica en la señalización vial. Si nos detenemos a mirar las señales que se encuentran pintadas en el pavimento vemos que se encuentran muy alargadas, y son incómodas para que un peatón las interprete. Esto se debe a que no están hechas para los peatones sino para los automovilistas, que tienen un punto de observación más bajo (figura 6.20).



Figura 6.20

6.2. Teorema de Desargues

Una vez que se desarrollaron las técnicas de perspectiva, su estudio quedó completo para los pintores del Renacimiento y por mucho tiempo también para los geómetras, hasta la llegada de Gérard Desargues (1591-1661) un arquitecto e ingeniero militar francés que encontró un nuevo camino a seguir.

Esto no quiere decir que la geometría no hubiera avanzado, sino que no había avanzado respecto del estudio de la perspectiva. En paralelo, con Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) se desarrolló la geometría analítica; lamentablemente no tenemos posibilidad de profundizar en ella en este trabajo.

En general, la geometría analiza las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio, pero no todas las propiedades de una figura tienen que referirse a las mismas “características” de la figura; podemos querer saber propiedades *cuantitativas* (por ejemplo, el tamaño de un triángulo, su área, la longitud de los lados, la medida de sus ángulos) o propiedades *cualitativas* (la forma que tiene: si es rectángulo, por ejemplo, o si todos sus ángulos son menores a un recto).

La pregunta natural es entonces: ¿cuáles son las propiedades que están relacionadas con la perspectiva, es decir, con la proyección? La Geometría Proyectiva se encarga de estudiar estas propiedades, y Desargues se considera su fundador dado que escribió el primer tratado sobre el tema, en 1639, en el cual se encuentra uno de los primeros teoremas proyectivos:

Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A' , B y B' , C y C') se cruzan en un punto O , entonces los pares de lados correspondientes se intersectan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

Teorema de Desargues

La figura 6.21 nos puede ayudar a comprender el enunciado del teorema.

¿Qué es lo que hace a este teorema diferente a los que se prueban en la geometría euclidiana clásica? Lo principal es que su enunciado se puede considerar como una descripción de una situación tridimensional: los triángulos pueden estar en dos planos diferentes, y la figura 6.21 es una representación de cómo los ve un observador desde el punto O (en lugar de un cono, podemos pensar en una pirámide). Gracias a esto resulta un caso fácil de demostrar.

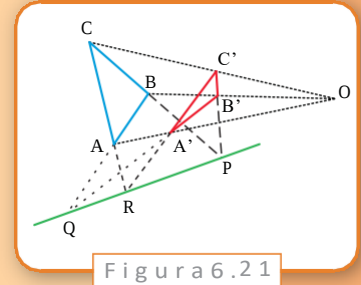


Figura 6.21

Cambiamos la perspectiva desde la que vemos la figura 6.21. En la figura 6.22 tenemos dos planos, el triángulo ABC en uno de ellos, π_1 , y $A'B'C'$ en el otro, π_2 . Los dos planos se cortan en una recta (si fuesen paralelos, los pares de lados no se intersectarían). Veamos ahora la demostración.

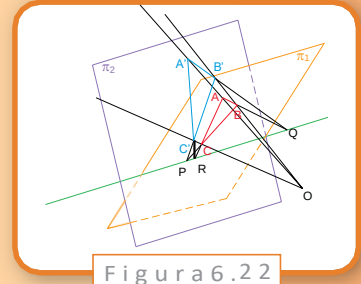


Figura 6.22

Supongamos que las rectas AA' , BB' y CC' se cruzan en O entonces las rectas AB y $A'B'$ están en un mismo plano (una cara de la pirámide) y por hipótesis se intersectan en un punto que llamaremos Q . De la misma manera AC y $A'C'$ se intersectan en R , y BC y $B'C'$ lo hacen en P .

Como AB , BC , CA están en π_1 entonces los puntos P , Q , y R están en π_1 ; además, como $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ están en π_2 , entonces P , Q , y R , están también en π_2 . O sea que P , Q y R están a la vez en π_1 y π_2 , entonces están en la intersección de ambos planos, que es una recta.

Demostración

En definitiva, para demostrar el teorema en el plano hay que “salir” a tres dimensiones y mirar el dibujo original en el plano como una proyección. Pero para esto

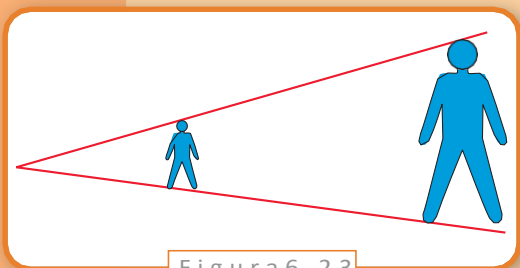


Figura 6.23

¿Podríamos distinguir cuál de los triángulos estamos viendo? No, para nuestros ojos son todos iguales ya que lo que el ojo mide es el ángulo entre los vértices y no el tamaño lineal (ver la figura 6.23).

es necesario definir qué significaba una proyección en términos un poco más formales, y es lo que haremos en la próxima sección.

Antes de hacerlo, démosle una última mirada a nuestro teorema, desde otro punto de vista. Supongamos que los triángulos estuvieran pintados sobre papeles lo suficientemente grandes para que no viéramos los bordes y los fuéramos viendo uno por uno desde el punto O.

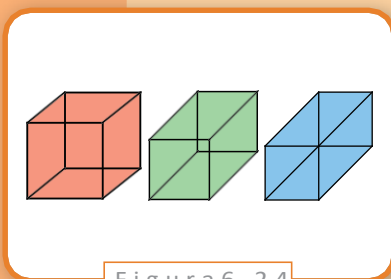


Figura 6.24

Para convencernos, hagamos el siguiente test: en la figura 6.24, ¿observa un hexágono o un cubo?

Lo que ocurre en este caso es que nuestro cerebro tiende a considerar a las figuras simétricas como bidimensionales, por lo que pierden su sentido de perspectiva. Así es como se logra el efecto de profundidad, los objetos no salen del plano pero nuestro cerebro lo interpreta de esta manera gracias a experiencias previas, a tonos de luz, comparaciones, agrupaciones y otras “herramientas” de la percepción.

Porejemplo, cuando la Luna recién aparece sobre el horizonte nos parece que es más grande que cuando se encuentra en lo alto del cielo, pero en realidad el ángulo visual no varía. Ante un mismo estímulo el cerebro responde de dos maneras diferentes.

6.3. La geometría proyectiva

6.3.1. Proyecciones

Supongamos que tenemos dos planos π y π' en el espacio. Entonces podemos hacer una proyección central de π en π' desde un centro O dado.

Definición: (proyección central)

Dado un par planos de π en π' y un punto O fuera de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P' en π' , que está en la misma recta que pasa por P y por O.

Es decir, conectamos los puntos P y O con un segmento, y buscamos su intersección con el plano π' . También se puede hacer una proyección paralela, donde las rectas de proyección son todas paralelas.

Dado un par planos de π en π' y una recta dada que los interseque pero no pertenezca a ninguno de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P' en π' que está en la paralela a la recta dada que pasa por P .

Definición:
(proyección paralela)

Ambas proyecciones se muestran en la figura 6.25.

Algunas propiedades básicas que surgen de estas definiciones son las siguientes:

- Un punto se proyecta en un punto.
- Una recta se proyecta en una recta.
- Si un punto está en una recta, la proyección del punto estará en la proyección de la recta y si una recta pasa por un punto la proyección de la recta pasará por la proyección del punto.
- Si tres puntos están en una misma recta, sus proyecciones estarán en una misma recta.
- Si tres rectas pasan por un mismo punto, sus proyecciones pasarán por un mismo punto.

Es importante notar que en la demostración del teorema de Desargues en el espacio se utilizó que la proyección era central, y que los pares de lados correspondientes no eran paralelos (así las prolongaciones se intersectaban). Para eliminar estas hipótesis deberíamos hacer una demostración nueva.

Este tipo de situaciones se repiten constantemente cuando se trata de teoremas de la Geometría Projectiva, que suelen no involucrar longitudes pero sí intersecciones. El gran aporte de Desargues fue encontrar la manera de que todos esos casos especiales cayeran dentro de un único caso general. ¿Cómo lo hizo? Amplió el sentido de “punto” y de “recta” de manera que cumplieran dos objetivos esenciales:

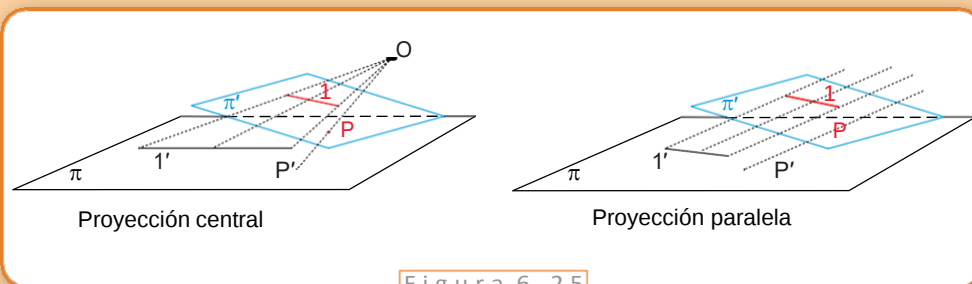


Figura 6.25

- Que siguieran valiendo los primeros 4 postulados de Euclides, con lo cual valdrían todos los teoremas demostrados usando esos postulados.
- Que dos rectas paralelas se intersecaran en un único punto.

6.3.2. Las geometrías no-euclidianas.

Ya vimos los primeros cinco postulados de Euclides en el capítulo 2:

1. Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta..
2. Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.
3. Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Durante siglos los matemáticos creyeron que, en realidad, el quinto postulado podía ser demostrado en base a los demás. Gracias a estos esfuerzos lo que se consiguió fueron diferentes enunciados que eran equivalentes al original; o sea, eran verdaderos si éste lo era pero no eran demostrables en sí mismos. Ya vimos uno en el capítulo anterior, cuando analizamos la geometría esférica. Listemos aquí distintos enunciados equivalentes:

- Dos rectas paralelas son equidistantes.
- Si tres puntos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta.
- Si una recta encuentra a una de dos paralelas, encuentra necesariamente a la otra. Esto también puede enunciarse diciendo que dos rectas paralelas a una tercera son siempre paralelas entre sí.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.

- Por un punto cualquiera, tomado en el interior de un ángulo, se puede siempre trazar una recta que encuentre a los dos lados del ángulo.
- Dado un triángulo cualquiera existe siempre uno semejante de magnitud arbitraria.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.
- Existen triángulos de área tan grande como se quiera.
- Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia.

Es muy instructivo analizarlos y demostrar que son equivalentes al quinto postulado. Para demostrar esta equivalencia, se deben demostrar dos cosas: primero, que el enunciado elegido se deduce de los cinco postulados de Euclides; segundo, que reemplazando el quinto postulado por el enunciado, el quinto postulado se puede demostrar a partir de los cuatro primeros y el que hemos elegido.

El problema era que algunos de estos enunciados parecían demasiado evidentes para nuestra percepción del mundo, no podían “no ser ciertos”. La “realidad” los apoyaba.

Por ejemplo; según Euclides, dos rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no se encuentran al prolongarlas indefinidamente en ambas direcciones siendo una recta “aquella línea que yace igualmente respecto de todos sus puntos”. Con esta imagen, prácticamente estamos obligados a pensar en una recta como en una línea “derecha”. Pero, ¿qué pasa si deformamos el plano donde está contenida esa recta? Nuestra recta podría estar “curvada”, como lo vimos con los círculos máximos en el capítulo anterior. En esta nueva situación tiene mucho sentido plantearse si dos rectas podrían acercarse indefinidamente sin tocarse.

Después de siglos de tratar de demostrar el quinto postulado se empezó a pensar en probar por otro camino... suponer que no se podía demostrar. La idea era directamente negar el postulado y construir nuevamente la geometría sin él, con la esperanza de llegar a una contradicción. Lo que se logró fue la construcción de geometrías diferentes e igualmente válidas a la geometría euclidiana; todas ellas consistentes lógicamente (o compatibles) solamente si las otras también lo eran.

Partiendo de la formulación “por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta” podemos elegir dos caminos para la negación del postulado. Una opción es decir que no se puede trazar ninguna paralela, con lo que llegamos a lo que se denomina geometría elíptica (la geometría esférica es un caso particular, cuando la elipse es en realidad un círculo; podemos pensar en la geometría sobre una pelota de rugby). Otra opción es admitir la existencia de paralelas, pero que no sean únicas. Si se propone que por un punto externo a una recta pasan

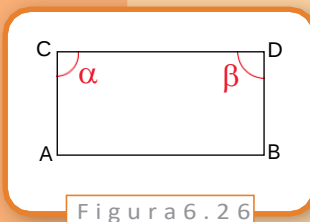


Figura 6.26

varias rectas paralelas se obtiene la geometría hiperbólica. Esta última es la que obtendríamos suponiendo que dos rectas paralelas se cruzan en un único punto.

Otra manera de llegar a las geometrías no euclidianas es usando el llamado Cuadrilátero de Saccheri (figura 6.26). Por los extremos de un segmento AB se trazan segmentos iguales AC y BD, ambos perpendiculares a AB y se unen los puntos C y D con una recta. Se demuestra que los ángulos α y β son iguales, pero las posibilidades para α y β son:

1. ambos ángulos son rectos.
2. ambos ángulos son obtusos.
3. ambos ángulos son agudos.

Éstas son conocidas como las hipótesis del ángulo recto, obtuso y agudo. Se puede demostrar que equivalen, en la forma del postulado “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos” a suponer dicha suma igual, mayor o menor que dos ángulos rectos.

Siguiendo la primera hipótesis se llega a la geometría euclidiana. Siguiendo la segunda hipótesis se deduce que las rectas deben ser finitas, lo que fue tomado en su momento como un absurdo; sin embargo, se trata de las rectas de la geometría elíptica (y en el caso particular de la geometría esférica ya vimos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor a dos rectos). Finalmente si se consideran los ángulos agudos se obtiene la geometría hiperbólica.

Observación: cuando asociamos la geometría euclidiana a la geometría de la realidad, estamos pensando en el espacio tridimensional en el que nos movemos y medimos distancias o ángulos. Sin embargo, nuestra interpretación visual de la realidad coincide más con la geometría proyectiva, porque vemos en perspectiva; no vemos el tamaño real de los objetos (como la Luna), ni tampoco su forma verdadera. Como hemos visto en la sección de anamorfosis, nuestra ubicación -el punto de vista- influye en la forma o el tamaño que percibimos. Por otra parte, ya vimos que si necesitamos mediciones a gran escala sobre la superficie de la Tierra, su curvatura juega un papel importante y, en ese caso, la geometría que nos sirve es la esférica.

6.4. Los axiomas de la geometría proyectiva

Para seguir adelante en la construcción de nuestra geometría tenemos que decidir cuál es el punto donde se cruzan dos rectas paralelas. Nuevamente, los ejemplos de la pers-

pectiva en el arte o el de las vías del tren nos sirven: muy lejos o en el “infinito”... y eso funciona. Agregaremos el punto del infinito. Primero, agreguemos algunas definiciones que simplifiquen el lenguaje.

Se dice que tres puntos son <i>colineales</i> si están en una misma recta.	Definición
Se dice que tres rectas son <i>concurrentes</i> si pasan por un mismo punto.	Definición
Cuando un punto pertenece a una recta, o una recta pasa por un punto, decimos que son <i>incidentes</i> .	Definición

Tendremos ahora otro lugar donde hacer geometría con los nuevos elementos que agregamos: será el plano proyectivo. Este plano está formado por los puntos y rectas del plano de la geometría usual (de Euclides) y los nuevos puntos del infinito.

Lo que queremos que se cumpla es lo siguiente:

- Que cada recta del plano usual tenga asociado un punto ideal (punto en el infinito).
- El punto ideal de una recta pertenecerá a todas las rectas paralelas a la dada y a ninguna otra (todas las rectas paralelas a una dada se encuentran en este punto).

Para lograrlo, basta con pedir que se cumplan los dos siguientes axiomas:

<i>Dados dos puntos existe una única recta incidente a ambos.</i>	Axioma 1
<i>Dadas dos rectas existe un único punto incidente a ambas.</i>	Axioma 2

Hasta ahora nos preocupamos porque todas las rectas pudieran intersectarse, pero también tiene que cumplirse el viejo axioma de que por dos puntos pase siempre una única recta. Cuando estos puntos son dos puntos ideales, la recta no puede ser una recta usual ya que ésta tiene un único punto ideal. Lo más sencillo es introducir una recta ideal, formada por todos los puntos ideales, la recta del infinito. Una manera muy gráfica de pensar en ella es asociarla a la recta del horizonte.

Faltaría ver si estos cambios afectan a las definiciones de proyección, pero en realidad el nuevo plano nos ayuda, ya que lo que antes era una proyección paralela ahora es una proyección central desde un punto ideal (como los rayos que proyectan son paralelos entre sí, se cruzan en el punto ideal).

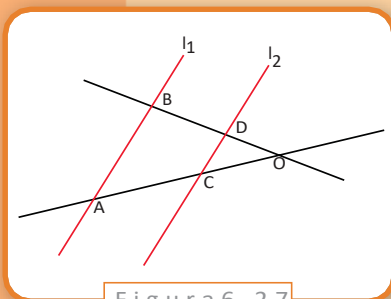


Figura 6.27

Por ejemplo, en los dibujos en perspectiva estábamos proyectando desde el punto de fuga y nuestro horizonte correspondía a la recta del infinito. En la figura 6.1, el punto de fuga es un punto ideal.

Una vez definido el espacio donde la geometría proyectiva tiene sus figuras, vamos a tratar de descubrir las propiedades que se preservan si proyectamos esas figuras desde cualquier punto. Y ya vimos que, por ejemplo, incidencia, concurrencia y colinealidad son propiedades proyectivas. O sea que el teorema de Desargues en el espacio es un teorema de la geometría proyectiva: lo único que usamos para demostrarlo fueron intersecciones (incidencias).

En el caso del teorema en el plano, proyectar puede ayudarnos más todavía. Como las propiedades se mantienen en cualquier figura a la que lleguemos usando proyecciones, si encontramos alguna para la que quede demostrado, entonces vale para todas.

Con todas estas nuevas definiciones se puede probar Desargues en el plano con poco trabajo. Para esto vamos a usar la siguiente versión del Teorema de Thales, correspondiente a la figura 6.27.

Teorema

Sean dos rectas que se cruzan en un punto O , y que intersecan un par de rectas l_1 y l_2 en los puntos A, B, C, D . Entonces, l_1 es paralela a l_2 si y sólo si

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

Ejercicio 2

Demstrar este teorema.

Veamos ahora otra demostración del Teorema de Desargues:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A' , B y B' , C y C') se cruzan en un punto O , entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

Demostración

Supongamos que podemos llegar a la situación de la figura 6.28 (donde Q y R están en el infinito) por alguna proyección de la figura original. Si el teorema vale en esta situación, entonces vale en general.

Para ver que P, Q , y R son colineales, como R y Q están en el infinito, bastaría con ver que P está en el infinito también ($B'A'$ paralela a BA). Lo que queremos ver es que los tres puntos están en la recta ideal. Para eso, en la figura 6.29 introducimos las distancias a los puntos A, B, C, A', B', C' desde O .

Por el Teorema anterior, si podemos probar que $v/u = s/r$ entonces $B'A'$ es paralela a BA .

Pero sabemos que $A'C'$ es paralela a AC y que $C'B'$ es paralela a CB entonces, utilizando nuevamente el Teorema,

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{r}$$

y también

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$$

Por lo tanto, igualando v hemos obtenido que $\frac{v}{u} = \frac{s}{r}$.

Ahora veamos cómo llegar a esta figura utilizando proyecciones.

Para que una proyección mande Q y R al infinito tenemos que elegir el centro de proyección O' de manera que esté en un plano π que también contenga a Q y R (ver figura 6.30). Entonces, si hacemos la proyección sobre un plano paralelo a π como π' , las rectas que unen O' con R y Q son paralelas al plano π' , y por lo tanto lo cortan en el infinito.

A pesar de lo novedoso de la idea de Desargues, sólo interesó a un pequeño grupo de matemáticos ya que en ese momento la geometría analítica estaba en pleno desarrollo. En ese grupo se encontraba Blaise Pascal, quien con sólo 16 años y siguiendo el trabajo de Desargues escribió su primer tratado de matemática, y en él probó un teorema que llamó *mysterium hexagrammicum* y que ahora lleva su nombre.

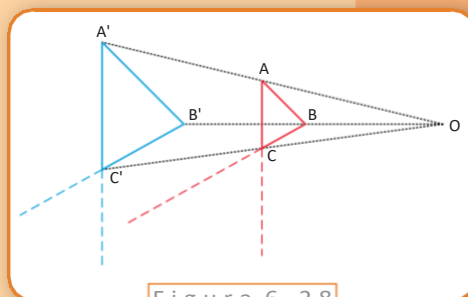


Figura 6.28

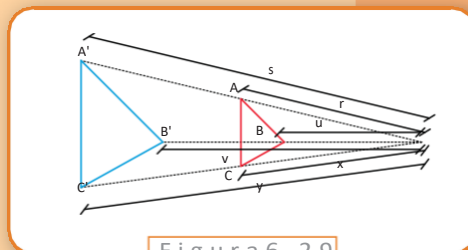


Figura 6.29

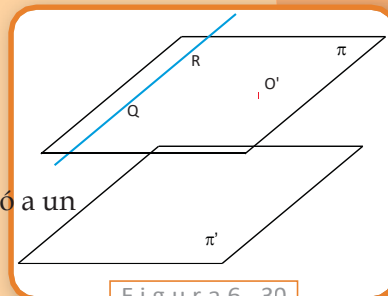


Figura 6.30

Si los vértices de un hexágono yacen alternativamente en un par de rectas que se intersectan, entonces las tres intersecciones P , Q y R de los lados opuestos del hexágono son colineales.

Teorema de Pascal

Como se puede ver en la figura 6.31, se trata de un hexágono en el sentido amplio, o sea que puede intersectarse a sí mismo.

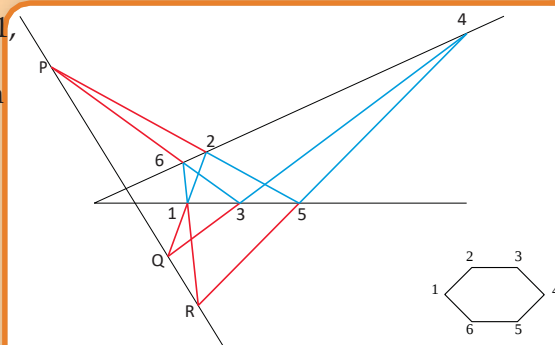


Figura 6.31

Ejercicio 3 | Demostrar el teorema de Pascal.

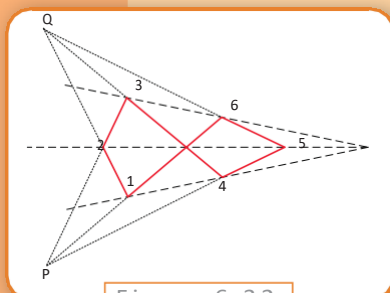


Figura 6.32

Casi 160 años después, con Gaspard Monge y su discípulo Charles Julien Brianchon, logra renacer la geometría proyectiva. En el caso de Monge, quien era oficial del ejército de Napoleón y físico además de matemático, su aporte principal fue a la geometría descriptiva, aquella que investiga sobre técnicas de tipo geométrico que permiten representar objetos tridimensionales sobre superficies planas y la forma de recuperar las características de estas figuras en dos dimensiones en su correspondiente del espacio. Por su parte Brianchon logra demostrar el teorema dual del teorema de Pascal, que reproducimos en la figura 6.32:

Teorema de Brianchon

Si los lados de un hexágono pasan alternativamente por dos puntos P y Q fijos, entonces las tres diagonales que unen pares de vértices opuestos del hexágono son concurrentes.

Ejercicio 4 | Demostrar el teorema de Brianchon

La relación entre los teoremas de Pascal y de Brianchon, que hemos denominado *dual*, es un concepto profundo que aparece con la geometría proyectiva. Los teoremas duales surgen de reemplazar “vértices” por “lados”, “yacen alternativamente” por “pasan alternativamente”, “puntos” por “rectas” y “son colineales” por “son concurrentes”. Todo teorema que involucra estos términos puede dualizarse, y obtenemos así un nuevo teorema.

Por ejemplo, en la geometría euclídea sabemos que por dos puntos siempre pasa una recta (dos puntos son colineales). Pero no siempre dos rectas se intersecan (no siempre son concurrentes). En cambio, en el plano proyectivo son enunciados duales:

Dos puntos son colineales
Dos rectas son concurrentes.

Esto no es casualidad, ni ocurre para estos casos particulares, sino que ocurre para todos los teoremas de la geometría proyectiva. Este hecho fue descubierto por Jean-Victor Poncelet, otro militar francés, quien escribió un tratado de geometría proyectiva en la prisión de Saratoff, durante la campaña de Napoleón contra Rusia, entre 1813 y 1814.

Poncelet descubrió esta relación dual entre puntos y rectas, así como algunas de sus operaciones. Por ejemplo, trazar una recta por un punto es la operación dual de marcar un punto en una recta.

Principio de dualidad de Poncelet

El dual de cualquier teorema de la geometría proyectiva, también es un teorema de la geometría proyectiva.

Es decir, si un teorema es verdadero entonces su teorema dual también lo es. Esto sólo puede valer donde todo elemento tiene su dual. En la geometría clásica, por ejemplo, no existe el dual de un ángulo. Esto proviene de una característica particular de la construcción del plano proyectivo, pero para verlo más claramente era necesario salir de los métodos axiomáticos y de alguna manera incluir los métodos algebraicos y numéricos que siempre se habían rechazado en este tipo de geometría. Esto se logró gracias a Julius Plücker, Augustus Möbius y Étienne Bobillier, cuando alrededor de 1829 y en medio de una pelea entre matemáticos “sintéticos” (aquellos que defendían una geometría conceptual, basada en los axiomas) y “algebraicos” (quienes proponían introducir coordenadas) introdujeron el uso de las coordenadas homogéneas en la geometría proyectiva.

6.5. Coordenadas homogéneas

Hemos visto brevemente el uso de coordenadas en la geometría euclidiana y en la geometría esférica, como así también recorrimos algunos de los principales sistemas de coordenadas (cartesianas, polares). Las coordenadas homogéneas juegan el mismo papel de las coordenadas cartesianas, pero parametrizan el plano proyectivo. Son ternas de números que identifican sus puntos, por lo que pusieron al alcance de los geómetras todas las herramientas algebraicas y analíticas que antes no tenían.

En general, las coordenadas de un objeto geométrico son cualquier conjunto de números que caracterice ese objeto de forma única. En el plano usual, con las coordenadas cartesianas se necesitan dos números para identificar un punto; por ejemplo, podemos elegir el primero para la posición horizontal y el segundo para la vertical (ver figura 6.33).

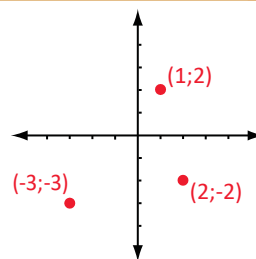


Figura 6.33

En el caso de las coordenadas polares, dábamos el ángulo con el eje X y la distancia al origen.

Pero para el plano proyectivo tendríamos problemas con los puntos del infinito. Sin embargo, la solución viene de “salir” del plano para agregar una nueva coordenada que nos diga si el punto es ideal o no.

Pensemos en el plano proyectivo π ubicado en el espacio tridimensional como se muestra en la figura 6.34

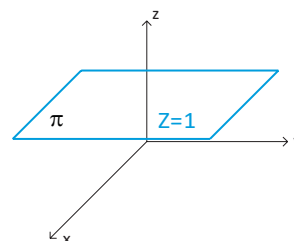


Figura 6.34

O sea, si la tercera coordenada de un punto en el espacio es la altura, los puntos del plano euclídeo usual serían de la forma $(x, y, 1)$, pero esto no alcanza para los puntos en el infinito: si un punto del infinito estuviese indicado como $(a, b, 1)$, coincidiría con el punto del plano de coordenadas cartesianas (a, b) .

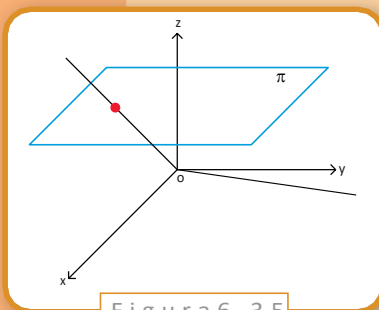


Figura 6.35

Volvamos entonces a la idea de proyección. Si nuestro centro es el origen de coordenadas $O = (0,0,0)$, entonces para cualquier punto de π tenemos una recta que pasa por O . Y para los puntos en el infinito, tenemos rectas paralelas a π que pasan por el origen (ver figura 6.35)

Las coordenadas homogéneas de cualquier punto P del plano proyectivo van a ser las coordenadas en el espacio de cualquier punto Q (distinto del origen) que esté en la recta que une a P con O . Si P es ordinario podemos elegir, por ejemplo, $(a,b,1)$; pero en general sirve cualquier terna de la forma

$$(ta, tb, t) \text{ con } t \neq 0.$$

(Estamos usando aquí la ecuación paramétrica de una recta en el espacio.) En otras palabras, a cada punto del plano le hemos asociado una recta. En el caso de un punto en el infinito, lo representaremos como $(x, y, 0)$. Podemos pensar que (x, y) nos da la dirección de las rectas paralelas que se cruzarían en este punto ideal P .

Entonces, a cada punto del plano le hemos asignado una recta del espacio tridimensional. ¿Y qué les toca a las rectas? Veamos la figura 6.36

Hemos dicho que a cada punto de L le correspondía una recta del espacio pasando por el origen. Entonces, juntando todas estas rectas podemos pensar que a L le corresponde, en el espacio, un plano. Este plano pasa por el origen y contiene la recta L .

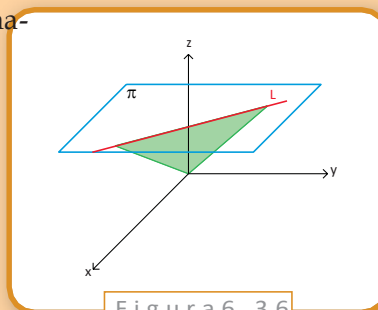


Figura 6.36

Deberíamos darle a L las coordenadas de ese plano en el espacio. Esto se aclara cuando miramos la ecuación que satisface un plano: un punto (x, y, z) está en un plano que pasa por el origen cuando es solución de una igualdad del tipo

$$ax + by + cz = 0$$

donde a, b y c son números que nos dicen cómo es el plano (qué “inclinación” tiene).

Así que podemos definir las coordenadas de L como la terna de números (a, b, c) que corresponden a la ecuación del plano que pasa por el origen y que tiene al vector (a, b, c) como normal. Esto incluye la recta en el infinito, porque en este caso el plano que da las coordenadas es el plano paralelo a π que pasa por el origen de ecuación $z=0$.

Estas coordenadas nos muestran cómo rectas y puntos pueden intercambiar lugares en la geometría proyectiva.

En primer lugar, puntos y rectas quedan definidos por ternas de números (distintos de $(0,0,0)$), es decir que si nos dan una terna de coordenadas, no podemos distinguir si son de una recta o de un punto.

En segundo lugar, si tenemos dos ternas de coordenadas (x, y, z) y (a, b, c) que cumplen que $ax + by + cz = 0$ (o, equivalentemente, $xa + yb + zc = 0$). ¿Diríamos que el punto de coordenadas (x, y, z) pertenece a la recta de coordenadas (a, b, c) o que el punto de coordenadas (a, b, c) pertenece a la recta de coordenadas (x, y, z) ? Todo depende de la interpretación que queramos darle y no de una diferencia real.

Observemos también que las ternas que definen tanto a puntos como a rectas están asociadas con direcciones, la dirección de la recta que pasa por el origen para los puntos, y la normal al plano para las rectas.

Recordemos que una de las propiedades básicas de las proyecciones era que una recta se proyectaba en otra recta. Gracias al sistema de coordenadas que introducimos, ahora podemos darle una forma matemática a la proyección. Una recta en el plano proyectivo está dada por las coordenadas (ta, tb, t) con $t \neq 0$, y queremos que su proyección sea otra recta del plano proyectivo dada por (tc, td, t) con $t \neq 0$. Las únicas funciones que cumplen con esta propiedad, sin contar las translaciones, son las transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales dilatan y contraen al espacio de una manera tal que las propiedades proyectivas se conservan. ¿Existirá algún grupo de funciones que tampoco cambien el tamaño de los objetos? La respuesta es que sí, y son los movimientos rígidos: las rotaciones y reflexiones; que son un subconjunto de las transformaciones lineales.

En 1872, y a los 23 años de edad, el matemático alemán Félix Klein presentó el llamado *Programa de Erlangen*, donde mostraba que todas las geometrías podían definirse de una manera distinta a la axiomática; cada geometría abarcaba el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes bajo un grupo dado de transformaciones. En el caso de la geometría euclídea, son los movimientos rígidos; en el caso de la geometría proyectiva, son las transformaciones lineales.

6.6. Habitación de Ames

Una habitación de Ames es una ilusión óptica tridimensional, donde una persona parece cambiar de tamaño a medida que se mueve lateralmente desde una pared a la otra.

La ilusión se vale del hecho que nuestro cerebro cree ver una habitación cuadrada cuando en realidad el cuarto está deformado de manera que una esquina está más alejada. Esto sucede porque el ojo no recibe información sobre el tamaño de los objetos sino sobre el ángulo que abarca su imagen en la retina. Ya menciona-

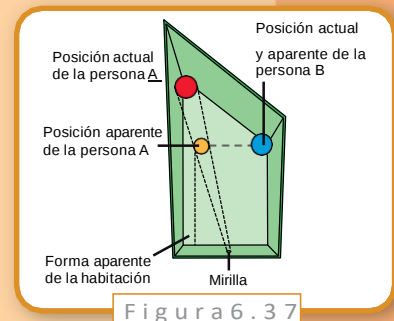


Figura 6.37

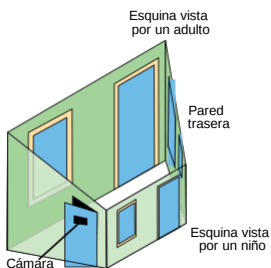
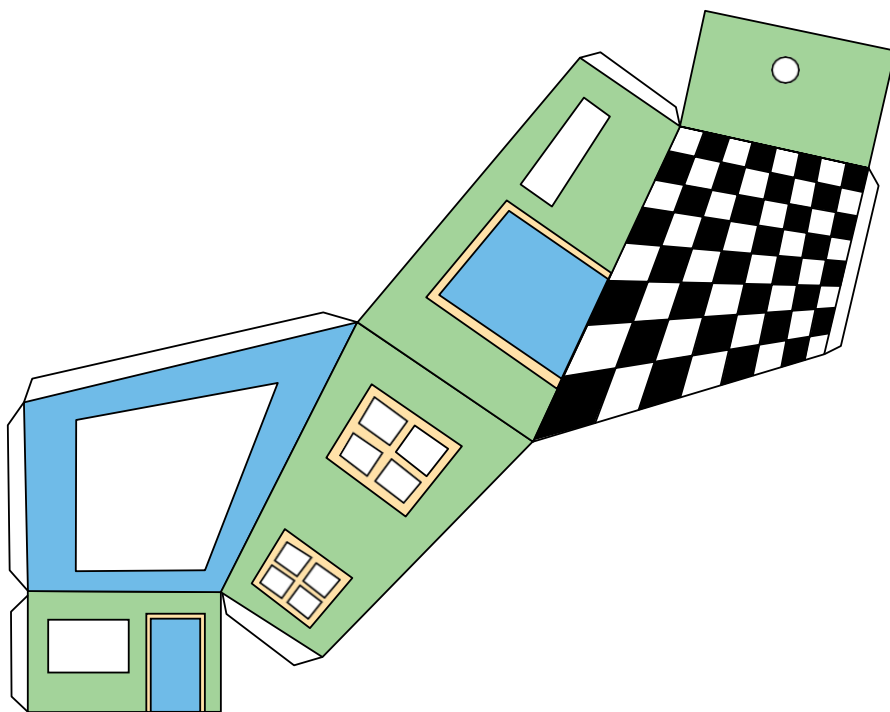


Figura 6.37

mos que vemos la Luna más grande en su proximidad con el horizonte; como la comparamos con algo que se encuentra más cerca automáticamente debe ser porque el tamaño es mayor. En este juego se basa la ilusión de la habitación de Ames, no nos damos cuenta que la persona se aleja, y por lo tanto la interpretación es que se achica.

Para construir una habitación de Ames pequeña se puede ampliar e imprimir la siguiente figura.



Una vez caladas las ventanas, el techo y el punto de observación (marcados con x), se arma y se pega. Se pueden pasar objetos no muy grandes por detrás de las ventanas para ver cómo cambian de tamaño o colocar distintos objetos dentro para compararlos.

Ahora, si se quiere construir una habitación de Ames de mayor tamaño es necesario un poco más de trabajo.

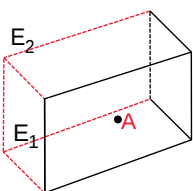


Figura 6.40

Queremos lograr que el observador situado en A vea una habitación normal. Entonces las esquinas del lado izquierdo y de la parte de atrás deberían ser E_1 y E_2 . Este es el lado que se construirá más atrás.

Marcamos la línea de visión de la esquina, L y elegimos cuán lejos queremos que se vea la esquina E_2 , en el punto P .

Como queremos que la unión de las dos paredes sea recta, nos queda determinada la posición de la falsa esquina E_1 , Q en la intersección de la vertical que baja de P al suelo. Observemos que quedan alineados el punto donde realmente estará la esquina de la habitación, el punto donde nosotros la veremos y nuestros pies.

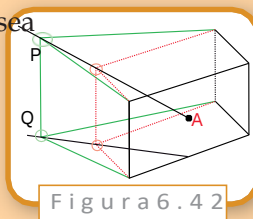


Figura 6.42

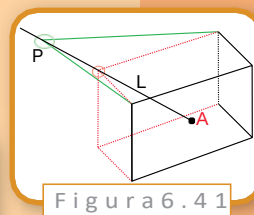


Figura 6.41

Para poder completar el diseño interior, necesitamos saber cómo se altera cada objeto que nos encontremos: las baldosas del piso, alguna ventana, una puerta. En general se utilizan objetos con bordes rectos para facilitar los cálculos.

Para lograr esto lo más conveniente es pensar que una transformación lineal T deforma el espacio de tal manera que manda las líneas rojas a las verdes. Para encontrarla usaremos que las transformaciones lineales quedan definidas dando su valor sobre una base.

Elijamos entonces un origen de coordenadas, por ejemplo nuestro origen se encontrará en la esquina inferior derecha de la parte frontal de la habitación. De esta manera es fácil interpretar la posición de todas las esquinas, en particular de E_1 y E_2 .

$$E_1=(x,y,0)$$

$$E_2=(x,y,z)$$

$$E_3=(x,0,0)$$

Si pensamos en estos puntos como vectores ya tenemos nuestra base y la transformación queda definida como la única transformación que cumple:

$$T(E_1)=Q$$

$$T(E_2)=P$$

$$T(E_3)=E_3$$

Veamos un ejemplo, si consideramos una habitación original de 4 m de frente, 4 m de profundidad y 2,5 m de altura tenemos

$$x=4$$

$$y=4$$

$$z=2,5$$

Entonces

$$E_1=(4;4;0)$$

$$E_2=(4;4;2,5)$$

$$E_3=(4;0;0)$$

Y por lo tanto nuestra transformación cumple que

$$T(4;4;0)=Q$$

$$T(4;4;2,5)=P$$

$$T(4;0;0)=(4;0;0)$$

Ahora tenemos que elegir P en la línea de visión que corresponde a E_2 , o sea P tiene

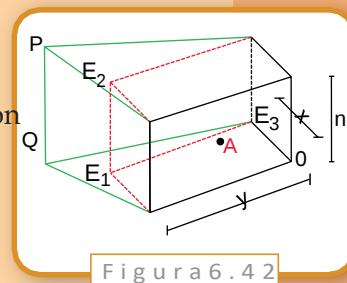


Figura 6.42

que pertenecer a la recta que pasa por E_2 y A. Consideremos un punto de observación centrado y a 1,7m del piso, o sea

$$A=(0;2;1,7)$$

Los puntos (a,b,c) que pertenecen a la recta que pasa por E_2 y A son de la forma

$$(a,b,c) = t(4;2;0,8) + (4;4;2,5)$$

Para $t>0$, obtendremos puntos “detrás” de E_2 . Si elegimos $t=0,5$ obtendremos $P=(a,b,c)=(6;5;2,9)$ y como Q se encontraba bajando desde P en forma vertical nos queda $Q=(6;5;0)$.

De esta manera, cuando una persona camine por el fondo de la pieza, se estará alejando 2m hacia atrás y 1m en sentido lateral.

Obtuvimos entonces los últimos datos necesarios para encontrar T

$$T(4;4;0) = (6;5;0) \quad T(4;4;2,5) = (6;5;2,9) \quad T(4;0;0) = (4;0;0)$$

T está dada por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 0,5x_2; 1,25x_2; 1,16x_3)$$

Con esta función podemos terminar de determinar la posición correcta para cada objeto o figura que queramos agregar, como por ejemplo un cuadro en la pared posterior. Basta con ubicar las coordenadas de los vértices en la habitación original y ver dónde los ubica nuestra transformación.

Veamos cómo obtener esta última expresión.

Por definición una transformación lineal cumple que:

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$

$$T(\lambda u)=\lambda T(u)$$

donde u y v son vectores (ternas de números en nuestro caso) y λ es un número cualquiera.

Queremos encontrar una expresión para $T(x,y,z)$ sabiendo que

$$T(4;4;0)=(6;5;0) \quad T(4;4;2,5)=(6;5;2,9) \quad T(4;0;0)= (4;0;0)$$

Y que los vectores $(4;4;0)$, $(4;4;2,5)$ y $(4;0;0)$ forman una base, o sea que dado un vector (x,y,z) cualquiera, podemos encontrarle una única terna de números (α, β, γ) que cumple

$$(x,y,z) = \alpha(4;4;0) + \beta(4;4;2,5) + \gamma(4;0;0)$$

Para eso igualamos coordenada a coordenada, obteniendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \alpha(4;4;0) + \beta(4;4;2,5) + \gamma(4;0;0) \\ &= (4\alpha + 4\beta + 4\gamma; 4\alpha + 4\beta; 2,5\beta)\end{aligned}$$

$$x = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma \quad (I)$$

$$y = 4\alpha + 4\beta \quad (II)$$

$$z = 2,5\beta \quad (III)$$

De III tenemos que $\beta = 0,4z$

Reemplazando en II podemos despejar $4\alpha = y - 4\beta = y - 1,6z$

Entonces $\alpha = 0,25y - 0,4z$

Reemplazando ahora en I obtenemos $4\gamma = x - 4\alpha - 4\beta = x - (y - 1,6z) - 1,6z = x - y$

Entonces $\gamma = 0,25x - 0,25y$

Volvamos ahora a nuestra función T

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= T(\alpha(4;4;0) + \beta(4;4;2,5) + \gamma(4;0;0)) \\ &= \alpha T(4;4;0) + \beta T(4;4;2,5) + \gamma T(4;0;0)\end{aligned}$$

Por ser una transformación lineal.

Usando ahora los datos que tenemos queda

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= \alpha(6;5;0) + \beta(6;5;2,9) + \gamma(4;0;0) \\ &= (0,25y - 0,4z)(6;5;0) + 0,4z(6;5;2,9) + (0,25x - 0,25y)(4;0;0) \\ &= (1,5y - 2,4z; 1,25y - 2z; 0) + (2,4z; 2z; 1,16z) + (x - y; 0; 0) \\ &= (x + 0,5y; 1,25y, 1,16z)\end{aligned}$$

Capítulo 7

Que no entre quien no sepa topología

Pablo Amster

7.1. Revelación de un amor

Corría el año 1629 cuando el filósofo inglés Thomas Hobbes se encontraba de visita en París. Entonces tuvo una sorprendente revelación, que habría de cambiar el rumbo de su pensamiento. Según relata un amigo suyo, J. Autrey, en *A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679*:

Tenía 40 años cuando por primera vez se fijó en la geometría; y ello aconteció accidentalmente. Encontrábase en la biblioteca de un caballero; abiertos estaban los Elementos de Euclides, y fue la Proposición 47, El. libri I. Leyó la Proposición. Por Dios (pues de cuando en cuando gustaba de proferir un exaltado Juramento, para mayor énfasis) ¡esto es imposible! Leyó pues la Demostración, en la que aludía a una Proposición previa; proposición que también leyó. La cual mencionaba otra anterior, que leyó también. et sic deinceps [y así sucesivamente] hasta quedar al fin demostrativamente convencido de aquella verdad. Ello le hizo enamorarse de la geometría.

A partir de ese día, comenzó a proclamar cosas tales como: “No entiende teología quien no entiende filosofía” y “no entiende filosofía quien no sabe matemáticas”, que deben haber causado cierta inquietud entre los filósofos (y más aún entre los teólogos).

Para el lector que no se conozca de memoria los cinco libros de Euclides, conviene aclarar que la tan misteriosa “Proposición 47” no es otra que el más célebre enunciado geométrico de todos los tiempos, aquel que se conoce como *Teorema de Pitágoras*. Y las proclamas de Hobbes remiten sin duda a la inscripción que se hallaba a la entrada de la renombrada Academia de Platón: “Que no entre quien no sepa Geometría”.

Esta puede parecer una acogida un tanto extraña para el visitante desprevenido, bastante diferente de las frases de bienvenida que suelen leerse en los felpudos. Sin embargo, refleja toda una doctrina. Para Platón, el mundo real es una copia de un mundo de ideas, que se rige por la idea del Bien y fue construido por un Demiurgo o creador. Pero la piedra fundamental de su creación es matemática; más concretamente, podemos decir que no se trata de una sino de cinco piedras. En efecto, el principio fundamental de la creación lo constituyen aquellos cinco poliedros regulares que hoy se conocen como *cuerpos platónicos*: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Los cuatro primeros corresponden a los cuatro elementos (fuego, tierra, aire y agua), mientras que el último se reserva para dar al universo el toque final, su última pincela-

da: como dice el *Timeo* de Platón, “Dios se sirvió de él [el dodecaedro] para componer el orden final del Todo”. La importancia que se concedió a estos cinco sólidos es tan grande, que hay quienes sostienen que los Elementos de Euclides son apenas una narración detallada (y sin duda excelente) de la teoría de los cuerpos platónicos.

A pesar de su aparente ingenuidad, la influencia de las ideas platónicas persiste hasta nuestros días¹; en cierto sentido, esa es la razón por la que la matemática tiene tanta presencia en los programas de estudio, desde el primer año de la escuela hasta el último.

Pero los tiempos han cambiado desde entonces. Para los griegos, la matemática se reducía casi exclusivamente a la geometría: lo demás era apenas un apoyo, un puñado de instrumentos auxiliares para estudiar las verdades concernientes a ese mundo minuciosamente descrito en los Elementos. Sin embargo, la matemática actual se compone de muy diversas ramas de gran importancia: incluso la propia geometría, se ha extendido y desarrollado a tal punto que la geometría “clásica” o euclidiana es tan sólo una pequeña porción. Y, de alguna forma, puede decirse que la auténtica base del pensamiento geométrico se encuentra en una de estas nuevas ramas, que comenzaría surgir unos veinte siglos después de Euclides. En efecto, fue el gran matemático y filósofo G. Leibniz quien esbozó sus primeros fundamentos en unas cartas que escribió allá por 1679 y le dio el nombre de *Analysis Situs*; luego Euler avanzó otro poco. Pero recién en el siglo XIX esta nueva rama cobraría un rol preponderante, con los trabajos de Möbius y en especial de Listing, quien le dio el nombre con el que hoy se la conoce: *Topología*.

En este capítulo presentaremos las ideas básicas de esta nueva y extraña “geometría”, en la que los objetos y las figuras parecen cobrar formas distintas. En especial, veremos que la topología prescinde por completo de la noción de *métrica* o distancia: las propiedades que estudia no son de carácter *cuantitativo* sino más bien *cualitativo*.

Ahora bien, a pesar de su gran nivel de abstracción, la topología posee numerosas aplicaciones en los más variados terrenos. En particular, en las próximas páginas mostraremos cómo es posible verificar a partir de ella un notable hecho de carácter puramente geométrico, en el más clásico sentido de la palabra: la inexistencia de otros poliedros regulares aparte de los mencionados por Platón. De algún modo, las aplicaciones de esta clase parecen confirmar la opinión de otro gran matemático, el francés Poincaré en su libro *Últimos Pensamientos*:

[...] es para favorecer tal intuición [la geométrica] que el geómetra tiene necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente. No es que quiera decir con esto que la geometría métrica reposa sobre la lógica pura, que en ella no intervenga ninguna verdad intuitiva, pero estas son intuiciones de otra naturaleza, análogas a las que desempeñan un papel esencial en aritmética y álgebra.

¹ El inglés Alfred Whitehead llevó esta aseveración al extremo, cuando anunció que “toda la filosofía occidental es apenas una colección de notas a la filosofía de Platón”. Como cabe imaginar, esta observación no cayó del todo bien a sus colegas filósofos.

Como sea, no deja de resultar sorprendente que un enunciado tan “métrico”, que se refiere a los cuerpos platónicos pueda comprobarse apelando a ideas tan no-métricas, de orden exclusivamente topológico. No es aventurado imaginar que, de haberse topado con una demostración así, Hobbes se habría enamorado también de esta cautivante disciplina, nacida cincuenta años después de su “exaltado Juramento”.

7.2. Débil es la geometría

En la sección previa hemos presentado a la topología como una suerte de “geometría no métrica”. Pero esto que parece un contrasentido refleja en realidad un aspecto profundo de la matemática, como veremos a continuación.

Para comenzar, recordemos aquella antigua frase que dice: la geometría es el arte de razonar sobre figuras mal hechas. Esto se ve cuando inferimos alguna propiedad a partir de un dibujo: trazamos unas líneas (acaso en la arena, intentando imitar a Arquímedes) y observamos que las alturas de un triángulo se cortan en un único punto, o que la recta tangente a una circunferencia resulta perpendicular al radio. Sin embargo, de algún modo, estamos razonando sobre figuras mal hechas, especialmente en el sentido platónico mencionado en la sección previa: los dibujos no concuerdan con los objetos perfectos, ideales de la geometría. Pero pese a su imperfección, el dibujo es una valiosa ayuda a nuestra intuición, pues nos permite vislumbrar ciertas propiedades. De alguna manera, nos convencemos de que el dibujo “mal hecho” nos dice algo que es cierto; entonces llega el momento de recurrir a los postulados geométricos, para efectuar la demostración como Euclides manda. Recién en ese momento podemos dar por válidas las propiedades intuitivas, presentidas en el dibujo.

Poincaré va un poco más allá, y se pregunta: ¿qué es una figura mal hecha? En la geometría euclidiana, dos figuras son equivalentes si se puede poner una sobre otra empleando únicamente rotaciones y traslaciones; desde este punto de vista hay que decir que el dibujo de la figura 7.1 es un círculo algo mal hecho.



Figura 7.1

En cambio, no lo es para la geometría proyectiva desarrollada en el capítulo anterior: un círculo es equivalente a una elipse porque, a grandes rasgos, una de las figuras es una “perspectiva” de la otra. Pero aun aceptando perspectivas tan amplias, todo el mundo pensará sin duda que la curva de la figura 7.2 es una circunferencia MUY mal hecha. Todo atisbo de geometría parece haber quedado olvidado en ese sinuoso recorrido que en casi nada se asemeja a la circunferencia original.

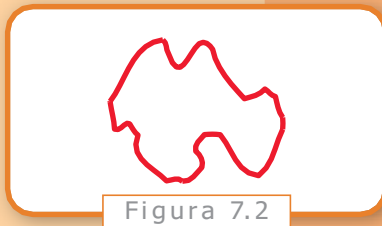


Figura 7.2

Sin embargo, para la topología todavía se trata de figuras equivalentes: como se puede sospechar, el secreto reside en el “casi” del párrafo previo. Poincaré lo presenta del siguiente modo:

Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo, realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas; las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido importunas desviaciones y presentan curvaturas malhadadas. Desde el punto de vista de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista del Analysis Situs.

Esto justifica un poco mejor nuestra anterior circunferencia tembleque, y sus malhadadas curvas: un artista plástico sentiría que esta copia tan mal hecha es un fracaso, capaz de motivarlo a “colgar los pinceles”. Sin embargo, las propiedades topológicas de la circunferencia se conservan: se trata de sus aspectos más esenciales; mejor dicho, los que hacen a su esencia topológica.

Según hemos mencionado informalmente, la topología pasa por alto las “cantidades” y sólo se fija en “cualidades”: dos objetos O_1 y O_2 son equivalentes siempre que se pueda pasar de uno al otro por medio de cierto tipo de transformación, denominada *homeomorfismo*. En términos más o menos rigurosos, se trata de una función $f: O_1 \rightarrow O_2$ que tiene las siguientes propiedades:

1. Es continua.
2. Es biyectiva.
3. La función inversa $f^{-1}: O_2 \rightarrow O_1$ es continua.

Para entender esto, resulta conveniente dar una noción aproximada de la idea de *continuidad*, que en el espacio común y corriente responde a la noción intuitiva de *deformación*, sin cortes o desgarraduras. En un curso básico de análisis matemático, se suele decir que una función es continua cuando a medida que nos aproximamos a cualquier valor x , los valores de la función se aproximan a su imagen $f(x)$. Pero esta definición, al margen de que le falta rigor, presenta el inconveniente de que la idea de “aproximarse” lleva implícita alguna noción de distancia. Para nuestros fines alcanza con aclarar que existe una manera de corregir este defecto, de modo que si cierta familia de puntos *converge* (en un sentido que se puede hacer preciso) a un valor x , entonces las respectivas imágenes de dichos puntos convergen a $f(x)$. Esta idea algo vaga es suficiente para entender que un homeomorfismo, que es una función continua “ida y vuelta” -es decir, con inversa continua- preserva determinadas propiedades de los objetos, los denominados *invariantes topológicos*. Una circunferencia conserva muchas de sus propiedades por más que se la estire, se la comprima un poco o se la deforme. Mientras no la cortemos o peguemos algunos de sus puntos entre sí, seguirá siendo una curva cerrada, sin autointersecciones. Esta particularidad que tiene la topología de ser tan “flexible” justifica aquel nombre coloquial con que también se la conoce: geometría del caucho. El resultado es una geometría con menos axiomas que la usual, que hace la vista gorda a las diferencias de orden “métrico” y sólo se concentra en otros aspectos más esenciales. Una geometría -por así decirlo- más permisiva: por eso suele decirse también que es una *geometría débil*.

7.3. Formulo, luego existo

En esta sección nos ocuparemos de una de las fórmulas más notables de la geometría de poliedros, conocida como *Fórmula de Euler* aunque, como sugiere el subtítulo, el primero que la demostró fue Descartes². Nuestra intención es mostrar que para cualquier poliedro simple vale la relación

$$V + C - A = 2,$$

en donde V , C y A denotan, respectivamente, el número de vértices, caras y aristas. Pero antes de dar una prueba debemos aclarar el contexto en el que vamos a trabajar. Sin entrar en mayores detalles, diremos que un poliedro simple es aquel que resulta topológicamente equivalente a una esfera: de alguna forma, podemos imaginar que lo “inflamos” hasta obtener una pelota de fútbol. En el fondo, esto no parece tan desacertado, pues uno de los diseños más comunes de tan popular objeto está basado en un poliedro que pensó y dibujó un gran hombre del Renacimiento: Leonardo da Vinci.

Para nuestros fines es conveniente observar que todo poliedro simple se puede llevar a un plano de la siguiente manera: basta con eliminar una de sus caras, y “estirarlo” sobre el plano como si se tratase de un antiguo pergamino. Por ejemplo, en la figura 7.3 tenemos un posible aplanamiento de un cubo.

Es claro que el proceso obliga a alterar algunas de las caras y aristas del poliedro, y en consecuencia las dimensiones también se modifican respecto del original. Sin embargo, el número de vértices y aristas se conserva. Aunque sí se produce un cambio en el número de caras, pues hemos perdido una en el camino: de este modo, la fórmula que debemos probar para esta clase de redes planas de polígonos es la siguiente:

$$V + C - A = 1.$$

Para ello, vamos a definir una serie de operaciones “admisibles”, que transformarán este gráfico en otro, para el cual la relación será obvia. Las operaciones son:

1. agregar una arista que una dos vértices no conectados previamente. De esta forma, V se mantiene, mientras que el número de caras y de aristas aumenta en una unidad. Esto quiere decir que el número $V + C - A$ no se modifica;
2. si un triángulo de la red comparte exactamente dos lados con el resto, se puede eliminar la arista no compartida, como se observa en la figura 7.4.

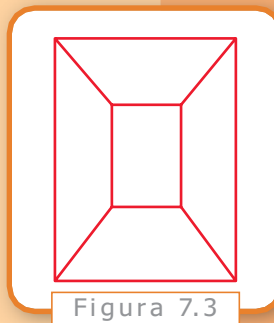


Figura 7.3



Figura 7.4

² El matemático alemán Felix Klein dijo una vez que si un teorema lleva el nombre de un matemático, entonces es seguro que este matemático no es su autor. Esto es algo exagerado, aunque hay ejemplos bastante notables, como el binomio de Newton, el triángulo de Pascal, o el propio teorema de Pitágoras.

El número de vértices queda igual, pero se elimina una cara y una arista: nuevamente, la cantidad $V + C - A$ se conserva.

3. si un triángulo de la red comparte un solo lado con el resto, se puede eliminar el vértice y las dos aristas correspondientes (ver figura 7.5)
De esta forma, el número de caras y el de vértices disminuye en una unidad, y el de aristas disminuye en dos unidades. Una vez más el valor $V + C - A$ permanece inalterado.



Figura 7.5

En base a estas operaciones, se puede proceder de la siguiente manera: en primer lugar, agregamos todas las diagonales que hagan falta, hasta que quede una red compuesta exclusivamente por triángulos. Luego vamos eliminando estos triángulos uno a uno, haciendo uso de las dos operaciones restantes. De este modo, llegaremos finalmente a un triángulo, en donde $V = 3 = A$, y $C = 1$, de modo que la fórmula es válida. Cabe aclarar que nuestro argumento intuitivo puede hacerse más riguroso, de modo que se convierta en una verdadera demostración. Se puede verificar, sin mucha dificultad, llevando a cabo la reducción descrita partiendo por ejemplo de un dodecaedro: en primer lugar, hay que aplanarlo, quitándole una de sus caras y estirando la figura hueca que queda, como si se tratase de un coqueto centro de mesa compuesto de pentágonos. Luego, bastará con agregar dos diagonales a cada pentágono para obtener una red de triángulos, que se irán desvaneciendo uno a uno por medio de las operaciones 2 y 3, como se observa en el siguiente gráfico:

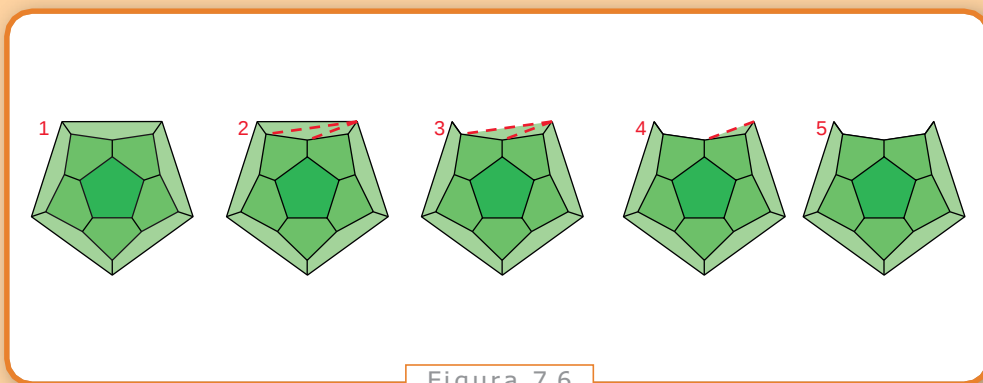


Figura 7.6

A modo de comentario final de esta sección, vale la pena observar que el valor 2 que aparece en la fórmula de Euler-Descartes puede verse directamente como una propiedad *de la esfera*, pues vale para cualquier subdivisión poligonal que se trace sobre ella. Se trata de un invariante topológico, que se denomina “característica”. La característica de una esfera (y de cualquier otra superficie equivalente a ella) es 2. Para otras superficies diferentes, dicho valor característico es distinto.

7.4. Los cinco platónicos

En esta sección brindaremos, tal como hemos anunciado, una demostración elemental de ese hecho geométrico que tanto cautivó a los griegos: existen solamente cinco poliedros simples regulares, vale decir, cuyas caras son polígonos regulares iguales. Nuestra herramienta principal va a ser topológica: la fórmula de Euler-Descartes.

En primer lugar, conviene efectuar una observación muy sencilla, que se desprende justamente de la regularidad de un poliedro: si el número de lados por cara es n , y el número (siempre el mismo) de aristas concurrentes en cada vértice es k , entonces vale

$$kV = 2A, \quad nC = 2A.$$

Esto es así, en efecto, ya que cada arista tiene dos vértices, y es compartida por exactamente dos caras. La fórmula de Euler-Descartes se reescribe entonces de la siguiente manera:

$$\frac{2A}{k} + \frac{2A}{n} - A = 2$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}.$$

Vamos a ver que k o n , al menos uno de ellos, tiene que ser igual a 3. En primer lugar, es evidente que $k, n \geq 3$, y si fueran ambos mayores se tendría entonces que $k, n \geq 4$. Resultaría entonces que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0,$$

lo que es absurdo.

Ahora, si $k = 3$, se obtiene que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{6 - n}{6n}$$

de donde se concluye que $n < 6$. Los valores posibles son:

- $n = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro.
- $n = 4$ y $A = 12$, que corresponden al cubo.
- $n = 5$ y $A = 30$, que corresponden al dodecaedro.

Observemos ahora que, en la fórmula anterior, los roles de k y n se pueden intercambiar. Por eso, si planteamos ahora $n = 3$ obtenemos las siguientes posibilidades:

- $k = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro;
- $k = 4$ y $A = 12$, que corresponden al octaedro;
- $k = 5$ y $A = 30$, que corresponden al icosaedro.

Claramente, el primer caso se repite, lo que hace un total de cinco poliedros. Quizás sea demasiado pronto para enamorarse, pero debemos reconocer que la demostración tiene su encanto...

7.5. Algunas actividades

La demostración de la sección previa es muy seductora, en especial porque da cuenta de un hecho sorprendente, que constituye uno de los pilares del misticismo platónico. Pero sin necesidad de ponernos tan místicos podemos ver, a modo de ejercicio, algunas otras propiedades geométricas que se deducen de la fórmula de Euler-Descartes. Como dice el matemático francés H. Lebesgue en su trabajo *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*, el número de propiedades que se puede obtener con el procedimiento que veremos es infinito; nos limitaremos a deducir apenas unos hechos básicos, tales como:

1. Todo poliedro simple contiene un triángulo o una tríada (es decir, un vértice con tres aristas concurrentes).
2. Todo poliedro simple tiene una cara con menos de 6 lados.

Se puede intentar una prueba, antes de continuar. En esencia, el razonamiento es muy similar al de la sección previa. Sin embargo, ahora no hay valores únicos de k y n ; por eso, resulta conveniente denominar por ejemplo C_n al número de caras que tienen n lados, y V_k al número de vértices que tienen k aristas concurrentes. Esto tiene sentido obviamente para $k, n \geq 3$, y además es claro que los números C_n y V_k sólo pueden ser distintos de 0 para un número finito de valores de n y k . Por ejemplo, supongamos que el valor máximo de lados por cara es n , y el valor máximo de aristas concurrentes por vértice es k ; se tiene entonces:

$$C = C_3 + C_4 + \dots + C_n, \quad V = V_3 + V_4 + \dots + V_k.$$

Por otra parte, contando la cantidad total de caras y vértices, se deducen las siguientes fórmulas:

$$3C_3 + 4C_4 + \dots + NC_n = 2A, \quad 3V_3 + 4V_4 + \dots + KV_k = 2A.$$

Multipliquemos a los dos términos de la fórmula de Euler-Descartes por 4; de esta forma resulta:

$$4(C_3 + \dots + C_n) + 4(V_3 + \dots + V_k) - 4A = 8.$$

A su vez, escribiendo

$$4A = 2A + 2A = 3C_3 + \dots + NC_n + 3V_3 + \dots + KV_k,$$

podemos reagrupar los términos de la igualdad anterior para obtener:

$$(4 - 3)C_3 + (4 - 4)C_4 + \dots + (4 - N)C_n + (4 - 3)V_3 + (4 - 4)V_4 + \dots + (4 - K)V_k = 8.$$

Finalmente, observemos que, en la última expresión, sólo resultan positivos los coeficientes correspondientes a C_3 y V_3 , ambos iguales a 1: esto prueba que

$$C_3 + V_3 \geq 8.$$

Como consecuencia, hemos demostrado la primera de las afirmaciones. En verdad, hemos demostrado algo más: en todo poliedro simple el número total de triángulos y tríadas es *por lo menos* igual a 8.

Para ver la segunda propiedad, podemos multiplicar ahora a la igualdad de Euler-Descartes por 6, y escribir $6A = 2A + 4A$, de modo que

$$6(C_3 + \dots + C_n) - 2A + 6(V_3 + \dots + V_k) - 4A = 12.$$

La identidad que se obtiene ahora es

$$(6 - 3)C_3 + (6 - 4)C_4 + \dots + (6 - n)C_n + (6 - 6)V_3 + (6 - 8)V_4 + \dots + (6 - 2k)V_k = 12.$$

En este nuevo caso, los únicos coeficientes positivos son los correspondientes a C_3 , C_4 y C_5 , y vale

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12.$$

Como antes, lo que se prueba es un enunciado algo más fuerte, más preciso que la afirmación original que pretendíamos demostrar: en todo poliedro simple, el número de caras de menos de 6 lados es como mínimo igual a 12.

A modo de ejercicio, se puede intentar probar el siguiente enunciado, concerniente a una clase especial de poliedros:

Ejercicio 1

En un poliedro simple cuyas caras no contienen triángulos o cuadriláteros (es decir, $C_3 = C_4 = 0$) y todos sus vértices son tríadas (es decir, $V = V_3$), existe siempre algún pentágono que toca a otro pentágono, o bien a un hexágono.

La demostración es algo más complicada, pero resulta de multiplicar a la fórmula de Euler-Descartes por 14, y escribir $14A = 4A + 10A$.

Capítulo 8

Tierra, Sol, Luna

Juan Pablo Pinasco

8.1. El problema

Estamos ahora en condiciones de resolver el problema planteado en la introducción:

Calcular las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

En principio, los valores que estamos buscando son cuatro, como ya señalamos:

- R , distancia entre el Sol y la Tierra.
- r , distancia entre la Luna y la Tierra.
- D , diámetro del Sol.
- d , diámetro de la Luna.

Problema

Antes de resolver el problema, es importante saber distinguir el tipo de *datos* que necesitamos, y cómo calcularlos. Por ejemplo, supongamos que el Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo rectángulo, como en la figura 8.1

Llamemos aquí $R = \overline{ST}$ y $r = \overline{TL}$.

Ahora, si conocemos el ángulo a y la distancia SL entre el Sol y la Luna, podemos utilizar los argumentos trigonométricos que ya vimos para calcular las distancias buscadas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{\overline{SL}}{\overline{ST}}\end{aligned}$$

Entonces, conociendo a y $\overline{SL}$, calculamos el seno de a , y luego despejamos la distancia entre la Tierra y el Sol $\overline{ST}$:



Figura 8.1

$$R = \overline{ST}$$

$$= \frac{\overline{SL}}{\text{sen}(a)}.$$

Ahora, conociendo $\overline{ST}$ podemos calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, $\overline{TL}$:

$$\cos(a) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$= \frac{\overline{TL}}{\overline{ST}}$$

porque en el paso anterior hemos calculado $\overline{ST}$, y despejamos

$$\overline{TL} = \cos(a) \cdot \overline{ST}.$$

Observemos que podemos escribir esta última ecuación como

$$r = \cos(a) \cdot R.$$

Lamentablemente, para resolver de esta forma el problema de las distancias, estamos suponiendo que tenemos cierta información, es decir que conocemos tres *datos* importantes:

1. los puntos S, T, L forman un triángulo rectángulo,
2. conocemos el ángulo a ,
3. conocemos la distancia $\overline{SL}$.

Sin embargo, seríamos deshonestos si terminamos el libro resolviendo el problema de esta manera. Si pudiéramos medir en forma directa, o con observaciones, la distancia entre el Sol y la Luna, seguramente podríamos medir entonces la distancia entre el Sol y la Tierra (y entre la Tierra y la Luna) sin necesidad de utilizar argumentos geométricos.

Necesitamos buscar otra manera de encarar el problema, y la solución debe estar dada en términos de datos a los que realmente tengamos acceso. En teoría, la solución anterior es perfecta; en la práctica, depende de conocer una distancia tan difícil de calcular como las que queremos averiguar.

Por otra parte, notemos que nos quedan por analizar los otros dos factores que utilizamos en esta solución del problema: la suposición de que el Sol, la Luna y la Tierra formen un triángulo rectángulo, y la posibilidad de conocer el ángulo a .

La Luna se ve muchas veces durante el día, aunque no siempre presenta la misma forma: va desde una estrecha cinta en forma de medialuna, hasta el disco completo de la luna llena. En

algunos casos, cerca de los cuartos crecientes y los menguantes, vemos iluminado exactamente un semicírculo: en ese momento, cuando vemos iluminada la mitad, la Luna se ubica en el vértice que corresponde al ángulo recto de un triángulo rectángulo (ver la figura anterior).

Es muy difícil determinar con precisión el momento en que exactamente la mitad de la Luna está iluminada, porque al ser esférica, y su superficie rugosa, no vemos exactamente una línea recta que separa la zona iluminada de la zona en sombras, pero es posible determinar ese momento con una aproximación muy buena. Desde ya, culpa de esto se cometen errores en la medición, pues tal vez el momento elegido para medir no corresponde exactamente al momento en que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo rectángulo.

Prolongando el borde donde comienza la región en sombras de la Luna hasta nuestra ubicación en la Tierra, obtenemos el cateto adyacente al ángulo a , y la hipotenusa es el segmento que une a la Tierra y el Sol. Ahora, necesitamos medir el ángulo a , y esto puede hacerse aunque con cierta dificultad, indiquemos brevemente cómo hacerlo.

Tenemos que determinar el ángulo que hace el cateto adyacente con la hipotenusa, es decir, la recta que une el punto donde estamos parados con el Sol. Como ya explicamos, es posible hallar el ángulo entre dos objetos que estamos viendo a la distancia (utilizando un teodolito, u otro instrumento similar). Pero aquí, el problema es que alinear esta recta imaginaria entre nuestros ojos y el Sol es peligroso, y nos puede costar la vista. Si se quiere hacer la medición, se puede intentar lo siguiente: en vez de “mirar” en dirección al Sol, conviene mirar en la dirección opuesta, lo cual no es tan difícil, ya que es la dirección de nuestra sombra. En lugar de medir el ángulo a , podemos tratar de medir su complemento, que debe ser $180^\circ - a$ (como en la figura 8.2).

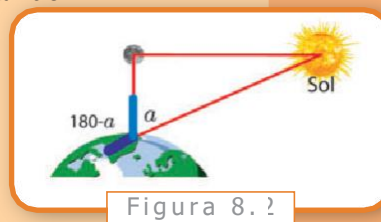


Figura 8.2

Para obtener una medición precisa hay que utilizar un radiotelescopio, o cámaras de rayos ultravioletas (pero cuidado, ¡no se debe mirar en la dirección del Sol!). Este ángulo, medido con la tecnología actual, resulta ser de $89,853^\circ$. Sin embargo, fue medido con métodos elementales por Aristarco en el siglo III a.C.; y el valor que calculó fue de 87° , que no está tan lejos del valor real, pero veremos que esos $2,853^\circ$ de diferencia generan un gran error en los valores estimados finales. A él debemos también la idea de hacer las mediciones cuando *STL* forman un triángulo rectángulo.

Calcule $\frac{1}{\cos(87^\circ)}$, y $\frac{1}{\cos(89,853^\circ)}$. ¿Son muy diferentes?

Ejercicio 1

En definitiva, la suposición de que *STL* forman un triángulo rectángulo resulta razonable, y también es posible medir el ángulo a . En cambio, no podemos medir la longitud de uno de los catetos, o de la hipotenusa, de manera directa. Es conveniente razonar de este modo con todos los datos que se introducen para resolver el problema, verificar si existe alguna forma de obtenerlos, o si es que han salido de la nada, como por arte de magia. En este último caso, debemos descartarlos.

Observación: repitémoslo otra vez, en caso de intentar medir el ángulo a procedan con mucha cautela. Recuerden que jamás se debe mirar en la dirección del Sol.

8.2. Tamaños y distancias

El objetivo de la sección anterior fue tomar conciencia de que existen datos que podemos obtener en la práctica (a través de una medición) y otros que no. En esta sección vamos a enfocar otro aspecto del problema, establecer relaciones entre los valores que queremos calcular aunque no sepamos cuánto valen. Si bien los cuatro valores D , d , R y r caen dentro del tipo de datos a los que no podemos acceder en forma directa, la geometría nos permite despejar unos en función de los otros.

Por ejemplo, en la sección anterior vimos que

$$r = \cos(a) \cdot R,$$

y como el ángulo a puede medirse, es suficiente averiguar una de las dos distancias para obtener la otra.

Con una calculadora obtenemos aproximadamente $\cos(89,833^\circ) 0,002565$, con lo que podemos despejar la distancia al Sol,

$$R = \frac{1}{0,002565} \cdot r \\ \approx 389,86r,$$

y por lo tanto la distancia entre la Tierra y el Sol es unas 390 veces la distancia entre la Tierra y la Luna.

¿Cómo aprovechar esta relación? ¿Cómo medir una de estas distancias? La respuesta, provisoria, pasa por estimar los diámetros que estamos buscando. ¿Nos sirve una regla común, graduada en centímetros y milímetros...? ¿En contra de todo lo que podamos imaginar, la respuesta es que sí!

Si una noche extendemos una regla con el brazo y “medimos” el diámetro que vemos de la Luna, sabemos que el tamaño real de la misma no son esos pocos milímetros que ocupa en la regla. Pero esta medición no es tan inútil como puede parecer, ya vimos en el capítulo dedicado a la geometría proyectiva que hay reglas precisas de cuánto y cómo debe achicarse una figura que está en un cuadro para que nos dé una impresión de estar a la distancia.

Pensemos, entonces, en hacer un sencillo experimento: intentar atrapar la Luna entre dos dedos. Antes, vamos a hacerlo con este libro. Déjelo en una mesa o en el piso, a un metro o dos de distancia, y separe el índice y el pulgar unos tres centímetros. Ahora, cerrando un ojo, y acercando la mano al (otro) ojo, trate de hacer coincidir el libro entre los dos dedos, como si lo estuviese sosteniendo entre ellos. Evidentemente, el libro no mide tres centímetros, pero se ve de ese tamaño si la mano está ubicada a unos diez o veintecentímetros de nuestra cara. Los resultados de triángulos semejantes que vimos

antes no nos permiten calcular el tamaño del libro ni la distancia a la cual lo dejamos, pero sí sabemos que se mantiene la siguiente proporción:

$$\frac{\text{distancia al libro}}{\text{tamaño del libro}} = \frac{\text{distancia a los dedos}}{\text{separación de los dedos}}.$$

Realizar este experimento, separando los dedos unos tres centímetros, midiendo a qué distancia están los dedos de su ojo, y verifique que el cociente entre la distancia al libro y su tamaño es igual al cociente que calculó.

Ejercicio 2

Podemos repetir este experimento con la Luna, y obtener así una relación entre el diámetro d de la Luna y la distancia r a la que está, el cociente r/d puede calcularse con un experimento similar (ver figura 8.3). Es decir, resulta que r/d es un cierto valor que sí puede calcularse, pero la precisión del valor que obtendremos dependerá del cuidado con el cual hagamos las mediciones. Se tiene, aproximadamente,

$$\frac{r}{d} \approx 110,$$

aunque, con seguridad, si lo intentamos nuestra aproximación será muy pobre. ¡Verifíquelo en una noche de luna llena!

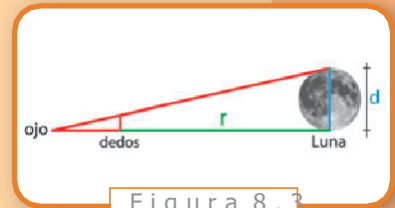


Figura 8.3

Hay muchas formas de hacer esta medición del cociente r/d . Otra, es determinando el diámetro angular. Veámosla porque emplea una idea que utilizaremos más adelante.

8.2.1. Cálculo del diámetro angular de la Luna

Para calcular el diámetro angular de la Luna necesitamos conocer su velocidad: sabemos que el ciclo lunar tarda 29,5 días. Este tiempo se puede medir entre dos lunas llenas consecutivas, si bien hay que repetir la medición a lo largo de algunos meses para obtener esta aproximación (por ejemplo, si suponemos que el período es de 29 días, veremos que cada dos meses se atrasa un día). Como la Luna da una vuelta completa alrededor de la Tierra en ese tiempo, sabemos que recorre 360° en unas 708 horas. Esto nos permite calcular su velocidad angular:

$$\begin{aligned} \text{velocidad angular} &= \frac{360^\circ}{708h} \\ &\approx 0,51^\circ/h. \end{aligned}$$

Luego, dado que conocemos la velocidad angular, si podemos calcular cuánto tarda en recorrer su propia distancia, tendremos una estimación de su diámetro angular, ya que conocemos su velocidad angular. Una forma de calcularlo es observar cuando la Luna pasa



Figura 8.4

Para realizar este cálculo sólo deben determinarse la duración del ciclo lunar, y el tiempo que tarda la Luna en recorrer su propio diámetro. Puede hacerse de otras formas, por ejemplo, el tiempo en que tarda en ocultarse detrás de un edificio, o un árbol.

por delante de una estrella (en una noche de luna llena,), tomando el tiempo que la estrella permanece oculta, y calculando así la distancia angular que recorre; esta distancia angular es igual a su diámetro angular, ver la Figura 8.4.

El tiempo que tarda es prácticamente una hora, apenas un poco más de una hora, con lo cual el diámetro angular es de $0,52^\circ$, ó $30'$.

Ejercicio 3

Intentar hacer esa medición en una noche de luna llena, y verifique que el tiempo es de aproximadamente una hora.

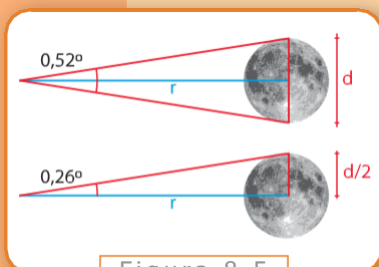


Figura 8.5

Conociendo el diámetro angular, obtenemos la relación entre r y d utilizando un argumento trigonométrico. Observemos los triángulos de la figura 8.5.

El primero es un triángulo isósceles, con la superficie de la Luna como base; el segundo es un triángulo rectángulo que obtenemos bisecando el ángulo, cuyos catetos son r y $d/2$. En definitiva,

$$\begin{aligned}\tan(b/2) &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \\ &= \frac{d/2}{r} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{r}\end{aligned}$$

Luego, utilizando ahora una calculadora, podemos despejar

$$\begin{aligned}\frac{r}{d} &= \frac{1}{2 \tan(b/2)} \\ &= \frac{1}{0,009075} \\ &\approx 110.\end{aligned}$$

En definitiva, aunque no podemos medir ni r ni d , sí podemos calcular su cociente r/d (y de dos formas diferentes). Puede parecernos poco este logro, pero observemos que hemos eliminado otra variable de nuestro problema: si sabemos calcular r , tenemos resuelto cuánto vale d (o, a la inversa, si podemos calcular d , averiguamos r). Y, en ambos casos, podemos calcular luego D .

8.2.2. Diámetro angular del Sol

A primera vista, nos puede parecer que podemos repetir el experimento con el Sol y obtener de la misma forma un valor para el cociente R/D ... ¡NO! Si lo intentamos, corremos el riesgo de perder la visión del ojo que dejamos abierto.

No siempre el método que sirve para medir un objeto, conviene para medir otro objeto distinto. Debemos buscar otra manera de obtener información sobre R y D , sin mirar directamente al Sol, y en este caso, utilizaremos los eclipses de sol. Puede resultar paradójico que para obtener alguna información del tamaño del Sol, utilicemos precisamente el momento en que no está visible.

Si observamos imágenes de eclipses solares (figura 8.6), veremos que la Luna se superpone casi perfectamente sobre el Sol.

Esta situación se puede representar en un diagrama como el de la figura 8.7: y, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{R}{D} \approx \frac{r}{d} \approx 110.$$

En definitiva, también el diámetro angular del Sol es de aproximadamente $30'$ (ó $0,5^\circ$).

Hemos obtenido entonces otra relación, ahora para nuestras incógnitas R y D : basta conocer una de las dos, y obtenemos la otra. Es la misma relación que hay entre r y d , con lo cual alcanza con conocer los radios para saber las distancias (o conocer las distancias para calcular los radios).

Recapitulando, si conociéramos, por ejemplo, la distancia al Sol R , obtenemos despejando el diámetro solar

$$D = \frac{R}{109}.$$

Ahora, gracias a que conocemos el ángulo $\alpha = 89,853^\circ$, podemos calcular el diámetro lunar,

$$\begin{aligned} d &= \cos(89,853) \cdot D \\ &= \frac{\cos(89,853) \cdot R}{110} \end{aligned}$$

Esta superposición no es perfecta, y puede verse un pequeño reborde circular del Sol asomando alrededor de la Luna. Por este motivo, en realidad el cociente R/D es un valor cercano a 109. Pero la diferencia es despreciable a la hora de estimar las distancias y los tamaños que nos interesan.



Figura 8.6

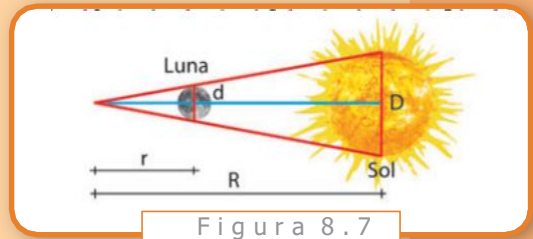


Figura 8.7

y tendríamos también la distancia a la Luna

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= \frac{110 \cdot \cos(89,853) \cdot R}{110} \\ &= \cos(89,853) \cdot R. \end{aligned}$$

(recordemos que $\cos(89,853) \approx 1/390$).

Ejercicio 4

Verifique que si conoce alguno de los valores D , r o d , también es suficiente para averiguar los restantes.

Antes de pasar a la siguiente sección, conviene meditar un momento la siguiente cuestión: ¿Qué convendrá intentar averiguar, la distancia al Sol o a la Luna? ¿O tal vez el diámetro del Sol, o el de la Luna? Y, cualquiera sea la respuesta que elija, ¿Cómo podría intentar calcularlos?

8.3. La sombra de la Tierra

Respondamos ahora las preguntas que dejamos al final de la sección anterior: podemos calcular un valor cualquiera de lo que nos interesa, ya sean los diámetros o las distancias, sean del Sol o la Luna. Para cualquiera de los dos, debemos considerar la sombra que proyecta la Tierra. Hay un argumento muy ingenioso que permite calcular el diámetro lunar de manera sencilla, y luego obtener de éste la distancia. Vamos a describir las dos formas de hacerlo, porque son de gran interés histórico.

Una, fue ideada por Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.); la otra, por Hiparco (190 - 120 a.C.).

En ambos casos, el truco para obtener más información es pensar en un eclipse lunar. Esencialmente, en este caso es la Tierra la que se interpone entre la Luna y el Sol, con lo cual la Luna queda fuera de nuestra vista durante cierto tiempo. Ahora podemos hacer un nuevo argumento de semejanza de triángulos, con el cual despejar el diámetro lunar en función del diámetro terrestre.

8.3.1. El argumento de Aristarco

La idea de Aristarco es sencilla, y depende de estimar el tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras de la Tierra durante un eclipse, prácticamente la misma idea que utilizamos para calcular el diámetro angular de la Luna.

Durante un eclipse de Luna, la Tierra proyecta un cono de sombras, y entre el momento en el cual comienza a entrar la Luna y el momento que sale, pasan poco más de tres horas y media. En la figura 8.8 hemos representado además la distancia x , que sumada

a r nos da la longitud total del cono de sombras terrestre. Hemos indicado también la distancia y que recorre la Luna durante el eclipse:

Si bien no conocemos x , sabemos que, aproximadamente, $y = 2,6d$ ya que cada hora la Luna recorre una distancia igual a su diámetro angular y tarda 3,6 h en atravesarlo.

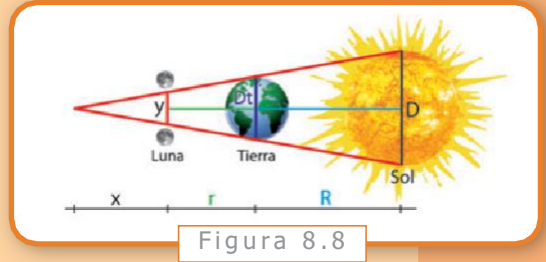


Figura 8.8

Podríamos preguntarnos por qué esta distancia es 2,6d y no 3,6d, si tarda en realidad 3,6 h. La respuesta está en cómo estamos midiendo la duración del eclipse: desde que la Luna entra en el cono de sombras, hasta que sale completamente. El punto del borde que ingresa primero en las sombras tarda 2,6 horas en salir, pero debe transcurrir una hora más hasta que el resto de la Luna sale de las sombras.

Por semejanza de triángulos, tenemos tres relaciones entre estas longitudes:

$$\begin{aligned}\frac{2,6d}{x} &= \frac{Dt}{x+r} \\ &= \frac{D}{x+r+R}\end{aligned}$$

Antes de despejar, recordemos que

$$\begin{aligned}D &= 390d \\ R &= 110D \\ R &= 110 \cdot 390d \\ R &= 42.900d \\ r &= 110d,\end{aligned}$$

y que el radio terrestre es de 6.378 km, con lo cual el diámetro es $Dt = 12.756$ km. Reemplacemos para eliminar r y las variables que dependen del Sol (podríamos haber eliminado tres cualesquiera sin dificultades):

$$\begin{aligned}\frac{2,6d}{x} &= \frac{12.756}{x+110d} \\ &= \frac{390d}{x+110d+42.900d}\end{aligned}$$

Por comodidad, omitiremos las unidades durante la cuenta. Igualando la primera y la tercera,

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{390d}{x+43.010d}$$

despejamos el valor de x :

$$\begin{aligned}(2,6d)(x + 43.010d) &= 390dx \\ 2,6dx + 111.826d^2 &= 390dx \\ 2,6x + 111.826d &= 390x \\ 387,4x &= 111.826 \\ x &= 288,6d\end{aligned}$$

Ahora, igualando las dos primeras expresiones, tras reemplazar x ,

$$\begin{aligned}\frac{2,6d}{288,6d} &= \frac{12.756}{288,6d + 110d} \\ \frac{2,6}{288,6} &= \frac{12.756}{398,6d} \\ 2,6 \cdot 398,6d &= 12.756 \cdot 288,6 \\ d &= \frac{12.756 \cdot 288,6}{2,6 \cdot 398,6} \\ d &= 3552,2\dots\end{aligned}$$

Conociendo d , calculamos los otros valores:

$$\begin{aligned}D &= 390 \cdot d \\ &= 1.385.358 \text{ km} \\ r &= 110 \cdot d \\ &= 390.742 \text{ km} \\ R &= 110 \cdot D \\ &= 152.389.380 \text{ km}\end{aligned}$$

8.3.2. El argumento de Hiparco

Un siglo después de la medición de Aristarco (que dio valores muy inferiores a los reales, dado que su error en la medición de a lo llevó a la relación $D = 20d$), Hiparco dio un argumento diferente para calcular el tamaño de la Luna, también aprovechando un eclipse. Veremos que su idea es mucho más geométrica.

La clave aquí fue considerar la sombra que hace la Tierra sobre la Luna, observe la figura 8.9.

Puede resultar difícil creer, pero esa imagen alcanza para estimar el radio lunar en función del radio terrestre gráficamente, como se indica en la figura 8.10.



Figura 8.9

Trazando dos cuerdas en el borde de cada círculo (en el borde de la Luna, y en el contorno de la sombra de la Tierra), podemos determinar el centro de cada círculo (ver el final del capítulo 3). Midiendo ambas distancias, podemos ver que el radio de la sombra terrestre es 3,7 veces mayor que el radio de la imagen que vemos de la Luna.

Ahora, dado que las proyecciones mantienen las proporciones de las imágenes entre ellas, el radio terrestre será 3,7 veces el radio lunar, y la misma proporción se mantiene para los diámetros:

$$Dt = 3,7d,$$

con lo cual, dado que conocemos el diámetro terrestre, obtenemos

$$\begin{aligned} d &= \frac{12.756}{3,7} \\ &= 3447,5... \end{aligned}$$

que es un valor cercano al que obtuvimos antes, y mucho más exacto. Con este valor, obtenemos

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= 379.225 \\ D &= 390 \cdot d \\ &= 1.344.525 \\ R &= 110 \cdot D \\ &= 147.897.750 \end{aligned}$$

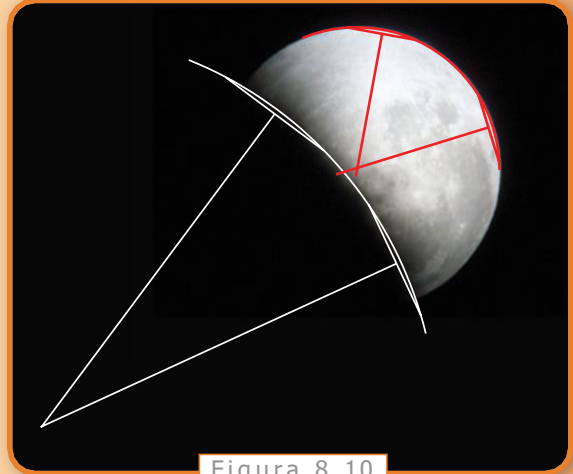


Figura 8.10

8.4. Comentarios finales

Con herramientas geométricas elementales hemos calculado el radio lunar: sólo utilizamos el gráfico de la sombra terrestre sobre la Luna.

Para calcular la distancia a la Luna es suficiente armar un triángulo semejante, “atrapando” la Luna entre dos dedos y midiendo la separación de los mismos y la distancia de la mano a nuestra cara. O, mejor aún, medimos el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra, y el que tarda en atravesar un punto fijo para calcular su diámetro angular. Conociendo el cociente r/d , y d , averiguamos r .

Y también podemos calcular d a partir del tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras durante un eclipse lunar.

Para conocer el diámetro solar, sólo necesitamos saber que el Sol y la Luna se ven del mismo tamaño desde la Tierra: para esto utilizamos que en un eclipse solar la Luna oculta casi perfectamente al Sol.

Si somos capaces, además, de medir el ángulo α -la separación con que vemos a la Luna y el Sol-, podemos calcular también la distancia al Sol.

Sólo este último paso es difícil de realizar, todos los demás son sencillos y no se necesita más que un reloj y una regla. Vamos a dejar, como problema abierto para discutir, si la distancia al Sol puede averiguarse sin necesidad de conocer este ángulo α . Desde ya, hay que detallar cómo se haría cualquier medición, evitando cualquier procedimiento que requiera mirar en dirección al Sol.

Planteamos, en la introducción, una serie de hipótesis sobre nuestro problema. En especial, asumimos que las órbitas lunar y terrestre eran circulares, con lo cual las distancias r y R estaban bien definidas como los radios de estas órbitas.

Pero sabemos desde principios del siglo XVII, gracias Kepler, que las órbitas son en realidad elípticas, con lo cual la distancia varía según la época del año. En el caso de la Luna, las distancias en el afelio (el momento en que la Luna está más lejos de la Tierra) y el perihelio (el momento en que está más cerca) son 384.400 km y 363.300 km respectivamente (nuestra aproximación dió 379.225 km). Para el Sol, tenemos 147.100.000 km y 152.100.000 km (obtuvimos 147.897.750). Como puede verse, la aproximación que hemos obtenido es muy buena. Mejorarla, ya no depende de la geometría, sino de la tecnología para mejorar las mediciones.

Solución de los Ejercicios

Capítulo 1

Ejercicio 1

Una distancia de cuatro años-luz es aquella que recorre la luz viajando durante cuatro años. Como la velocidad de la luz es, aproximadamente, 300.000 km/s , tenemos que ver cuántos segundos hay en cuatro años y multiplicarlos por 300.000 km/s . Para averiguar esto, sólo debemos efectuar los siguientes cálculos:

$$\text{un minuto} \quad \blacksquare \quad 60s$$

$$\text{una hora} \quad \blacksquare \quad 60 \text{ minutos} = 60 \cdot 60s = 3.600s$$

$$\text{un día} \quad \blacksquare \quad 24h = 24 \cdot 3.600s$$

$$\text{un año} \quad \blacksquare \quad 365 \text{ días} = 365 \cdot 24 \cdot 3.600s$$

La distancia buscada es de $300.000 \cdot 4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ km} = 3,78432 \times 10^{13} \text{ km}$.

Ejercicio 2

Una letra N.

Ejercicio 3

Si los ángulos de la base midieran más de dos rectos, la prolongación de los dos lados del triángulo no podrían cortarse.

Ejercicio 4

Observemos que sólo podemos conectar dos vértices entre sí. Al hacerlo, descomponemos la figura en dos triángulos, y los ángulos interiores de cada uno suman 180° .

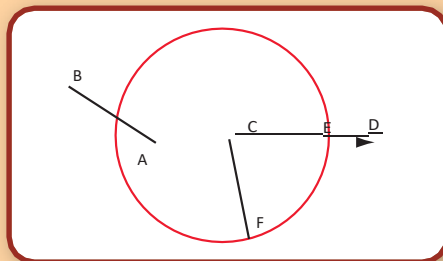
Capítulo 2

Ejercicio 1

Observemos que DE es congruente con DF por ser radios del círculo centrado en D . Como DA es congruente a DC (es un triángulo equilátero), resultan congruentes AE y CF . Pero AB y AE son congruentes, pues son radios del círculo que trazamos con centro en A ; y por lo tanto, CF y AB son congruentes.

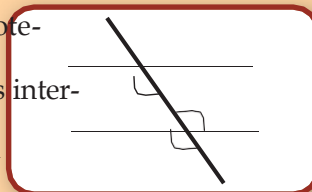
Ejercicio 2

Por la construcción anterior, sabemos que podemos obtener un segmento CF congruente al AB , no necesariamente en la recta dada. Ahora, con centro en C y radio CF , trazamos un nuevo círculo, y buscamos su intersección E con la recta CD . El segmento CE es el buscado.



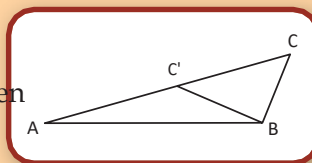
Ejercicio 3

No siempre serán congruentes. En la figura, si las hipotenusas son paralelas, cada cateto forma ángulos congruentes al cortarlas (se deduce de los resultados sobre alternos internos entre paralelas, y para un ángulo externo se utiliza que son opuestos por el vértice, ver la figura: →



Ejercicio 4

No siempre serán congruentes. Observe la siguiente figura, donde los triángulos ABC y ABC' no son congruentes, pero comparten el ángulo en A , comparten el lado AB , y son congruentes los lados BC y BC' .



Ejercicio 5

La respuesta es que sí, pues si tienen dos ángulos congruentes, el tercero también lo será. Ahora, por los resultados de semejanza de triángulos, ambos son semejantes, pero como tienen un lado congruente, resultan congruentes.

Ejercicio 6

Tracemos dos cuerdas distintas en el arco, y tracemos sus bisectrices. Como ambas pasan por el centro del círculo, éste estará en el punto donde se cortan.

Capítulo 3

Ejercicio 1

Como $\sin(30^\circ) = 0,5$ y $\sin^2(30^\circ) + \cos^2(30^\circ) = 1$, debe ser

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2(30^\circ) = 1$$

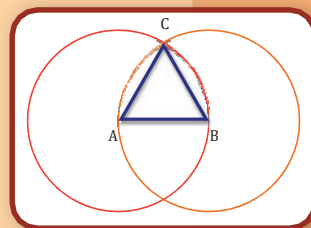
y, despejando,

$$\begin{aligned}\cos(30^\circ) &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sí. La construcción es similar a la que hicimos para obtener un triángulo equilátero. Se toma un punto de la circunferencia, y con éste como centro se traza un nuevo círculo de igual radio que el anterior.

Como el triángulo ABC es equilátero, sus tres ángulos son iguales y miden 60° . Repetimos el proceso a partir del punto B y obtenemos un nuevo triángulo. Cada triángulo de éstos divide el círculo en seis sectores iguales.



Ejercicio 3

Para resolver este ejercicio recomendamos que: el equivalente a 360° es 2π radianes. Un ángulo llano tiene 180° , equivalentemente, π radianes; y un ángulo recto, $\pi/2$ radianes. Como π es un número irracional, no tenemos una expresión exacta para 1° , que en radianes es

$$1^\circ = 1^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \approx 0,01745 \text{ rad}.$$

A la inversa, podemos expresar en grados a cuanto equivale un radián:

$$1 \text{ rad} = 1 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \approx 57,2958^\circ.$$

Entonces, como $1^\circ \approx 0,01745 \text{ rad}$, tenemos que, en general,

$$x^{\circ} = x \cdot 1^{\circ} \approx x \cdot 0,01745 \text{ rad},$$

con lo cual $30^{\circ} \approx 0,5235 \text{ rad}$ y $45^{\circ} \approx 0,78525 \text{ rad}$.

Ejercicio 4

Como $1 \text{ rad} \approx 57,2958^{\circ}$, tenemos que, en general,

$$y \text{ rad} = y \cdot 1 \text{ rad} \approx y \cdot 57,2958^{\circ},$$

con lo cual $\pi/3 \text{ rad} = 60^{\circ}$ y $1,5 \text{ rad} \approx 85,9437^{\circ}$.

Ejercicio 5

Tenemos

$$\cos(a) = \frac{CA}{H} \quad \text{entonces} \quad \sec(a) = \frac{H}{CA} = \frac{1}{\cos(a)}$$

$$\sen(a) = \frac{CO}{H} \quad \text{entonces} \quad \csc(a) = \frac{H}{CO} = \frac{1}{\sen(a)}$$

$$\tg(a) = \frac{CO}{CA} \quad \text{entonces} \quad \cotg(a) = \frac{CA}{CO} = \frac{1}{\tg(a)}$$

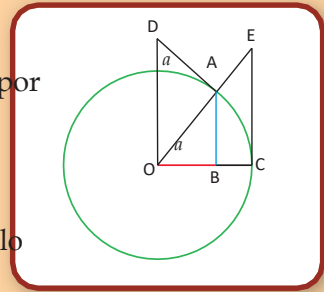
Ejercicio 6

Representemos en la circunferencia trigonométrica el ángulo a , y tenemos $1 = \overline{OA}$, $\cos(a) = \overline{OB}$, $\sen(a) = \overline{AB}$, y $\tg(a) = \overline{CE}$. Ahora, trazamos la perpendicular a OB por el punto O , hasta su intersección a la perpendicular a OA por el punto D , y llamemos E a ese punto. Prolonguemos, también, el radio OA hasta el punto E .

Los triángulos OCE y OAD son semejantes al triángulo OAB , con lo cual se tienen las siguientes

$$\begin{aligned} \frac{OE}{OC} &= \frac{1}{\cos(a)} \\ &= \sec(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{OD}{OA} &= \frac{1}{\sen(a)} \\ &= \csc(a), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{OA}{CE} &= \frac{\cos(a)}{\sin(a)} \\ &= \frac{1}{\tan(a)},\end{aligned}$$

pues $\overline{OC} = \overline{OA} = 1$.

Ejercicio 7

Observando la figura 3.10, vemos que en el segundo cuadrante se forma un triángulo rectángulo, y uno de sus ángulos mide $\pi - a$. Como su hipotenusa mide 1, y su cateto opuesto mide $y = \sin(\pi - a)$, tenemos la primera igualdad. Para la segunda, como $x < 0$, tenemos que el cateto adyacente mide $-x$, con lo cual $\cos(a) = -x = -\cos(\pi - a)$.

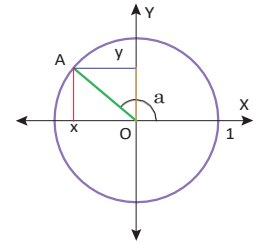


Figura 3.10

Ejercicio 8

En la figura 3.12 (pág. 57), observemos que

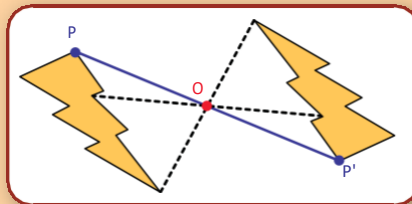
$$\frac{\sin(a)}{x} = \frac{\sin(b)}{y},$$

y despejando, se tiene la primera igualdad. La otra se obtiene trazando cada una de las perpendiculares a los otros lados. En el caso en que uno de los ángulos del triángulo sea mayor que un ángulo recto, se resuelve de la misma forma, dibujando la perpendicular hasta la prolongación del lado correspondiente.

Capítulo 4

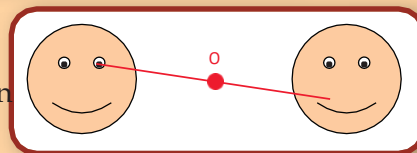
Ejercicio 1

El punto simétrico es P' . Para encontrarlo, trazamos la recta que pasa por P y por O , y buscamos el punto P' tal que $PO = OP'$.



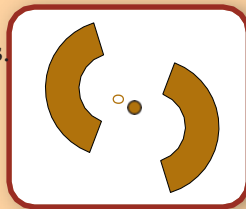
Ejercicio 2

a) Estas figuras no son simétricas con respecto a O . Por ejemplo, vemos que la imagen



del centro del ojo, no es del centro del ojo de la figura de la izquierda.

b) Estas figuras sí son simétricas.

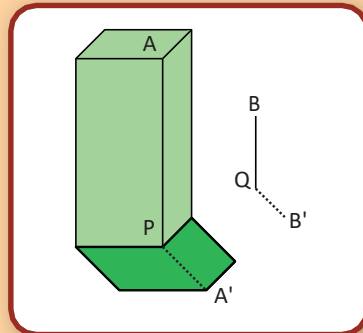


Ejercicio 7

Para poder calcular la altura, podemos tomar como el punto A del edificio y determinar su sombra, siguiendo el contorno de la sombra. La sombra es el punto A'.

Ahora buscamos cuál es el punto que se encuentra sobre el piso, justo debajo de A. Este punto se llama la "proyección ortogonal" de A sobre el plano del piso, porque el segmento AP es ortogonal (o perpendicular) al plano del piso.

Luego tomamos un poste BQ del que sepamos la altura, medimos la sombra y con estos datos podemos calcular la longitud de AP, que es la altura del edificio.

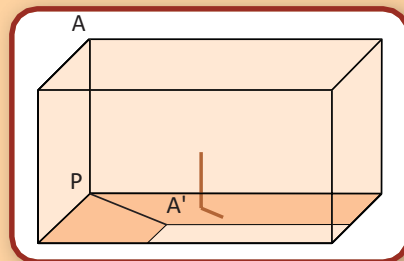


Ejercicio 8

En este caso, el punto más fácil para calcular la sombra es el punto A.

La sombra de A es el punto A' y la proyección de A es el punto P.

Midiendo la longitud de A'P podemos calcular la altura de la pared como antes.



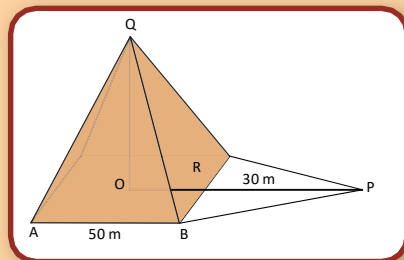
Ejercicio 9

En este caso, no podemos medir la longitud de PO. Pero sabemos que

$$PO = PR + RO.$$

PR podemos medirlo. En este caso mide 30 m.

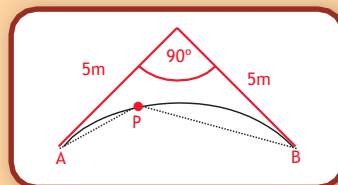
Para calcular la longitud de RO observamos que,



como O es el centro del cuadrado que forma la base de la pirámide, RO es igual a la mitad de la longitud del lado AB. Por lo tanto RO mide 25m y PO mide 55m. Con ese dato, ya podemos calcular la altura. OQ.

Ejercicio 10

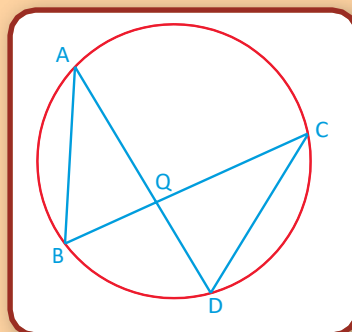
Si el perro está parado en el punto P, podrá ver todo el mural si el ángulo APB es menor o igual que 240° . Por lo tanto, para encontrar la región, trazamos el arco capaz de 240° y desde cualquier punto fuera de la región comprendida entre este arco y las dos paredes, el perro podrá ver todo el mural.



Ejercicio 11

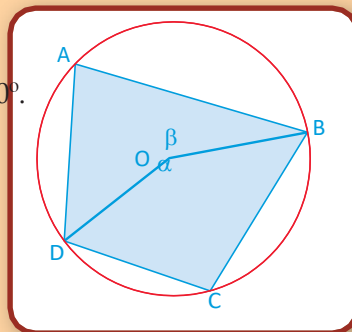
Los ángulos BAD y BCD se encuentran inscritos en el arco BD. Por lo tanto son congruentes. Análogamente, los arcos ABC y ADC son congruentes.

Concluimos que los triángulos AQB y CQD son semejantes, siendo C el correspondiente de A y D el correspondiente de B.



Ejercicio 12

Como $\angle DAB = 80^\circ$, $\alpha = 2 \times 80^\circ = 160^\circ$, por ser el ángulo central correspondiente. Luego $\beta = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$. Obtenemos que $\angle DCB = 200^\circ / 2 = 100^\circ$.



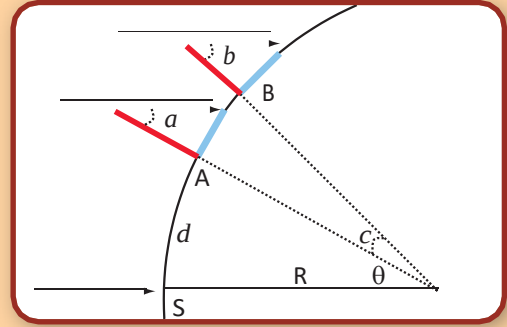
Ejercicio 13

La cuerda que pasa por los puntos donde entró y salió de la circunferencia señala la dirección Este-Oeste. La dirección Norte-Sur es la perpendicular a la cuerda.

Ejercicio 14

Podemos calcular el radio, y no hace falta una fecha especial. Observemos la siguiente figura:

Si A y B son las ciudades, podemos calcular el ángulo c a partir de los ángulos a y b , ya que utilizando el mismo argumento de antes, tenemos que $c = b - a$. Sabiendo la distancia entre A y B , y conociendo el ángulo c , el resto se deduce como antes.



Capítulo 5

Ejercicio 1

Basta recordar que por 3 puntos no alineados del espacio pasa un único plano, mientras hay una cantidad infinita de planos que pasan por una recta dada.

Ejercicio 2

Como el radio terrestre es aproximadamente $R = 6.378$ km, la distancia entre los dos polos vale $R\pi = 20.037$ km, y la distancia entre el Polo Norte y una ciudad cualquiera ubicada sobre el Ecuador $R\pi/2 = 10.019$ km.

Ejercicio 3

Llamemos O al centro de la esfera. Sea M' la proyección ortogonal de M sobre el plano xy (el punto donde la recta perpendicular al plano xy que pasa por M corta el plano xy), con lo cual el triángulo OMM' tiene un ángulo recto en M' . Luego, la coordenada z de M , es decir la longitud del lado MM' de este triángulo, es

$$z = MM' = OM \operatorname{sen} \theta$$

$$z = R \operatorname{sen} \theta.$$

Para encontrar x y y introducimos la proyección ortogonal M'' de M' sobre el eje x (el punto donde la recta perpendicular al eje x que pasa por el punto M'' corta al eje x). El triángulo $OM'M''$ es rectángulo en M'' , y tenemos

$$\begin{aligned} x &= OM'' & y &= M'M'' \\ x &= OM' \cos \phi & y &= OM' \operatorname{sen} \phi. \end{aligned}$$

Volviendo al triángulo OMM' vemos que

$$OM' = OM \cos \theta$$

$$= R \cos \theta.$$

Luego,

$$x = R \cos \theta \cos \phi \quad y \quad y = R \cos \theta \sin \phi.$$

Ejercicio 4

Aplicando la fórmula en $AB'C$, triángulo rectángulo en C , obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - c)}{\operatorname{sen}(\pi - \hat{C})} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - a)}{\operatorname{sen}(\pi - \hat{A})},$$

$$\cos(\pi - c) = \cos(\pi - a) \cos(b).$$

Como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, llegamos a

$$\frac{\operatorname{senc}}{\operatorname{senC}} = \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{senA}},$$

$$\cos c = \cos a \cos b = \cos a \cos b + \operatorname{senasenb} \cos \hat{C}.$$

Ejercicio 5

Introduzcamos el punto A' antipodal de A . Como $d(C, A') = d(A, A') - d(C, A) = \pi - b < \pi/2$ (pues suponemos que $b > \pi/2$), podemos aplicar las relaciones fundamentales en el triángulo CBA' rectángulo en C de la misma manera que en el ejercicio anterior para obtenerlas en ABC .

Ejercicio 6

Lo probaremos primero en el caso $a, b < \pi/2$. Usando las relaciones trigonométricas que probamos al principio, obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \frac{ED}{OD}, & \operatorname{tga} &= \frac{\operatorname{sena}}{\cos a} & \cot \hat{A} &= \frac{\cos \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{A}} \\ & & & y & & \\ \operatorname{tga} &= \frac{BD}{OD}, & \cot \hat{A} &= \frac{DE}{BD}. \end{aligned}$$

Luego

$$\operatorname{sen} b = \frac{ED}{OD} = \frac{BD \operatorname{sen} \hat{A}}{OD BD}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{tga} \cot \hat{A}.$$

Después extendemos este resultado al caso $a, b > \pi/2$ de la misma manera que en los dos ejercicios anteriores usando $\sin(\pi - x) = \sin x$ y $\cos(\pi - x) = -\cos x$ que implican $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cot}(\pi - x) = -\operatorname{cot} x$.

Ejercicio 7

Como suponemos a, b y c chicos podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos(b) \approx 1 - \frac{b^2}{2}, \quad \cos(c) \approx 1 - \frac{c^2}{2},$$

y

$$\sin(b) \approx b, \quad \sin(c) \approx c.$$

Entonces podemos reescribir la primera relación fundamental

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\hat{A})$$

como

$$1 - \frac{a^2}{2} \approx \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc \cos(\hat{A}).$$

Simplificamos y obtenemos

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) - \frac{b^2 c^2}{2}.$$

Como $b^2 c^2$ es mucho más chico que b^2 , c^2 y bc , lo podemos olvidar y nos queda

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

por a, b y c chicos.

Ejercicio 8

Según el teorema,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = \frac{\operatorname{area}(ABC)}{R^2}.$$

A medida que el radio R de la esfera aumenta, el miembro de derecha se acerca más y más a 0. Luego si consideramos el plano como una esfera de radio infinito obtenemos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 0.$$

Ejercicio 9

Llamemos $A_1, A_2, \dots, A_n$ los n vértices de P_n (recorridos en el sentido de las agujas del reloj), y consideremos los $n - 2$ triángulos $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, A_1A_4A_5, \dots, A_1A_{n-1}A_n$. El área de P_n es la suma de las áreas de estos triángulos. Haciendo la suma

$$\begin{aligned} \text{area}(A_1A_2A_3) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 - \pi)R^2 \\ + \text{area}(A_1A_3A_4) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 - \pi)R^2 \\ + \text{area}(A_1A_4A_5) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{A}_5 - \pi)R^2 \\ + \dots \\ + \text{area}(A_1A_{n-1}A_n) &= (\hat{A}_1 + \hat{A}_{n-1} + \hat{A}_n - \pi)R^2 \end{aligned}$$

(ojo que el $\hat{A}_1$ de la 1era línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_2A_3$, mientras el $\hat{A}_1$ de la 2da línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_3A_4 \dots$, y que la suma de todos estos $\hat{A}_1$ da el $\hat{A}_1$ de P_n - idem por $\hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$), obtenemos

$$\begin{aligned} \text{area}(P_n) &= \text{area}(A_1A_2A_3) + \dots + \text{area}(A_1A_{n-1}A_n) \\ &= (\hat{A}_1 + \dots + \hat{A}_n - (n-2)\pi)R^2. \end{aligned}$$

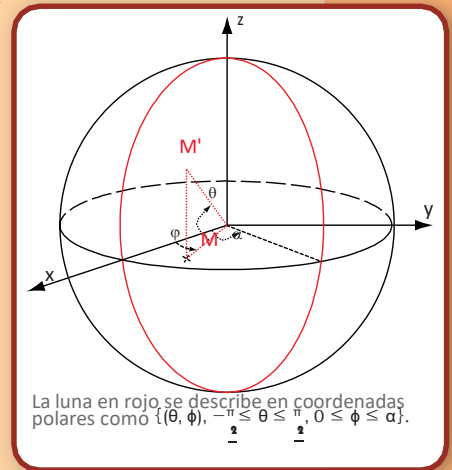
Ejercicio 10

Sea una luna cualquiera de ángulo α . Para describirla en coordenadas polares consideremos la figura 1. Vemos que la luna es el conjunto

$$\left\{ (\theta, \phi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \alpha \right\}.$$

Luego su área vale

$$\begin{aligned} R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\alpha \cos \theta \, d\theta \, d\phi &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^\alpha d\phi \\ &= 2R^2\alpha. \end{aligned}$$



Ejercicio 11

Por construcción la imagen de una arista es la intersección con la esfera del único plano que pasa por el centro de la esfera y esta arista. Recordando que por definición un círculo máximo es la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera, obtenemos que la imagen de una arista es una porción de círculo máximo.

Ejercicio 12

Sabemos que la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero vale 2π (lo probamos como consecuencia de que la suma de los ángulos de un triángulo vale π). Usando esto en el cuadrilátero formado por las cuatro rectas obtenemos

$$\hat{A} + (\pi - \hat{A}) + x + (\pi - \hat{B}) = 2\pi.$$

Simplificando llegamos a $x \hat{=} B$.

Ejercicio 13

Consideremos un triángulo plano ORS cualquiera y la recta (MN) definida como el transporte paralelo de (RS) a lo largo de (OR) (ver figura 2). Por definición del transporte paralelo tenemos $\widehat{MOR} = \widehat{ORS}$. Por hipótesis tenemos también $\widehat{NOS} = \widehat{OSR}$. Luego

$$\begin{aligned}\widehat{ORS} + \widehat{ROS} + \widehat{RSO} &= \widehat{MOR} + \widehat{ROS} + \widehat{SON} \\ &= \widehat{MON} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ejercicio 14

Examinando los vértices C y B vemos que

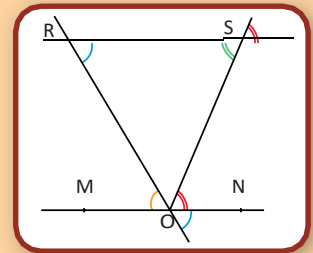
$$u + u' + \hat{C} = \pi \quad \text{y} \quad u'' - u' + \hat{B} = \pi$$

es decir

$$u = \pi - u' - \hat{C} \quad \text{y} \quad u'' = \pi - \hat{B} + u'.$$

Luego

$$\begin{aligned}H &= \pi - u'' + \hat{A} - u \\ &= \pi - (\pi - \hat{B} + u') + \hat{A} - (\pi - u' - \hat{C}) \\ &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.\end{aligned}$$



Ejercicio 15

Llamemos M'' a la proyección ortogonal de M sobre el plano xy y O el centro de la esfera. Si conociéramos $\widehat{OM''}$ tendríamos resuelto el ejercicio pues

$$x = OM'' \cos \phi \quad \text{y} \quad y = OM'' \sin \phi.$$

Busquemos entonces OM'' . Como la recta (MM'') es paralela a la recta (ON) podemos aplicar el teorema de Tales en el triángulo ONM' para obtener

$$\frac{MM''}{ON} = \frac{M'M'}{OM'}$$

Como

$$ON = R,$$

$$MM'' = \text{coordenada } z \text{ de } M = R \sin \theta,$$

$$M'M' = OM' - OM = OM' - R \cos \theta.$$

tenemos

$$\sin \theta = \frac{OM' - R \cos \theta}{OM'}$$

i.e.

$$OM' - R \cos \theta = OM' \sin \theta \Leftrightarrow OM'(1 - \sin \theta) = R \cos \theta.$$

Como habíamos supuesto que $M \neq N$, es decir, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, tenemos $(1 - \sin \theta) \neq 0$ y luego podemos dividir en la última igualdad por $(1 - \sin \theta)$. Obtenemos así

$$OM' = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)}.$$

Finalmente,

$$x = OM'' \cos \phi = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \cos \phi$$

$$y = OM'' \sin \phi = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \sin \phi.$$

Ejercicio 16

Examinando la figura 5.33 (ver pág. 100) vemos que la imagen por la proyección estereográfica de un meridiano (respectivamente, de un paralelo) es una recta pasando por el origen (resp., un círculo centrado en el origen) en el plano xy . Vamos a probarlo analíticamente usando el resultado del ejercicio anterior.

Una mitad de meridiano está formado por los puntos de coordenada ϕ constante, es decir, es un conjunto de la forma $(\theta, \phi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \phi = \phi_0$ por algún $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ (la otra mitad tiene por ecuación $\phi = \phi_0 + \pi$). Luego si $\cos \phi_0 = 0$,

$$y = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \sin \phi_0 = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \cos \phi_0 \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} = \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} x.$$

Esta ecuación es la ecuación de una recta que pasa por el origen pues es de la forma $y = ax$ con $a = \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0}$. Si $\phi_0 = 0$ i.e. $\phi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ entonces

$$x = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \cos \phi_0 = 0,$$

y

$$y = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)} \sin \phi_0 = \pm \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)},$$

con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Como la función $f(\theta) = \frac{R \cos \theta}{(1 - \sin \theta)}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ es continua y creciente (pues $f'(\theta) = \frac{R}{(1 - \sin \theta)^2} > 0$), $f(-\pi/2) = 0$, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} f(\theta) = +\infty$, es una biyección de $[-\pi/2, \pi/2)$ sobre $[0, +\infty)$. Luego, la imagen de una mitad de meridiano con $\cos \phi_0 = 0$ es la parte positiva (respectivamente, negativa) del eje y si $\phi_0 = \pi/2$ (respectivamente, si $\phi_0 = -\pi/2$), y la imagen del meridiano completo es todo el eje y .

Probamos ahora que la imagen de un paralelo es un círculo centrado en el origen, es decir, un conjunto de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $r > 0$ (el radio del círculo).

Un paralelo tiene por ecuación $\theta = \theta_0$ por algún $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Luego,

$$\begin{aligned} x &= \frac{R \cos \theta_0}{(1 - \sin \theta_0)} \cos \phi \\ &= r \cos \phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{R \cos \theta_0}{(1 - \sin \theta_0)} \sin \phi \\ &= r \sin \phi, \end{aligned}$$

donde $\frac{R \cos \theta_0}{(1 - \sin \theta_0)}$ es una constante que depende de θ_0 , y $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Luego, la imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el círculo centrado en el origen de radio $r = \frac{R \cos \theta_0}{(1 - \sin \theta_0)} = f(\theta_0)$. Como la función f es creciente con $f(-\pi/2) = 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} f(\theta) = +\infty$,

el radio del círculo crece desde 0 cuando $\theta_0 = -\pi/2$ (el círculo en este caso se reduce al polo sur de la esfera) y va tomando valores más y más grandes a medida que θ_0 se acerca a $\pi/2$.

Ejercicio 17

La coordenada y de M' se encuentra de la misma manera que la coordenada z de las coordenadas esféricas. La coordenada x es por definición la longitud de un arco de círculo de radio R y ángulo ϕ . Como medimos los ángulos en radianes, obtenemos $x = R\phi$.

Ejercicio 18

La imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el segmento horizontal

$$\begin{aligned} -R\pi \leq x \leq R\pi, \quad y &= C \text{ ste} \\ &= R \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2} \right). \end{aligned}$$

La imagen del meridiano de ecuación $\phi = \phi_0$ es la recta vertical

$$x = R\phi_0$$

pues cuando θ recorre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $y = R \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ recorre todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 19

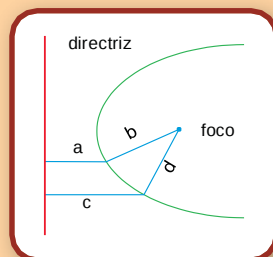
Si el bote hace un ángulo constante con los meridianos, entonces su recorrido sobre una mapa obtenida con la proyección de Mercator hace también un ángulo constante con las rectas verticales (pues la proyección de Mercator conserva los ángulos por construcción y la imagen de un meridiano es una recta vertical como ya vimos). Entonces, el recorrido es una recta pues en ningún momento cambia la dirección de su movimiento.

Capítulo 6

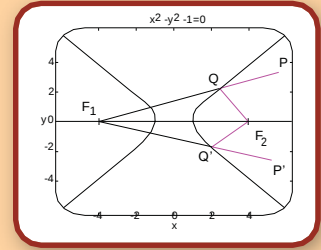
Ejercicio 1

- a) La parábola se define como el conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo (foco) es igual a la distancia a una recta fija (directriz). En el gráfico, las distancias a y b son iguales entre sí; lo mismo que las distancias c y d .

La hipérbola se define como el conjunto de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.



Antes de pasar a las expresiones analíticas de estas cónicas veamos una de las aplicaciones inmediatas de estas definiciones: una variante del método del jardinero para el trazado de una hipérbola.



Se necesitan una regla, un hilo y un lápiz. La regla se apoya sobre el papel con un extremo fijo al mismo. El hilo también está fijo al papel y al otro extremo de la regla. Para dibujar una hipérbola basta con sostener el hilo tenso contra la regla con el lápiz y hacer girar la regla. En la figura, nuestra regla estaría representada en dos posiciones P y P' (con el extremo fijo en F₁), el lápiz estaría en Q y Q' respectivamente y el hilo recorrería el camino magenta en ambos casos.

O sea que los puntos P y P' se encuentran a la misma distancia de F₁ ya que la regla tiene una longitud fija y tenemos:

$$PF_1 - QF_1 = QP \quad \text{y} \quad P'F_1 - Q'F_1 = Q'P'$$

Entonces

$$PF_1 = QP + QF_1 \quad \text{y} \quad P'F_1 = Q'P' + Q'F_1$$

$$QP + QF_1 = Q'P' + Q'F_1$$

$$QF_1 = Q'P' - QP + Q'F_1$$

Si Q y Q' están en una hipérbola entonces se tiene que cumplir que:

$$QF_1 - QF_2 = Q'F_1 - Q'F_2 = \text{constante}$$

Pero esto vale porque

$$QF_2 = PF_2 - QP \quad \text{y} \quad Q'F_2 = P'F_2 - Q'P'$$

$$QF_1 - QF_2 = Q'P' - QP + Q'F_1 - QF_2$$

$$= Q'P' - QP + Q'F_1 - (PF_2 - QP)$$

$$= Q'P' + (P'F_1 - Q'P') - PF_2$$

$$= Q'F_1 - Q'F_2$$

Como queríamos ver.

- b) Dado un punto en el plano, las coordenadas polares r, θ representan su distancia al origen y el ángulo que forman con el eje de abscisas.

Se cumplen entonces las relaciones:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

que nos servirán para pasar las expresiones que obtengamos en coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuación para la parábola:

Sea P un punto de la parábola de coordenadas r y θ , por lo tanto cumple que las distancias OP y PD son iguales.

Del gráfico obtenemos que

$$PD = PE + ED$$

O sea, usando las coordenadas polares

$$r = r \cos \theta + \rho$$

Despejando queda

$$\begin{aligned}r(1 - \cos \theta) &= \rho \\r &= \frac{\rho}{1 - \cos \theta}\end{aligned}$$

Esta es la relación que cumplen r y θ cuando describen puntos que pertenecen a una parábola.

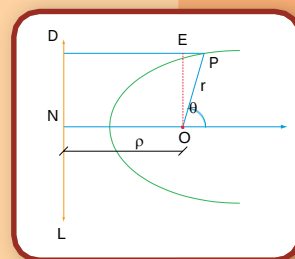
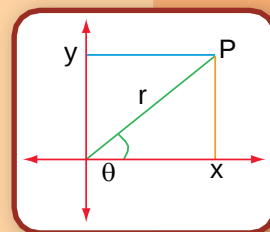
En general, se tiene la ecuación general de una cónica es

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

Donde ε se dice la excentricidad de la cónica. Existen variaciones sobre esta ecuación que corresponden a la orientación de la figura.

Esto corresponde a una forma más general aún de definir a las cónicas de una forma métrica.

Dada una recta directriz L y un foco F una cónica es el conjunto de puntos P que cumplen la relación



$$PF = \varepsilon PL$$

Donde PD representa la distancia de P a la recta L

Si $\varepsilon > 1$ se define una hipérbola; si $\varepsilon = 1$, es el caso de la parábola ya visto y si $0 < \varepsilon < 1$ se obtiene una elipse.

Veamos ahora que forma toma esta ecuación general en coordenadas cartesianas

Para eso notemos que

$$\cos \theta = x/r$$

Reemplazando

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon \frac{x}{r}} = \frac{r \rho}{r - \varepsilon x}$$

Entonces, cancelando y despejando queda

$$\begin{aligned} r - \varepsilon x &= \rho \\ r &= \rho + \varepsilon x \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$r^2 = (\rho + \varepsilon x)^2$$

Usando Pitágoras tenemos

$$r^2 = y^2 + x^2$$

Por lo tanto, nuestra ecuación queda

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= (\rho + \varepsilon x)^2 \\ (1 - \varepsilon^2) x^2 + y^2 - 2\rho \varepsilon x - \rho^2 &= 0 \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Ejercicio 2

La propiedad que queremos demostrar en realidad se trata de una reformulación del teorema de Thales y su recíproco.

Teorema de Thales

Si l_1 y l_2 son paralelas $\frac{OD}{BD} = \frac{OC}{CA}$ entonces,

lo que además estamos asegurando es que vale la vuelta.

Para demostrar todo esto vamos a mirar los triángulos AOB y COD.

Dentro del triángulo AOB consideramos los triángulos BCA y BDA; dado que tienen la misma altura y base, su área es la misma. Por lo tanto, las áreas restantes que corresponden a los triángulos BOC y DOA también son iguales.

Entonces

$$\frac{AC \cdot h}{2} = \frac{DB \cdot h'}{2} \qquad \frac{OC \cdot h}{2} = \frac{OD \cdot h'}{2}$$

Dividiendo queda

$$\frac{\frac{OD \cdot h'}{2}}{\frac{DB \cdot h'}{2}} = \frac{\frac{OC \cdot h}{2}}{\frac{AC \cdot h}{2}}$$

O sea

$$\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$$

Recíprocamente, si vale la relación entre segmentos llegamos a la conclusión de que las áreas amarillas deben ser iguales y por lo tanto las rectas l_1 y l_2 paralelas.

Para pasar al enunciado de nuestra propiedad usamos que

$$OC + AC = OA$$

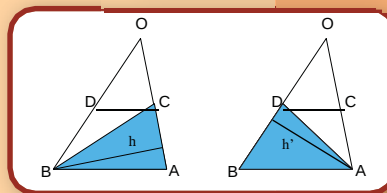
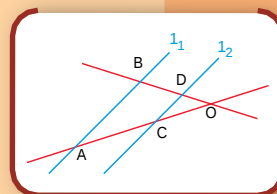
$$OD + BD = OB$$

O sea

$$OC = OA - AC$$

$$OD = OB - BD$$

Entonces, como vale Thales tenemos



$$\frac{OC}{AC} = \frac{OA-AC}{AC} = \frac{OA}{AC} - 1 = \frac{OB}{BD} - 1 = \frac{OB-BD}{BD} = \frac{OD}{BD}$$

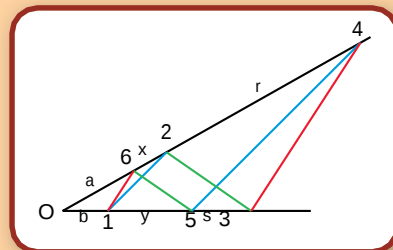
$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

Y vale nuestra propiedad

Ejercicio 3

Como hicimos en la demostración del teorema de Desargues, podemos suponer que los puntos P y Q son ideales y, por lo tanto, basta con ver que R también es un punto ideal.

Como P y Q están en el infinito, las rectas 2-3 y 5-6 (en verde) son paralelas, así como las 1-2 y 4-5 (en azul). Veamos que también lo son las rectas 1-6 y 3-4 (en magenta).



Volveremos a usar la misma propiedad sobre paralelas que en el teorema de Desargues.

Sean a, b, x, y, r y s las distancias entre O y 6, O y 1, 6 y 2, 1 y 5, 2 y 4 y 5 y 3 respectivamente.

Entonces se cumple que

$$\frac{a}{a+x} = \frac{b+y}{b+y+s} \quad \frac{b}{b+y} = \frac{a+x}{a+x+r}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y operamos queda

$$\frac{a}{a+x+r} = \frac{b}{b+y+s}$$

Y de vuelta, esto nos dice que 16 y 34 son rectas paralelas.

Ejercicio 4

En este caso queremos ver que tres rectas pasan por un punto, el caso más sencillo de demostrar es cuando ese punto es ideal. O sea las tres rectas serán paralelas.

Tomemos dos de esas rectas, se intersecan en algún punto. Mandemos ese punto y el punto P al infinito, entonces tendremos dos rectas paralelas. Para ver que la tercer recta es concurrente con las otras dos basta con probar que es paralela a alguna de ellas.

Como dijimos, podemos considerar P y en el infinito y que las rectas 1-4 y 3-6, por ejemplo, son paralelas.

Como 1-4 y 5-6 son paralelas tenemos $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$

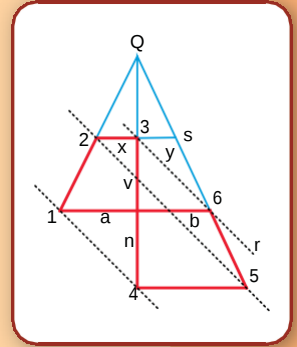
Pero como además consideramos a P en el infinito nos quedaron paralelas 2-3, 1-6 y 4-5, entonces tenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \frac{u}{v} = \frac{r}{s}$$

Y por lo tanto

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$$

Con lo que las rectas 2-5 y 3-6 son paralelas, como queríamos ver.



Capítulo 7

Ejercicio 1

En esta sección resolveremos, paso por paso, el ejercicio propuesto al final del capítulo. Según mencionamos, al tratarse de un poliedro simple entre cuyas caras no hay triángulos o cuadriláteros, vale $C_3 = C_4 = 0$, y en consecuencia la fórmula que resulta ahora es:

$$5C_5 + 6C_6 + \dots + NC_n = 2A.$$

Por otro lado, dijimos que todos los vértices son tríadas y entonces

$$3V = 3V_3 = 2A.$$

Siguiendo la sugerencia, vamos a escribir la fórmula de Euler-Descartes como $14C \cdot 4A + 14V \cdot 10A = 28$, vale decir:

$$14C_5 + 14C_6 + \dots + 14C_n \cdot 2 \cdot (5C_5 + 6C_6 + \dots + NC_n) + 14V \cdot 5 \cdot 3V = 28.$$

Reagrupando los términos, se obtiene:

$$(14 \cdot 10)C_5 + (14 \cdot 12)C_6 + (14 \cdot 14)C_7 + \dots (14 \cdot 2N)C_n = 28 + V,$$

de donde resulta

$$4C_5 + 2C_6 \cdot 28 + V.$$

Ahora podemos imaginar que a cada ángulo de cada cara del poliedro le asignamos un valor fijo, por ejemplo 1. De esta forma, la suma total de los valores de todos los ángulos es $3V$, pues en cada vértice concurren exactamente tres aristas (y en consecuencia, se forman exactamente tres ángulos).

Supongamos ahora que no hay dos pentágonos contiguos: en tal caso, la cantidad de vértices que pertenecen a una cara pentagonal es $5C_5$, pues no hay vértices “repetidos”. Esto dice que dichos vértices aportan, a la suma total, un valor igual a tres veces la cantidad $5C_5$, es decir: $15C_5$. Si además ningún hexágono toca a un pentágono, entonces cada uno de los ángulos de las caras hexagonales aporta por lo menos 1 a la suma total, con lo que resulta

$$3V \geq 15C_5 + 6C_6 \geq 3(4C_5 + 2C_6) \geq 3(V + 28) > 3V,$$

lo que es absurdo. Esto prueba que alguna de las dos suposiciones que hicimos es falsa: en otras palabras, o bien hay pentágonos contiguos, o bien algún hexágono toca a algún pentágono.

Capítulo 8

Ejercicio 1

Calcule $1/\cos(87^\circ)$, y $1/\cos(89, 853^\circ)$. ¿Son muy diferentes?

Utilizando una calculadora tenemos $\cos(87^\circ) = 0,0523$, $\cos(89, 853^\circ) = 0,0025$. Por lo tanto, $1/\cos(87^\circ) = 19,1$, y $1/\cos(89, 853^\circ) = 389, 8$.

Ejercicio 4

Recordemos las relaciones que hemos obtenido:

$$\begin{aligned} (i) \quad D &= 390 \cdot d \\ (ii) \quad r &= 110 \cdot d \\ (iii) \quad R &= 110 \cdot D \end{aligned}$$

Supongamos que conocemos D . Utilizando la ecuación (i), averiguamos r ; ahora, gracias a (ii), averiguamos d ; finalmente, utilizando (iii), calculamos R .

Si conocemos r , la ecuación (ii) nos permite averiguar d ; conociendo d , averiguamos D con (i), y finalmente, como averiguamos D , despejamos R de (iii).

Por último, si conocemos R , con la ecuación (iii) calculamos D ; reemplazamos D en (i) y tenemos d , y finalmente, con la ecuación (ii) calculamos r .

Bibliografía

La siguiente lista, lejos de ser exhaustiva, es apenas un punto de partida para profundizar los temas del texto. En particular, en algunos libros hay al final un número entre corchetes, que indica el capítulo al cual amplía o sirve de referencia.

Aubrey, J. *A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679*. En: Oliver L. Dick (ed.), *Aubrey's Brief Lives*. Nonpareil Books (1957). [7]

Ayres, F. *Teoría y problemas de trigonometría plana y esférica*. Schaum's outline series. México, McGrawHill. (1979). [5]

Coxeter, H.S.M. *Introduction to geometry*, John Wiley and Sons, (1989)

Euclides *The Thirteen Books of The Elements* (por Thomas L. Heath) Dover (1956)

Henderson, *Experiencing geometry in euclidean, spherical and hyperbolic spaces*, 2nd edition, Prentice Hall. [5]

Kazarinoff, N. D. *Geometric Inequalities*, The Mathematical Association of America, (1983).

Kuhn, T. *La revolución copernicana*. Ed. Orbis S.A., Hyspamérica, (1978). [8]

Lebesgue, H. *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*. J. Math. Pures et Appl. 19, (1940), 27-43. [7]

Levi. B. *Leyendo a Euclides*, Libros del Zorzal, Buenos Aires (2000). [2]

Platón, *Timeo*. Ed. Colihue, Buenos Aires (1999). [7]

Poincaré, H. *Últimos pensamientos*. Ed. Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires (1946). [7]

Puig Adam, P. *Curso de geometría métrica*. I, Fundamentos. II, Complementos. Madrid, (1973).

Santaló, L. *Geometrías no euclidianas*, Eudeba, (1969). [6]

En la web:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> [2]

www.ilusionario.es [6]

