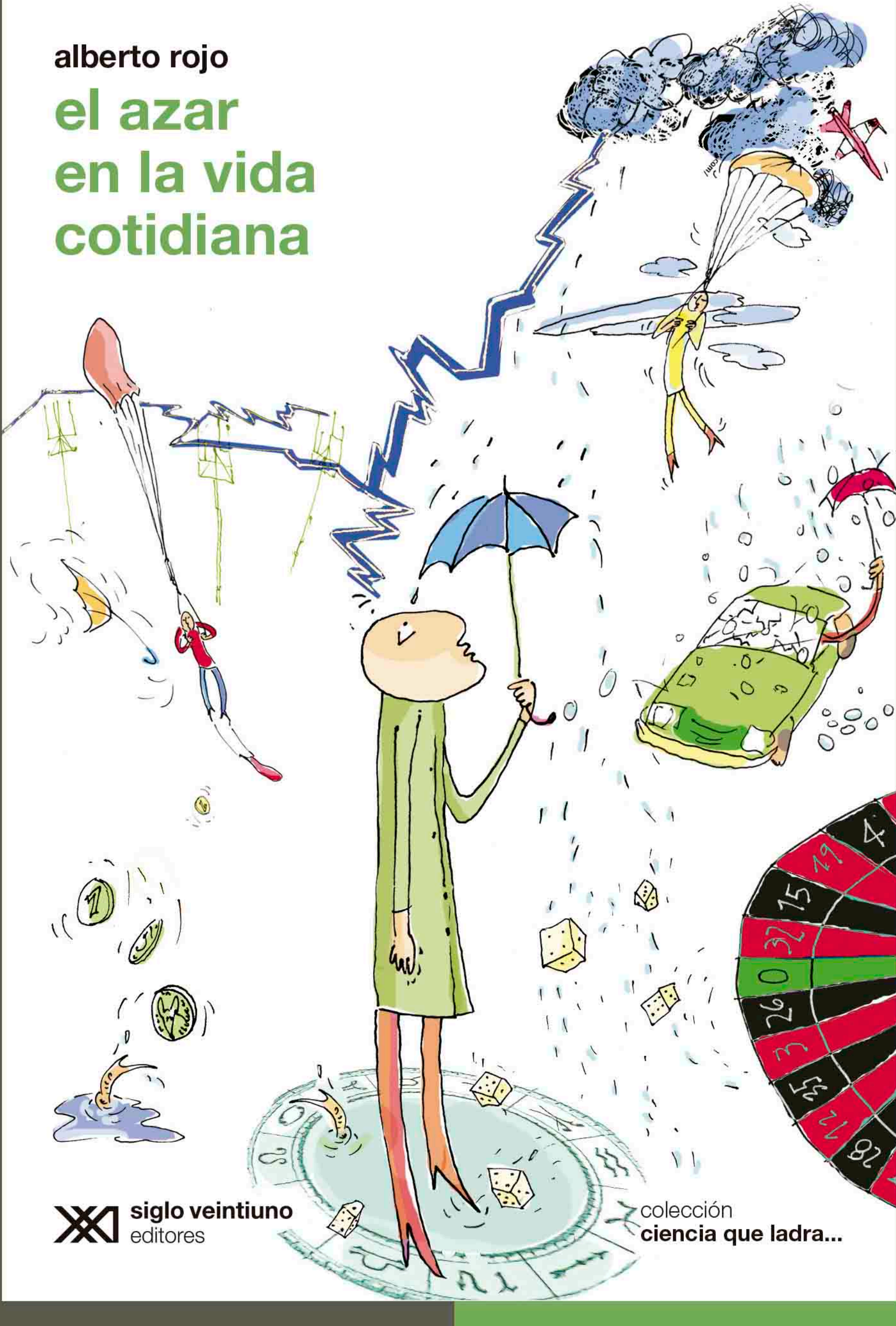
alberto rojo

el azar en la vida cotidiana



siglo veintiuno editores

colección ciencia que ladra...

Lo coincidente y lo causal

La más sorprendente de las coincidencias imaginables
sería la ausencia completa de coincidencias.
John Allen Paulos

"Creer o reventar, las coincidencias argentinas entre México 86 y Sudáfrica 2010 sorprenden. Argentina se clasificó a Sudáfrica con un triunfo 2-1 ante Perú, y en el 86 empató 2-2 con Perú para clasificarse. En ambos mundiales la nación anfitriona estuvo a punto de perder la localía (por el terremoto de México y por demoras de construcción en Sudáfrica). En pocos días Argentina se medirá con Corea del Sur, como en México 86."

El párrafo está tomado de un suplemento del diario *La Gaceta de Tucumán*, publicado días antes del comienzo del Mundial 2010, y continúa con una larga lista de analogías entre Messi y Maradona ("¿Dos gotas de agua?"). Entre esas analogías figuran las siguientes: los dos se iniciaron en la Selección en un partido contra Hungría; los dos habían ganado un Mundial juvenil cinco años antes de ingresar a la Selección; Sudáfrica 2010 fue el segundo Mundial para Messi, como lo había sido México 86 para Maradona; ambos vieron el Mundial anterior desde el banco.

Digamos que elijo no reventar; entonces, ¿qué debo creer? ¿Que las coincidencias implicaban un triunfo argentino? Quizás no tanto, pero ciertamente este artículo es un caso, entre muchos, de atribución de significado a las coincidencias. Y si bien no queda del todo claro cuál es ese significado que se les atribuye, existe una tendencia a mitificar nuestra sorpresa ante lo improbable, a pensar que esas sincronicidades accidentales son las ramas visibles de una red de causas mágicas y no un mero resultado del azar.

Dentro del bosque de coincidencias, un ejemplo muy citado –publicado en la revista *Time* en 1964–[1] es el de los presidentes norteamericanos John F. Kennedy y Abraham Lincoln: Kennedy fue elegido en 1960 y Lincoln en 1860. Sus dos esposas perdieron hijos mientras vivían en la Casa Blanca. Ambos fueron asesinados un viernes, Lincoln en el teatro Ford y Kennedy en un automóvil fabricado por la empresa Ford. Los dos recibieron un disparo en la cabeza. Los dos sucesores se llamaban Johnson: Andrew Johnson, nacido en 1808, y Lyndon Johnson, nacido en 1908. Los dos magnicidas fueron asesinados antes del juicio.

¿Qué significan estas coincidencias? Nada. De eso quisiera convencerlos en este capítulo.

Comenzaré con un experimento que ilustra lo peculiar de estas casualidades estadísticas: el hecho de que son improbables, pero, a la vez, inevitables. Y concluiré contándoles una historia cuyo protagonista no es otro que el superfamoso jugador argentino de fútbol Lionel Messi.

Tira de coincidencias

El experimento funciona bien con muchas personas; por ejemplo, consideremos un aula llena de estudiantes.

Dividimos a los alumnos en dos grupos y los distribuimos en dos aulas separadas. Mientras tanto, el evaluador del experimento permanece fuera de las aulas. Ahora les pedimos a los miembros

1 Disponible en <www.time.com/time/magazine/article/0,9171,876021,00.html>.

del primer grupo que, en orden, vayan lanzando monedas, de a una por vez, hasta completar 100, y anotando cada resultado hasta completar una tira: si sale cara pone un 1 y si sale cruz, pone un 0. Mientras tanto, el otro grupo hará lo mismo, pero, en lugar de lanzar monedas verdaderas, cada estudiante irá anotando lo que *cree* que saldría si tirara una moneda. (Si los grupos son reducidos habrá que realizar varias vueltas hasta completar 100.) Un punto importante del experimento es que cada participante, cuando le toque el turno, debe ver los resultados que van saliendo. Al concluir el experimento, mirando cada una de las dos tiras, el evaluador tiene que decidir cuál es cuál.

En la siguiente serie muestro lo que obtuve con un grupo de asistentes al foro de ciencias de la Feria del Libro de 2010 en Buenos Aires.

1011100101001001100100010111101000111100101011010001001101101001000100100111110100110110101010101101

A

0111111100011001010100000000100001001110001000010000101000011111001100011101101110100011110000100111

B

¿Cuál de las dos tiras corresponde a los resultados reales y cuál a los imaginados?

Si bien a primera vista los dos parecen bastante azarosos, existen varias diferencias. Por ejemplo, A es un poco más uniforme que B. Otra diferencia cuantitativa es que B presenta una secuencia de 8 cruces y otra de 7 caras, en tanto que en A no hay una secuencia tan larga de caras o cruces seguidas. La más extensa es una de 5 caras. Esto es una clara indicación de que B es el resultado verdadero y A el imaginado.

Esto quizás les parezca extraño ya que, si uno lanza 7 veces una moneda, existe una probabilidad muy baja (menos del 1%) de que las 7 veces caiga cara. Sin embargo, en una secuencia de 100 monedas, como la del experimento, hay un 33% de probabilidades de que *en algún punto de la secuencia* haya 7 caras consecutivas (y un 53% de que haya 6). De modo que hay una probabilidad mayor al 50% de que salgan 7 tiros consecutivos iguales, ya que puede haber 7 caras seguidas o 7 cruces seguidas. En otras palabras, en cien tiros es más probable que ocurra una racha de 7, que no ocurra.

En un bar de Buenos Aires, el personaje de la novela *La muerte lenta de Luciana B.*, de Guillermo Martínez, lanza una moneda al aire 100 veces, anota los resultados en una servilleta, subraya las rachas y encuentra que hay “rachas de 5, de 6 y hasta de 7 signos repetidos”. Y luego agrega “aún la ciega moneda parecía tener nostalgia de repetición, de forma, de figura”. Esas rachas son inevitables por una simple razón probabilística. La razón por la cual en la serie imaginada en el experimento de la Feria del Libro no se producen 6 o 7 resultados consecutivos iguales es que uno tiende a pensar que, si ya salieron 5 caras, sería “demasiada casualidad” que la siguiente fuera también cara, y entonces elige cruz.

Este simple experimento indica que las casualidades pueden, de hecho, ocurrir: no es lo mismo 7 caras seguidas en un experimento aislado que en algún tramo de una secuencia más larga. A menudo ignoramos este tipo de diferencias y nos sorprendemos ante las coincidencias, que en verdad son parte de un entramado de sucesos que consideramos normales y que pasamos por alto, pero que en rigor ¡son igualmente coincidentes! Sucesos que, en forma aislada, tienen una baja probabilidad de manifestarse, en una secuencia larga, por el contrario, tienen una alta probabilidad de ocurrir. Así, la acumulación de un gran número de incertidumbres puede originar una certidumbre. Por ejemplo, ganar la lotería obviamente es muy improbable, “sin embargo” hay casos documentados de gente que ganó dos y hasta tres veces a lo largo de su vida. Varios de los ganadores consideraron que se trató de un milagro o del “destino”. Pero eso no es cierto: en el mundo hay tantos jugadores de lotería que en, digamos, cincuenta años no es improbable que alguien acierte los resultados más de una vez.

Lo que para el doble ganador de la lotería es el destino, o la “racha”, para el jugador que emboca ocho tiros libres seguidos, o una "señal" para quien se cruza por la calle, dos veces en el mismo día, con alguien que no veía hacía años, son sólo circunstancias fortuitas en un mar de variaciones, de cuyo oleaje aleatorio cada tanto emerge, de pura casualidad, una perfecta magnolia de espuma. En su ensayo "La Biblioteca total", antecesor de su cuento más famoso, "La Biblioteca de Babel", Borges enumera apariciones literarias de estas ocurrencias fortuitas y cita el ejemplo de la media docena de monos que, "provistos de máquinas de escribir, producirán en unas cuantas eternidades todos los libros que contiene el British Museum", y en una nota al pie agrega: "Bastaría, en rigor, con un solo mono inmortal".

Hace poco, mi amiga Fortunata me llamó por teléfono y me dijo: "Esta mañana me crucé por la calle con un ex compañero del colegio al que no veía desde hacía muchos años. Después, a la noche, cuando fui a cenar, volví a encontrarlo en el restaurante. Eso es increíble". Conociendo mi escepticismo respecto de la mística de las coincidencias, agregó en tono de desafío: "Explicate eso".

La explicación es muy sencilla. Durante los años posteriores a su egreso del colegio es probable que Fortunata se haya encontrado con otros compañeros por la calle pero esos encuentros no tuvieron nada de especial o sorpresivo para ella y los ignoró. Ahora, dos encuentros casuales con la misma persona en el mismo día es una situación mucho más improbable, como las 7 caras seguidas. Sin embargo, a lo largo de años, como en la secuencia de las 100 monedas, es probable que alguna vez ocurra. La probabilidad de que *hoy* nos encontremos dos veces con la misma persona es baja, pero si en lugar de "hoy" digo "alguna vez" la situación se torna más probable.

A diario, nuestra valoración de las coincidencias es producto de una visión selectiva de los hechos, de una construcción mental de regularidades: vemos dragones en las nubes,[2] conejos en

2 Como Antonio en *Antonio y Cleopatra,* de Shakespeare: "Sometimes we see a cloud that's dragonish, / A vapor sometime like a bear or lion, / A towered citadel, a pendant rock, / A

la Luna[3] y mujeres en la borra del café.[4] Y como esos seres no aparecen sólo por azar, invertimos el razonamiento y pensamos que lo azaroso carece de formas y no admite patrones parciales.

Por ejemplo, en la tira A uno tiende a pensar que raramente habrá "rachas" de 7 caras seguidas, y que las caras y cruces van a alternarse más de lo que lo hacen en realidad. Por eso la distribución de caras y cruces que eligieron los estudiantes es más homogénea que la real, como en algunas películas que muestran cielos artificiales –escena nocturna, hundimiento del *Titanic*, Leonardo y Kate corriendo por la cubierta, el barco ya oblicuo sobre el agua–, donde las estrellas están distribuidas más o menos uniformemente, sin los huecos típicos del cielo real.

¿Cuál es el "error" de este cuadro? Las estrellas están pintadas muy uniformes; no están distribuidas al azar, como en un cielo verdadero.

Jirafas en Karlsruhe, de Mike Smith.

forked mountain, or blue promontory / With trees upon 't that nod unto the world / And mock our eyes with air. Thou hast seen these signs. / They are black vesper's pageants" (acto IV, escena 14).

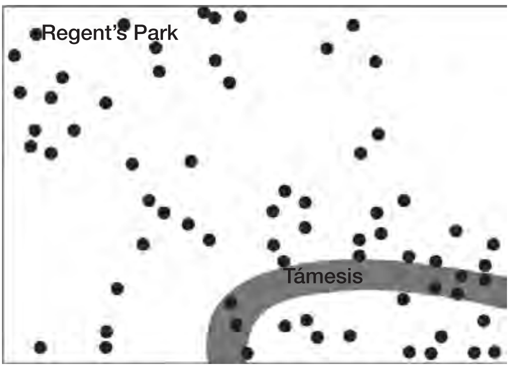
3 Como en la leyenda maya.

4 Como Claudio en *La borra del café*, de Mario Benedetti.

Más aún, si se fijan al final de la tira A, hay una secuencia alternada de largo 11 (6 caras y 5 cruces). Esa secuencia (que en el fondo es como cualquier otra) tiene una baja probabilidad de aparición, del 2%. Sin embargo, los participantes la dispusieron así muy probablemente por una equiparación errónea entre uniformidad y azar: las rachas están dadas a ocurrir, al menos en experimentos en los que un suceso es independiente del anterior, como ocurre al lanzar una moneda. Y esta conclusión nos conduce al segundo experimento.

Bombas sobre Londres

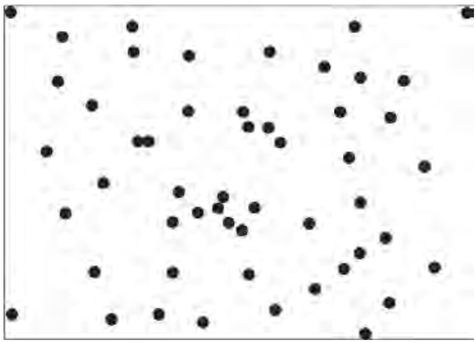
Durante la Segunda Guerra Mundial, más de 500 bombas alemanas cayeron sobre Londres. En la siguiente figura se reproducen los puntos de impacto en un sector de la ciudad.



Bombas sobre Londres

Como ven, hay una acumulación alrededor del Regent's Park, mientras que otras zonas salieron casi indemnes. Esta distribución desigual motivó la creencia popular de que las bombas caían en las partes más pobres de la ciudad. Sin embargo, en un interesante artículo publicado en 1946,[5] un matemático que trabajaba para la compañía de seguros Prudencial analizó los datos con una técnica precisa (que examinaremos en el capítulo 6) y concluyó que la distribución de puntos en realidad era azarosa. La disposición en grupos y huecos es inevitable cuando los puntos aparecen de manera independiente, pero en general esperamos algo más bien uniforme.

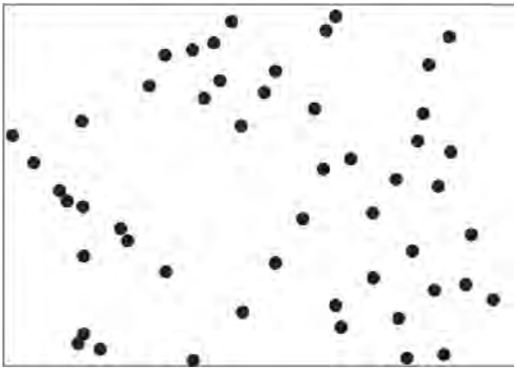
Para ilustrar este error de percepción realicé el siguiente experimento cualitativo en una de mis clases. Les pedí a 50 estudiantes (sin anticiparles la historia de las bombas de Londres) que en una misma hoja en blanco cada uno dibujara un punto al azar. El resultado fue el siguiente:



A. Experimento con estudiantes

Por otro lado, mediante un programa de computadora generé al azar, en un rectángulo, 50 puntos independientes entre sí, y el resultado fue:

5 R. D. Clarke, "An application of the Poisson distribution", *Journal of the Institute of Actuaries*, 72, 1946, p. 32.



B. Simulación con computadora

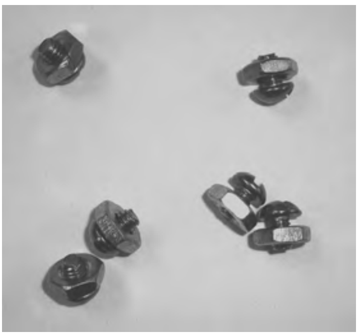
Como pueden ver, el caso aleatorio (B) realizado en la computadora tiene cúmulos y huecos parecidos a los de la zona de Londres, mientras que el artificial (A) es más uniforme.

En los apartados que siguen muestro dos ejemplos del orden que suele emerger del desorden.

Creacionismo cotidiano

En el cajón de los tornillos sueltos de los talleres mecánicos cada tanto aparece un bulón ajustado a su tuerca. Los posibles orígenes son dos: de tanto abrir y cerrar el cajón el apareamiento se genera espontáneamente, o bien hay alguien que se entretiene enroscando una cosa en la otra y luego guardándolas en el cajón. El dilema involucra nada menos que el origen de la vida. Que las piezas se junten por azar suena muy poco probable –diría la intuición creacionista–, ya que para ajustar una tuerca a un bulón se precisa la mano inteligente que la enrosque. Sin embargo, mediante un experimento casero podemos refutar esa intuición.

Tomemos unos 60 bulones pequeños de un cuarto de pulgada de largo y 3 milímetros de diámetro de rosca, y el mismo número de tuercas (que podrían ser un poco más grandes para minimizar la fricción). Coloquemos las piezas en una lata de café y a continuación comencemos a agitarla, rotándola y sacudiéndola un poco, durante unos 25 minutos (esperemos a que no haya nadie en casa, porque el ruido que producen es infernal). En mi caso, al abrir la lata encontré –con sorpresa, lo confieso– ¡seis parejas enroscadas!



Los invito a ensayar otras variantes.

Este experimento es una adaptación del de Donald Simanek, profesor emérito de física de la Universidad de Lock Haven, en Pensilvania. Donald lo pensó como un ejemplo didáctico para ilustrar un fenómeno a contracorriente de la intuición: *la generación de orden a partir del desorden.* Según me contó, sus propios colegas pensaban que requeriría mucho tiempo lograrlo; sin embargo, Donald puso tuercas y bulones en un tambor rotante de juguetería, de los que se usan para pulir y redondear piedras, y en menos de una hora encontró apareamientos. Mi variante es más casera todavía, pero es igualmente útil para ilustrar que, con los ingredientes apropiados, pueden originarse estructuras ordenadas.

Ahora pasemos de la lata de café al mundo real, a la complejidad, el caos y el orden que nos rodean. ¿La diversidad de criaturas que pueblan este singular universo puede haber surgido por accidente? Para los devotos del "diseño inteligente" –una alternativa teórica al creacionismo tradicional, sin poder predictivo y concebida sólo para desacreditar al darwinismo–, la respuesta es negativa, ya que sostienen que hay, o hubo, una inteligencia que diseñó el mundo. Como ocurre con toda seudociencia, es imposible refutar esa respuesta, del mismo modo que es imposible refutar que la tuerca abulonada pudo haber sido obra de una mano que la enroscó. Por el contrario, la ciencia da una respuesta afirmativa a la pregunta y propone un mecanismo, la selección natural, por el que las moléculas y las proteínas logran "enroscarse" paulatinamente y evolucionar hacia la diversidad y la complejidad de la vida.

A estos equívocos se suma una omnipresente confusión ante lo improbable. Así, la chance de que yo, hoy, gane la lotería es ciertamente muy baja, pero es muy probable que alguien la gane. El elegido, sin embargo, podría decir que fue producto de un milagro, ya que las probabilidades de que acertara todos los números eran ínfimas.

Del mismo modo, una ínfima fracción de los innumerables caminos evolutivos empieza en un caldo primordial y culmina en las flores que vemos, en la inasible multiplicidad de la fauna y en

Lady Gaga. Y somos hoy los ganadores de esa lotería cósmica. O al menos los ganadores parciales ya que en el camino podrían haber quedado otras posibilidades, otros órdenes, otras inteligencias.

Para ejemplificarlo, supongamos que un domingo recibimos un e-mail de un consultor financiero (llamémoslo Pipo Predictorium) que predice el Merval[6] y a modo de promoción nos regala un "Mañana va a subir". Y ese lunes, el mercado de valores efectivamente experimenta un alza. "Le pegó de pura suerte", podríamos decir y borramos el mensaje. El domingo siguiente, el e-mail se repite, pero ahora vaticina: "Mañana va a bajar". Y el lunes el mercado sufre una baja. Con el mismo argumento que la primera vez, procedemos a eliminar el mensaje. Así, los e-mails se repiten de domingo en domingo y las predicciones resultan ser correctas. Entonces deducimos: "Este tipo sabe. Es imposible que acierte por azar tantas veces seguidas". ¿Estaremos en lo cierto?

Digamos que el consultor tiene una lista de 2000 direcciones de e-mail y las divide en dos grupos de 1000. A un grupo le dice que el mercado va a subir y al otro, que va a bajar. Lógicamente, una de las predicciones será la correcta, a menos que el mercado se mantenga igual (algo improbable). El domingo siguiente repite el mismo procedimiento con el grupo al que envió el pronóstico acertado, y así se queda con 500 pronósticos correctos. El siguiente domingo los reduce a 250, hasta llegar a un grupo de 125 direcciones que recibieron cuatro "predicciones" correctas. En ese grupo quedamos nosotros.[7] Los demás no "evolucionaron" por la combinación de azar y selección natural, y dejaron de recibir los e-mails.

El ejemplo de los bulones ilustra la generación de estructuras ordenadas a partir del desorden en el mundo inanimado. Sería exagerado extrapolarlo sin más a la biología,

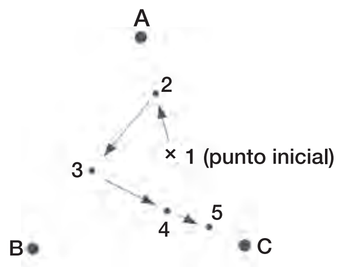
6 El índice financiero que indica el comportamiento del mercado de valores.

7 De haber empezado con un grupo de 2048 e-mails (2 elevado a la potencia 11), el proceso podría repetirse hasta quedar con un grupo de dos personas ¡que habrán recibido diez predicciones correctas!

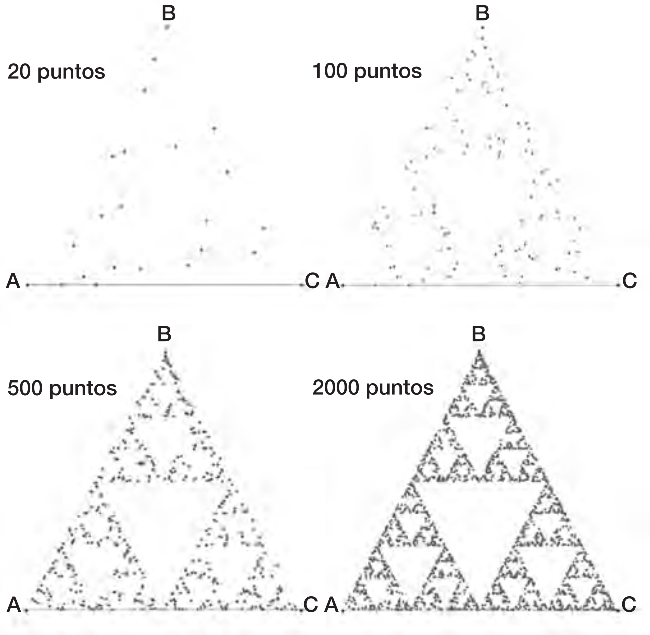
pero apunta al elemento central del darwinismo, la evolución por caminos preferenciales (la rosca en este caso) de complejidad creciente, y da al problema una divertida vuelta de tuerca.

El juego del caos

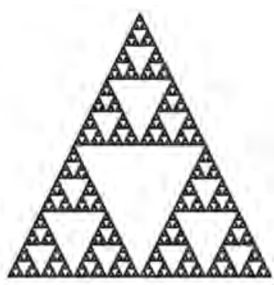
Imaginemos el siguente juego: en un papel, dibujen tres puntos (que llamaremos A, B y C) cuyos vértices formen un triángulo equilátero. Como primer paso, elijan un punto al azar dentro del triángulo. Y luego, uno de los tres puntos, A, B o C, también al azar. A esta última elección azarosa la pueden hacer lanzando un dado y, si sale 1 o 2, seleccionen A; si sale 3 o 4, B, y si sale 5 o 6, C. Con una regla, midan la distancia desde el punto inicial al punto obtenido y pinten un nuevo punto en la mitad de ese segmento. Ahora, a partir de ese nuevo punto, repitan el mismo procedimiento varias veces. Si los primeros cuatro tiros dieron por resultado A, B, C y C, la secuencia de puntos será:



Al repetir el procedimiento varias veces, irá surgiendo un dibujo regular, a pesar de lo azaroso de la regla.



Como realizar todo el juego a mano lleva mucho tiempo, lo hice en la computadora y, para un millón de puntos, el dibujo resultante es prolijo y llamativo. En conclusión, ¡el orden puede surgir del azar!



Los invito a explorar el juego utilizando otras formas.

La paradoja de los cumpleaños

¿Alguna vez se sorprendieron al descubrir, en alguna reunión, que dos personas cumplían años el mismo día? Las coincidencias de este tipo son otro ejemplo canónico de nuestra errónea intuición sobre el azar. Veámoslo en un ejemplo.

Digamos que elijo una persona cualquiera por la calle y le pregunto qué día cumple años. La chance de que cumpla el mismo día que yo es muy baja, de 1 sobre 365 (no incluyo los años bisiestos para simplificar la idea). Algo que, en lenguaje de probabilidades (que abordaremos con mayor detalle en el capítulo 3), equivaldría al 0,3%. Quiere decir que la probabilidad de que dos personas tomadas al azar cumplan los años el mismo día es del 0,3%. Ahora bien, si tomáramos al azar un grupo de 23 personas, ¿cuál creen que será la probabilidad de que haya dos que cumplan el mismo día?

Experimentos realizados con estudiantes demuestran que la gente tiende a pensar que la probabilidad será 23 veces mayor que el 0,3%, algo así como el 6%. Sin embargo, en un grupo de 23 personas tomadas al azar la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día es del orden del ¡50%! No obstante, la posibilidad de coincidencias en un grupo de 23 + 23 = 46 personas no es del 100%, sino del 95%, que igualmente sigue siendo bastante alta.

Entonces, si por ejemplo tomamos 100 grupos de 46 personas de un estadio de fútbol, en aproximadamente 95 de ellos habrá coincidencias de cumpleaños. Esta curiosidad tiene un origen similar al de las monedas y al ejemplo de las bombas sobre Londres.

Podemos apreciar esta similitud al equiparar la llegada de personas a una reunión con un hipotético caso de "bombas" que caen en una recta. Sobre una regla de 365 centímetros de largo tiraremos "bombas" al azar, que sólo podrán caer en las marcas de los centímetros. Las bombas caerán en cada marca con igual probabilidad y corresponderán al cumpleaños de las personas que ingresarán a la fiesta. La marca 1 en el centímetro equivale al 1º de enero, y la del 365 al 31 de diciembre. Cada bomba caerá en una posición independiente de donde cayeron las otras, pero no se distribuirán de modo uniforme, sino que los "grumos" –o coincidencias– se volverán inevitables a medida que el número aumenta. Dicho de otro modo, con 40 invitados es muy improbable que no haya una coincidencia. De ser así, las bombas tendrían que haber caído formando un arreglo casi regular, y eso sí es poco probable.

El jardín de las coincidencias de la física[8]

La falacia de las coincidencias implica atribuirles a algunos eventos un vínculo causal inexistente. Pero a veces la cosa no es tan clara como en el ejemplo de las bombas y los cumpleaños. De hecho, los caminos de la física –cuyo propósito es descifrar el esqueleto causal de la naturaleza– están espolvoreados de coincidencias fortuitas, pistas falsas que en más de una ocasión inspiraron al esoterismo y la seudociencia.

Una caricatura de esta falacia es la historia contada por Edmond Rostand (autor del famoso *Cyrano de Bergerac*), en su comedia *Chantecler*, de un gallo que creía que gracias a su canto el sol salía todos los días. Otra coincidencia, aunque menos frívola, es que, desde la Tierra, el disco de la Luna y el del Sol se ven del mismo tamaño, si bien la Luna es cuatrocientas veces más chica que el Sol, y está cuatrocientas veces más cerca. Gracias a esta hermosa coincidencia, en un eclipse la Luna cubre por completo al Sol. No obstante, se trata de un accidente sin un significado fundamental: no existe una relación de causa y efecto por la cual el cociente de los diámetros del Sol y la Luna sea (casi) el mismo

8 Adaptado de "Twelve coincidences", de Alberto Rojo, *Oakland Journal*, 12 de octubre de 2007.

que el de sus distancias de la Tierra. Simplemente, el azar de la evolución cósmica determinó que así fuera.

La segunda coincidencia lunar es significativa: los períodos de rotación alrededor de su eje y alrededor de la Tierra son los mismos. Esto se debe a las fuerzas de las mareas que tienden a alinear a una Luna ligeramente oblonga en dirección a la Tierra. Como resultado, la luna siempre nos muestra la misma cara. La tercera coincidencia lunar es la correspondencia entre el ciclo menstrual femenino y el mes lunar: aproximadamente 28 días. El término "menstruación" proviene de *mensis* (mes), que a su vez se vincula con *mene* (Luna en griego). En cambio, los períodos menstruales de otros primates son bastante distintos, de modo que esta coincidencia parecería accidental. No puedo evitar mencionar una antigua coincidencia, hoy por cierto considerada sin sentido, entre la Luna y la locura, que de cualquier modo perdura en el término "lunático".

Una de las coincidencias más famosas de la física es lo que el astrónomo Johannes Kepler llamó "el misterio cósmico". En 1595, Kepler estaba obsesionado buscando explicar por qué había sólo seis planetas. Y arribó a una respuesta siguiendo la premisa de que Dios era un geómetra e invocando la correspondencia entre sólidos regulares (o sólidos platónicos) y órbitas planetarias.

Los sólidos regulares (el cubo es uno) son cuerpos cuyas caras, todas idénticas, son polígonos de lados iguales que pueden circunscribirse con un círculo (los polígonos regulares, el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, etc.). Curiosamente, mientras hay infinitos polígonos regulares sólo hay cinco sólidos regulares: el cubo, el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En un lenguaje más afín, podríamos decir que hay sólo cinco "dados" posibles cuyas caras sean polígonos regulares: el cubo, con seis cuadrados; el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, con cuatro, ocho y veinte triángulos equiláteros, respectivamente, y el dodecaedro, con doce pentágonos. Es probable que los griegos hayan construido dados poliédricos. En el Louvre, por ejemplo, hay un dado icosaédrico, con números romanos.

Según Kepler, los sólidos regulares se correspondían con los espacios entre planetas y por eso sólo había "seis planetas". Se empecinó con esa idea al punto de sostener que su argumento explicaba el tamaño de las órbitas. Si uno ponía la órbita de la Tierra en una esfera, le agregaba un dodecaedro alrededor, y luego una segunda esfera que lo cubriera, ¡esa era la órbita de Marte! Repitiendo el procedimiento con un tetraedro, se obtenía la de Júpiter; usando un cubo, la de Saturno; mediante un icosaedro, la de Venus, y con un octaedro, la de Mercurio. Lo sorprendente de esta historia es que los cocientes de los diámetros de las órbitas obtenidos con este procedimiento están en buena correspondencia (aunque no perfecta, claro) con los reales. Pero hoy sabemos que hay más de seis planetas y que la correspondencia es meramente accidental.

Otra coincidencia relacionada con la de Kepler es la llamada "ley de Titius-Bode", anunciada primero por el astrónomo Johann Titius en 1766 y luego popularizada por Johann Bode (dos Johannes, qué coincidencia). Titius encontró una secuencia numérica en las distancias de los planetas al Sol. Al respecto dijo: si tomo la secuencia 0, 3, 6, 12, 24, en la que cada número después de 3 es el doble del anterior, y agrego 4 a cada número, al dividir el resultado por 10, de los primeros siete resultados(0,4; 0,7; 1; 1,6; 2,8; 5,2; 10) seis (2,8 es la excepción) se aproximan a las distancias al Sol expresadas en unidades astronómicas (la distancia del Sol a la Tierra). Lo interesante es que, más tarde, en 1801, la excepción (2,8) fue identificada con Ceres (un "planeta enano") y una serie de asteroides que se encuentran más o menos a esa distancia del Sol. Y aún más, si uno extrapolara la ley a un octavo planeta obtendría 19,6, casi exactamente la distancia a Urano, descubierto en 1781.

Según el astrónomo Alan Boss,[9] se trata de una coincidencia numérica, y comenta que *Icaurus*, una de las revistas más famosas en la astronomía, ya no aceptaba más artículos que pretendieran

9 Alan Boss, "Number game", *Astronomy,* vol.10, 2006, p. 70.

explicar esa ley. Sin embargo, Fred Adams, un astrofísico de la Universidad de Michigan, me aseguró que el espíritu de la ley de Bode es correcto. Entonces, de manera provisoria, podríamos decir que la ley de Bode es una coincidencia significativa.

Otra coincidencia de este tipo fue señalada por Marc Ross, quien investiga la eficiencia del uso energético en la sociedad: el número de vueltas del motor de un automóvil durante su vida útil es aproximadamente igual al número de latidos del corazón en la vida de un mamífero. Cuando hice el cálculo descubrí que, en efecto, coinciden, pero no hay nada más que eso.

La coincidencia de la física que más me gusta[10] está vinculada con el descubrimiento del escocés James Clerk Maxwell, en 1864, de que la luz es a la vez un fenómeno eléctrico y magnético. A mediados de 1800 ya se sabía que el magnetismo era electricidad en movimiento: la atracción y repulsión entre imanes se debe al movimiento de las cargas eléctricas en su interior. Pocos años antes del hallazgo de Maxwell, el físico inglés Wilhelm Weber se planteó lo siguiente: ¿cómo se comparan las magnitudes de la fuerza entre cargas quietas (la fuerza eléctrica) con aquella entre cargas en movimiento (la fuerza magnética)? O, en otras palabras, ¿cuán rápido tienen que moverse dos cargas para que la fuerza magnética entre ellas sea igual a la eléctrica?

Weber diseñó un experimento para medirlo y encontró que dicha velocidad era muy cercana a los 300 000 kilómetros por segundo, es decir, la velocidad de la luz. Y en 1855 escribió: “Uno no debería albergar grandes expectativas en establecer una conexión íntima entre la óptica y la electricidad a través de esta coincidencia numérica”. Al fin y al cabo, en esa época no había razón para pensar que la luz tuviera que ver con la electricidad o con el magnetismo.

10 Si bien hay varias más, como la igualdad entre la masa gravitatoria y la inercial, descrita en mi libro *La física en la vida cotidiana,* incluido en esta colección.

Por mi parte, consulté a Francis Everitt, biógrafo de Maxwell, acerca de esta coincidencia y, según él, Weber no tenía una interpretación física de esta velocidad. Luego, entre 1860 y 1861, Maxwell formuló su trabajo teórico sobre la posibilidad de propagación de señales eléctricas en el espacio, y cuando escribió los números en sus ecuaciones encontró que la velocidad era la de la luz. "Esta coincidencia no es meramente numérica –aseguró– y creo que tenemos fuertes razones para pensar que el éter luminoso y el medio electromagnético son lo mismo." La coincidencia de Weber resultó significativa: la luz es un fenómeno electromagnético.

Para concluir, veamos la que para algunos es *la* gran coincidencia: el hecho de que ustedes y yo existamos en el universo. Somos una miríada de cargas eléctricas (protones, electrones) atraídas por la gravedad hacia la Tierra. Tomemos dos de las partículas íntimas que forman los átomos que nos constituyen, dos protones, por ejemplo. Imaginemos que los ponemos a un milímetro de distancia. Los protones, como tienen masa, se atraen por la fuerza de gravedad y, como tienen carga, se repelen por la fuerza eléctrica. Ahora bien, la fuerza eléctrica se impone a la gravitatoria por mucho, y no se sabe por qué pero resulta que no es ni 100 ni 1000 veces mayor, sino 10 seguido de 39 ceros más grande: un número considerable. Y resulta que si ese número no fuera tan grande, o, dicho al revés, si la gravedad no fuera tan chiquitísima respecto de la electricidad, las estrellas habrían colapsado por la gravedad mucho antes de que la vida comenzara a evolucionar.

Esta es una entre tantas coincidencias numéricas de la naturaleza, llamadas "antrópicas", conexiones entre constantes físicas que tienen los valores precisos para la existencia de la vida. El debate sobre si estas coincidencias son fortuitas o significativas transcurre en el marco de lo que se denomina "principio antrópico", que de algún modo se vincula con nuestro ejemplo de Pipo Predictorium y el Merval. En el proceso de seducir clientes, los potenciales inversores van "descartándose" gradualmente.

Por ejemplo, si Pipo empezara con 1024 (2^{10}) inversores, al cabo de 10 mensajes se quedaría con un solo inversor al que le habrá enviado 10 predicciones correctas. Con los demás, en cambio, en algún momento se equivocó. ¿Qué tiene que ver esto con el principio antrópico? La conexión es la propuesta de que nuestro universo constituye una parte de un gran número de universos dentro de un superuniverso: el "multiverso". Los valores de las constantes físicas estarían distribuidos al azar en esos universos, y resulta que nosotros vivimos en uno cuyas constantes son propicias para la existencia de la vida.

¿Causalidad o coincidencia?

Una coincidencia es la ocurrencia simultánea de dos eventos que no están unidos por una relación de causa y efecto. Dicho de otro modo: una causa implica que un efecto no es producto de una coincidencia. Ahora bien, el universo puede describirse con leyes de la física, y esas leyes son causales, de modo que, desde el punto de vista físico, todo tiene una causa.[11] Entonces, ¿las coincidencias también tienen una causa?

Por un lado, es razonable pensar que existe una secuencia de causas que lleva a Fortunata al restaurante y otra secuencia que lleva a su amigo al mismo lugar en el mismo momento. Lo que percibimos como coincidencia es el cruce de esas dos secuencias, que no están relacionadas entre sí o, en todo caso, cuya relación es tan remota que, a los efectos prácticos, es completamente azarosa. En el poema "Convergencia de los mellizos", Thomas Hargy se refiere al accidende del *Titanic* al chocar con

11 En este punto hay sutilezas que emergen en el mundo cuántico, nuestro mundo microscópico, que es intrínsecamente azaroso, y donde la misma causa puede dar origen a distintas consecuencias. A pesar de esto, la discusión que presento en esta sección sigue siendo válida.

el iceberg como una cita entre dos colosos en medio del océano: mientras se estaba construyendo el barco, "a una distancia oscura y silenciosa, también crecía el iceberg". Y Borges también prestigia ese cruce de causas cuando, en el cuento "Deutsches Requiem", dice: "Todo encuentro casual [es] una cita".

Pero la intuición nos engaña, pone el foco en ciertos atributos, ignora otros y hace de esa relación remota entre causas un parentesco cercano. En el caso de los asesinatos de Kennedy y Lincoln, podríamos haber elegido otros atributos: ambos murieron en meses distintos, sus edades eran distintas cuando fallecieron, fueron asesinados en distintos estados, etc. Pero si centramos la atención en unos e ignoramos otros, la resultante es sorprendente.

En 1992, la revista *Skeptical Inquirer* realizó un concurso para detectar coincidencias entre presidentes. El ganador encontró doce coincidencias entre Kennedy y el presidente mexicano Álvaro Obregón: "Kennedy" y "Obregón" tienen 7 letras, los dos fueron asesinados, los dos asesinos tenían tres nombres y murieron poco después del atentado; los dos presidentes se casaron en años que terminaban en 3, los dos tuvieron un hijo que murió a poco de nacer, los dos provenían de familias numerosas y tenían cuarenta y tantos años.

Al finalizar el Mundial de Fútbol de 2010 el diario *Clarín* publicó un juego de coincidencias entre Messi y Maradona, que parecía remedar el augurio de *La Gaceta de Tucumán*, comparándolo con el de 1982 en lugar del de 1986. En España 82, Maradona había jugado 5 partidos, así como Messi en Sudáfrica. "Parece increíble –dice el artículo–, pero es cierto: los dos fueron las máximas esperanzas argentinas y no sólo no respondieron a las expectativas sino que además tuvieron un promedio idéntico de *Clarín* de acuerdo a sus prestaciones (6,8)".

En la década de 1920, el sicólogo Carl Jung irrumpió con un concepto enigmático: el principio de sincronicidad. La idea, confusa por cierto, consiste en la experiencia de dos eventos "coincidentes pero no causales", es decir, dos acontecimientos improbables, que no están relacionados causalmente pero cuya ocurrencia simultánea es “significativa”. Este principio contiene uno de los rasgos salientes de la seudociencia: la ambigüedad y la imposibilidad de refutarlo. Como asegura Arthur Koestler en su interesante libro *Las raíces de la coincidencia*: “Uno se pregunta por qué Jung creó estas complicaciones innecesarias acuñando un término que implica la simultaneidad, y luego explicando que no significa lo que significa”.[12] El análisis cuidadoso de las probabilidades revela que las coincidencias son inesquivables, que su acaecer no tiene nada de raro y que lo único sorprendente sería que no sucedieran.

En el capítulo siguiente me adentraré aún más en las aventuras numéricas del azar, delinearé el modo en que el concepto de “normalidad” germinó a partir de la historia de las probabilidades, y contaré una divertida anécdota sobre el control de calidad en una panadería alemana.

12 Arthur Koestler, *The roots of coincidence*, Nueva York, Random House, 1972, p. 95.

Lo frecuente y lo probable

> Ser bisexual duplica las chances de conseguir una cita un sábado a la noche.
> **Woody Allen**

La matemática es el arte de demostrar. Uno postula un puñado de enunciados evidentes e incuestionables –los axiomas– y luego va entretejiéndolos según reglas precisas. Al final de ese laborioso ejercicio emergen tapices inesperados: los teoremas.

En la geometría –ese mundo de rectas, triángulos y círculos–, este juego parte de los postulados de Euclides,[23] que, en lenguaje coloquial, dicen cosas tan evidentes como: siempre puedo agarrar una regla, trazar una recta entre dos puntos y luego extender esa recta indefinidamente. O, si tomo uno de esos segmentos que tracé con la regla, siempre puedo agarrar un compás y trazar un círculo usando ese segmento como radio del círculo. O este otro: todos los ángulos rectos son "congruentes", esto es, si los pongo uno encima del otro encajan perfectamente. Por último, si tomo un punto fuera de una de las rectas que tracé con la regla, por ese punto sólo puede pasar una única línea paralela a

23 Sabio de cuya escueta biografía sólo se sabe que vivió entre los siglos VI y el III antes de Cristo. Véase Timothy Gowers (comp.), *The Princeton companion to Mathematics*, Nueva Jersey, Princeton University Press, 2008, p. 734.

la recta. Partiendo de estos sencillos postulados y con un manejo artesanal de la lógica puede demostrarse el teorema de Pitágoras, o cosas más raras, como por ejemplo: si tomo el diámetro de un círculo y armo un triángulo uniendo los extremos de ese diámetro con otro punto cualquiera del círculo, la resultante será siempre un triángulo rectángulo.

Uno podría preguntarse si en el camino trazado por Euclides existe una teoría matemática del azar, de modo que, a partir de unos pocos postulados y siguiendo las pautas de la lógica, podamos arribar a enunciados tales como "la probabilidad de que en una reunión de 23 personas tomadas al azar haya dos que cumplan años el mismo día es del 50%". Y la respuesta es: sí. Incluso son postulados o "reglas" sencillas, aunque quizá no tan evidentes como las de la geometría.

Quien los propuso fue el matemático ruso Alexander Kolmogorov, y lo llamativo es que lo hizo hace relativamente poco tiempo, en 1933, miles de años después de Euclides. ¿Por qué tanta demora? Por un lado, por la dificultad de tratar el azar con el rigor que exigen los matemáticos para entrar en sus "palacios de precisos cristales". Por otro lado, debemos considerar el costado pasional del azar, algo que quizá la geometría no posea, como si el cálculo de probabilidades mezclara en partes iguales las emociones con el intelecto. Además, sobrevuela la manera en que la historia de lo incierto y lo azaroso se entreteje con la religión y la política. Si, como dice Galileo, Dios escribió el libro del universo en lenguaje matemático, entonces el capítulo de las probabilidades lo escribió con caligrafía de médico.

Los invito a pasear, a vuelo de pájaro supersónico, por la historia del nacimiento de ese hijo tardío de las ciencias matemáticas: el cálculo de probabilidades. Veremos algunas de las reglas de Kolmogorov ilustradas con ejemplos cotidianos. En algunas secciones el enfoque será más cuantitativo, por lo tanto, su lectura requerirá más paciencia que los capítulos anteriores.

Antiguos adivinadores

Después de la incierta muerte de Judas, los apóstoles eligieron entre dos posibles reemplazantes, Justo y Matías, mediante un método azaroso: "Entonces echaron suertes sobre ellos, y la suerte cayó sobre Matías; y fue contado con los once apóstoles". El método de echar las suertes –ya sea tirando una piola al piso para ver hacia dónde apunta o sacando palitos de distinto largo, como sigue haciéndose en la actualidad– aparece mencionado más de setenta veces en la Biblia (siete veces en el Nuevo Testamento). Incluso en la etimología del término convergen el azar y la religión: la palabra germánica para suertes es "Lot", y de ahí deriva "lotería" y también "lote", en alusión a porciones de tierra asignadas mediante el método de las suertes.[24]

Sin embargo, para un creyente el método no resulta azaroso, ya que echar las suertes sería una manera de interrogar la voluntad divina, ese "algo que ciertamente no se nombra con la palabra 'azar'" y que "rige estas cosas",[25] como diría Borges. El convencimiento de que "el pasado, el presente y el porvenir ya están, minucia por minucia, en la profética memoria de Dios",[26] y de que es posible conocer esa memoria a través de medios mecánicos, vincula antiguos rituales con el presente; por ejemplo, el tiro de dados de piedra en tiempos de Tolomeo con el de las cartas de Tarot un domingo en una plaza de Palermo. Según parece, los juegos de cartas fueron inventados mucho más tarde,

24 Véase Josué 18:6: "Vosotros, pues, delinearéis la tierra en siete partes y me traeréis la descripción aquí, para que yo eche suertes delante de Jehová, nuestro Dios"; y 26:53, 55: "Habló Jehová a Moisés y le dijo: 'entre estos se repartirá la tierra como heredad, conforme al número de registrados. […] Pero la tierra será repartida por suertes; heredarán según el número de los registrados por cada tribu paterna'".

25 Jorge Luis Borges, "Otro poema de los dones".

26 Jorge Luis Borges, *El informe de Brodie*.

a mediados de 1300, pero una vez que entraron en uso fueron desplazando a los dados tanto en los juegos de mesa como en los ejercicios de adivinación y los augurios religiosos.[27] Y Además, fíjense que el "divi" de la palabra "adivinar" significa "dioses".[28]

De esa conjunción entre la práctica mundana de los dados con la posibilidad de conocer la mente de Dios mediante sortilegios surge la desaprobación eclesiástica de los juegos de azar y, en consecuencia, el retraso en la formulación matemática de las probabilidades. Así, existen dados de seis caras muy antiguos, del año 2750 antes de Cristo, cuyo precursor fue un hueso de forma irregular, la taba –llamada también astrágalo–, que en distintas variantes siguió usándose como juego de azar.

El azar ya tenía una divinidad en Grecia, la diosa Fortuna, pero la simple idea de que, al lanzar un dado, había seis posibilidades igualmente probables tardó siglos en imponerse. Hoy nos resulta evidente, pero para la mentalidad imperante en los tiempos del César, los dioses eran quienes decidían el resultado de cada tiro. Venus bien podía determinar que, en tiros de cuatro dados, los números resultantes fueran siempre distintos durante toda una semana, así como a Poseidón podía ocurrírsele que saliera un seis seguido de cuatro cuatros, o que eliminara, de puro capricho, la posibilidad de que saliera el uno en un dado simétrico.

Un caso excepcional es el de Marco Tulio Cicerón, quien vivió en Roma entre 106 y 43 a. C., y que escribió el tratado *De la adivinación.* En el libro,[29] satiriza las percepciones erróneas de su época que, llamativamente, aún perduran. Dice, por ejemplo:

27 F. N. David, *Games, gods and gambling*, Nueva York, Hafner, 1962. El capítulo 2 es sobre la adivinación. Recomiendo mucho este libro.

28 Marco Tulio Cicerón, *De la Adivinación*, primera página. La traducción al inglés está online en <www.penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Cicero/de_Divinatione/home.html>.

29 La traducción al castellano está disponible en <www.bibliojuridica.org/libros/libro.htm?l=786>.

"Todas las noches dormimos y casi nunca pasamos sin soñar.[30] ¿Y nos admira que algo de lo que soñamos se realice?". En otras palabras, Cicerón entendía que, debido al gran número de sueños, la probabilidad de que alguno se concretara era alta. Asimismo, sostenía: "¿Hay algo más incierto que el tiro de los dados? Y sin embargo, a la larga, habrá alguien que, al lanzarlos frecuentemente, saque el tiro de Venus[31] quizás dos o tres veces seguidas. ¿Seremos tan ineptos de atribuírselo a Venus y no a la casualidad?". Y como si esto fuera poco, se despacha contra otra de las prácticas adivinatorias populares en su momento y que, curiosamente, en la era de Google y los celulares con cámaras de video, sigue vigente: la astrología.

En alusión a la batalla de Cannas, donde Aníbal vence a los romanos, Cicerón dice, con justificada ironía: "¿Todos los que murieron en Cannas habían nacido bajo el mismo horóscopo? Sin embargo, todos tuvieron el mismo fin". En su opinión, el ejercicio de las suertes y los vaticinios "se debe a la invención de embusteros interesados en sus propias finanzas o en promover la superstición y el error".

En resumen, Cicerón tenía una idea bastante clara del evento azaroso. Sin embargo, debido al avance del cristianismo, este concepto fue rechazado. Para san Agustín, por ejemplo, nada ocurría por azar, ya que todo estaba controlado por Dios, de modo que lo azaroso era sólo una apariencia que reflejaba la ignorancia humana y no la naturaleza misma de los hechos. Por lo tanto, el hombre debía someterse a la voluntad divina, en lugar

30 Si son curiosos, van a notar que esta frase está mal traducida en la versión castellana de Francisco Navarro y Calvo, que dice "Todas las noches soñamos y casi nunca pasamos una sin dormir", cuando debería ser al revés. (Libro II, parágrafo 59.)

31 En la Antigüedad, el tiro de Venus (o Afrodita) correspondía a cuatro números distintos (1, 3, 4, 6) en el tiro de los dados y tenía un valor alto.

tratar de investigar el comportamiento regular que podía emerger de determinado número de sucesos.

La realidad demostró que la pasión por el juego es incontenible. Con los años, los jugadores fueron adquiriendo una familiaridad empírica con los datos y advirtieron regularidades en las frecuencias de aparición de ciertos resultados. Así fue cobrando forma la noción de probabilidad, de la mano de la timba.

Más adelante, en el siglo XX, el azar volvió a imponer su presencia intimidatoria frente a otros dogmas. La llegada del comunismo ortodoxo a la Unión Soviética en la década de 1930 significó un cambio en la investigación estadística. Para los teóricos del partido, la estadística era una ciencia social, o una "ciencia de clase", [32] y toda ciencia social debía subordinarse a una planificación central. La expresión "variable aleatoria" se traducía en ruso como "magnitud accidental", y para los planificadores centrales eso implicaba todo un insulto. Durante esos años, prácticamente se abandonaron los métodos estadísticos, y si bien la investigación cobró nueva vitalidad durante los años cincuenta, la aplicación de métodos modernos de estadística tendría que esperar hasta la caída del Muro de Berlín en 1989.

Los tres dados de Galileo

El número 3 revestía un misticismo especial en la era cristiana. Muchas cosas vienen de a tres, por ejemplo, Padre, Hijo y Espíritu Santo; o principio, medio y fin; o Cielo, Infierno y Purgatorio. Esto suele ser así también más allá de lo religioso: el 3 es el número mínimo para crear un motivo, y aparece como conflicto, crisis y resolución en los libretos teatrales; presentación,

32 Frase tomada de S. S. Zarkovik, "Note on the history of sampling methods in Russia", *Journal of the Royal Statistical Society*, series A (General), 119, 1956, pp. 336-338.

exposición y recapitulación en las sonatas; y la "regla de tres" es recomendada para frases efectivas ("Veni, vidi, vici", "Salud, dinero y amor"). Quizá sea por eso que uno de los juegos de azar de mayor relevancia histórica consiste en tirar tres dados y apostar al resultado de la suma de la tirada. Detengámonos entonces en este juego.

Los resultados posibles de esa suma son 16 y van desde 3 (1-1-1) hasta 18 (6-6-6). Como ya dijimos, el número total de tiros es 216, y si los organizamos de acuerdo con la suma tenemos algo como la tabla que sigue (fíjense la similitud con la curva de Gauss):

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 1, 3)	(1, 1, 4)	(1, 1, 5)	(1, 1, 6)	(1, 2, 6)	(1, 5, 4)	(1, 5, 5)	(1, 5, 6)	(2, 5, 6)	(2, 6, 6)	(5, 5, 5)	(4, 6, 6)	(5, 6, 6)	(6, 6, 6)
	(1, 2, 1)	(1, 3, 1)	(1, 4, 1)	(1, 5, 1)	(1, 6, 1)	(1, 6, 2)	(1, 4, 5)	(5, 1, 5)	(1, 6, 5)	(2, 6, 5)	(6, 2, 6)	(6, 6, 3)	(6, 4, 6)	(6, 5, 6)	
	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)	(4, 1, 1)	(5, 1, 1)	(6, 1, 1)	(6, 1, 2)	(4, 1, 5)	(5, 5, 1)	(5, 1, 6)	(5, 2, 6)	(6, 6, 2)	(6, 3, 6)	(6, 6, 4)	(6, 6, 5)	
		(1, 2, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(2, 2, 4)	(6, 2, 1)	(4, 5, 1)	(2, 3, 6)	(5, 6, 1)	(5, 6, 2)	(4, 4, 6)	(3, 6, 6)	(5, 5, 6)		
		(2, 1, 2)	(1, 3, 2)	(1, 4, 2)	(2, 4, 2)	(2, 1, 6)	(5, 1, 4)	(2, 6, 3)	(6, 5, 1)	(6, 2, 5)	(4, 6, 4)	(4, 5, 6)	(5, 6, 5)		
		(2, 2, 1)	(2, 1, 3)	(2, 1, 4)	(4, 2, 2)	(2, 6, 1)	(5, 4, 1)	(3, 2, 6)	(6, 1, 5)	(6, 5, 2)	(6, 4, 4)	(4, 6, 5)	(6, 5, 5)		
			(2, 3, 1)	(2, 4, 1)	(1, 2, 5)	(2, 2, 5)	(1, 3, 6)	(3, 6, 2)	(2, 4, 6)	(3, 4, 6)	(5, 5, 4)	(5, 4, 6)			
			(3, 2, 1)	(4, 1, 2)	(1, 5, 2)	(2, 5, 2)	(1, 6, 3)	(6, 2, 3)	(2, 6, 4)	(3, 6, 4)	(5, 4, 5)	(5, 6, 4)			
			(3, 1, 2)	(4, 2, 1)	(2, 1, 5)	(5, 2, 2)	(3, 1, 6)	(6, 3, 2)	(4, 2, 6)	(4, 3, 6)	(4, 5, 5)	(6, 4, 5)			
			(2, 2, 2)	(2, 2, 3)	(2, 5, 1)	(1, 3, 5)	(3, 6, 1)	(2, 5, 4)	(4, 6, 2)	(4, 6, 3)	(3, 5, 6)	(6, 5, 4)			
				(2, 3, 2)	(5, 2, 1)	(1, 5, 3)	(6, 1, 3)	(2, 4, 5)	(6, 2, 4)	(6, 3, 4)	(3, 6, 5)				
				(3, 2, 2)	(5, 2, 1)	(3, 1, 5)	(6, 3, 1)	(4, 2, 5)	(6, 4, 2)	(6, 4, 3)	(5, 3, 6)				
				(1, 3, 3)	(1, 3, 4)	(3, 5, 1)	(2, 3, 5)	(4, 5, 2)	(3, 3, 6)	(4, 4, 5)	(5, 6, 3)				
				(3, 1, 3)	(1, 4, 3)	(5, 1, 3)	(2, 5, 3)	(5, 2, 4)	(3, 6, 3)	(4, 5, 4)	(6, 3, 5)				
				(3, 3, 1)	(4, 3, 1)	(5, 3, 1)	(3, 2, 5)	(5, 4, 2)	(6, 3, 3)	(5, 4, 4)	(6, 5, 3)				
					(3, 1, 4)	(1, 4, 4)	(3, 5, 2)	(1, 4, 6)	(4, 4, 4)	(5, 5, 3)					
					(4, 1, 3)	(4, 1, 4)	(5, 2, 3)	(1, 6, 4)	(4, 5, 3)	(5, 3, 5)					
					(3, 4, 1)	(4, 4, 1)	(5, 3, 2)	(4, 1, 6)	(4, 3, 5)	(3, 5, 5)					
					(3, 3, 2)	(3, 3, 3)	(3, 3, 4)	(4, 6, 1)	(3, 4, 5)	(1, 6, 6)					
					(3, 2, 3)	(2, 3, 4)	(3, 4, 3)	(6, 1, 4)	(3, 5, 4)	(6, 1, 6)					
					(2, 3, 3)	(2, 4, 3)	(4, 3, 3)	(6, 4, 1)	(5, 3, 4)	(6, 6, 1)					
						(3, 4, 2)	(2, 4, 4)	(3, 4, 4)	(5, 4, 3)						
						(3, 2, 4)	(4, 2, 4)	(4, 3, 4)	(2, 5, 5)						
						(4, 2, 3)	(4, 4, 2)	(4, 4, 3)	(5, 2, 5)						
						(4, 3, 2)	(2, 2, 6)	(3, 3, 5)	(5, 5, 2)						
							(2, 6, 2)	(3, 5, 3)							
							(6, 2, 2)	(5, 3, 3)							

Claramente no tenemos las mismas chances de ganar si apostamos al 18 que si lo hacemos al 9, para el que hay varios tiros posibles.

Es fascinante comprobar que el problema de los dados ya aparecía en *De Vetula* ("Sobre la mujer vieja"), un poema que fue bestséller en el Medioevo,[33] y relata una relación amorosa tragicómica en la que Ovidio confunde, en la oscuridad, la identidad de su amada. El poema revela el primer vínculo entre la frecuencia con que podría aparecer algo azaroso y la enumeración de las eventuales configuraciones. Su autor (se supone que se trata de un tal Richard de Fournival, que vivió entre 1200 y 1250) repasa los 16 resultados de la suma de los tres dados y conecta cada uno de ellos con el número de posibles caídas. Siglos después, alrededor de 1620, el Gran Duque de Toscana, proclive también a las impetuosidades del juego, se topó con una duda vinculada al tiro de los tres dados y decidió consultar nada menos que a Galileo Galilei.

El duque decía: "Hay seis maneras de formar el 9 (1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3) y seis maneras de formar el 10 (1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4). Sin embargo, a lo largo de muchas tiradas, uno gana si apuesta al 10 frente al 9. ¿Por qué?".

La respuesta de Galileo parece ser el primer problema resuelto de las probabilidades.[34] Pero antes de revisar esa maravillosa respuesta, volvamos al principio.

Si tiramos un dado (que no esté cargado, claro) y apostamos al 5, ¿qué probabilidad tenemos de ganar? La respuesta lógica, incluso sin contar con una formación matemática, sería de 1 en 6, y la razón

33 El poema contiene muchas alusiones a las probabilidades. Véase D. R. Bellhouse (2000), "*De Vetula*: a medieval manuscript containing probability calculations", *International Statistical Review* 68, pp. 123-136.

34 Véase Carmen Batanero, Michel Henry y Bernard Parzysz, "The nature of chance and probability", en G.A. Jones (comp.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Mathematics Education Library, 2005, vol. 40, sec. I, pp. 15-37 No me detengo demasiado en cuestiones de prioridad histórica, pero aclaro que la originalidad de Galileo en este trabajo podría ser cuestionada, ya que el matemático renacentista Girolamo Cardano consideró el mismo problema antes que él.

es "sencilla": el cubo es simétrico, no hay ninguna cara preferencial, por lo tanto, para la intuición contemporánea, todos los números posibles tienen, por simetría, la misma chance de salir: 1 en 6.

La cosa cambia cuando tiramos dos dados simultáneamente, como en el Backgamon. En ese caso, ¿cuál de estas dos situaciones será más probable?

A: dos 5
B: un 5 y un 6

Entre los estudiantes universitarios de primer año hay una tendencia a pensar, erróneamente, que las dos situaciones son igualmente probables. Sin embargo, B tiene el doble de probabilidades que A.

Una manera de comprobarlo es utilizar dados de distinto color, digamos uno rojo y otro azul. Para el par 5-6 hay dos posibilidades: 5 rojo-6 azul y 5 azul-6 rojo. En cambio, para el par 5-5, hay sólo una posibilidad: 5 rojo-5 azul. Si ahora imaginamos que miramos el juego en blanco y negro, como si fuera una película en la que el rojo se ve igual que el azul, la situación no va a cambiar y el par 5-5 seguirá siendo el menos probable. Lo importante aquí es un aspecto sutil: los dados son "distinguibles" uno del otro, como ocurre siempre en la vida cotidiana. Lo menciono porque, en los "dados microscópicos" que habitan la fauna del mundo cuántico, el de las partículas elementales –como los electrones y los protones–, los dados son *indistinguibles* y ahí en realidad las dos posibilidades son equivalentes. Esa es una de las grandes peculiaridades del mundo cuántico, que no tiene semejanza en nuestra cotidianidad: la "indistinguibilidad" de las partículas elementales. Y si bien los dados son distinguibles, no deja de ser llamativo que por lo general tendamos a pensar que es igualmente probable que salga un 5 y un 6 que dos 5.

En el caso de los tres dados y el problema del Gran Duque, la situación es la misma. Si bien hay seis maneras de formar tanto el 9 como el 10, no es lo mismo 2-2-5 que 2-5-2, o que 5-2-2. Al igual que con las seis combinaciones posibles de tres números distintos, como por ejemplo 1-4-5, 4-1-5, 1-5-4, 4-5-1, 5-1-4 y 4-5-1.

En consecuencia (véase la tabla de p. 65), son más los tiros que favorecen al 10 que al 9.

Tres tiros distintos con dos 2 y un 5

Lo interesante del asunto es que, de los 216 tiros posibles de la página 65, puede verificarse fácilmente que 25 favorecen al 9 y 27 al 10, de modo que la diferencia de probabilidades es apenas del orden del 1/108 (o 2/216, claro).

El Gran Duque debe de haber jugado mucho para advertir esta diferencia de menos del 1%.

¿Probabilidad de chaparrones?

En su artículo de respuesta al Gran Duque,[35] Galileo utiliza una expresión que aparecerá luego en los tratados de probabilidad del siglo XVIII:

$$\text{Probabilidad matemática} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

35 Galileo lo explica con claridad en “Sobre le scoperte dei dadi”, cuya traducción al inglés está disponible en <www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/galileo.htm>.

La expresión es la base de lo que algunos llaman "teoría clásica" de las probabilidades, originada en problemas concretos relacionados con los naipes y los dados. Según la fórmula, si queremos calcular la probabilidad de un suceso debemos enumerar los casos posibles y, luego, seleccionar los favorables a ese hecho. Pero, para que esta famosa fórmula sea aplicable, debe haber buenas razones para pensar que los casos posibles son, por alguna simetría, equivalentes o equiprobables.

Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número primo al lanzar un dado? La respuesta es 1/2, porque de las seis posibilidades equivalentes, sólo tres casos (cuando sale 2, 3 o 5) son primos. Esto parece obvio; sin embargo, la teoría clásica es vulnerable a una objeción: al definir la probabilidad usamos el concepto de "igualmente probable". Entonces, en rigor, estamos ante un "círculo vicioso".[36]

Una salida posible sería argumentar que, al lanzar un dado o una moneda, o al echar a rodar la ruleta, los resultados son "equiposibles", ya que no conocemos una razón para que salga uno u otro. Las objeciones a la teoría clásica tuvieron su apogeo en 1920, cuando Richard von Mises y Hans Reichenbach atacaron la circularidad de la definición con los misiles del rigor filosófico. Ellos proponían que, para establecer la probabilidad de que saliera un 6, había que lanzar el dado muchísimas veces, y analizar el *límite* de la frecuencia con que aparecía el 6 a medida que el número de tiros se aproximaba a infinito.

No me detendré aquí en este debate, aunque lo retomaré en el capítulo 5. Sólo quisiera subrayar que la definición de probabilidad matemática implica que el evento considerado sea

36 Rudolf Carnap, *Fundamentación lógica de la física*, Buenos Aires, Sudamericana, 1969. Las cuestiones de circularidad y la opinión de Carnap sobre el asunto están en el capítulo 2 ("Leyes, explicaciones y probabilidad") y el 3 ("Inducción y probabilidad lógica").

repetible y que las circunstancias que rodean al experimento sean equivalentes. En rigor, las circunstancias jamás son equivalentes: el dado[37] nunca sale de la mano con el mismo ángulo, ni a la misma velocidad, ni pega contra las mismas moléculas de aire en su parábola hacia el paño. No obstante, cada una de esas causas es, por un lado, desconocida y, por otro, equivalente a las demás. Así, en la práctica, no podemos deducir la caída del dado, por lo que decimos que el resultado está librado al azar. Entonces, siempre que estemos lejos del mundo cuántico, el tiro de los dados y otros fenómenos aleatorios son la consecuencia de la especificación imprecisa de la información faltante.[38]

Por otra parte, siguiendo a Von Mises, podríamos imaginar un experimento en el que lanzamos un dado una gran cantidad de veces. Una estimación de la probabilidad de que salga el 5 es el cociente entre el número de veces que efectivamente salió y el número total de tiros. A medida que el número de tiros se acerque a infinito (obvio que se trata de un experimento imaginario, ya que el real llevaría un tiempo infinito), si el dado es perfecto ese cociente se acercará a 1/6. Si estuviera cargado, el cociente se acercará a otro resultado, de donde deducimos que no todas las caras son equivalentes.

Ahora bien, en la radio y en la televisión con frecuencia escuchamos que la probabilidad de chaparrones para el día siguiente es del 40%. ¿Cuáles son los casos posibles aquí? Para un purista extremo, hay sólo un mañana, en el que o llueve o no llueve, de modo que no hay manera de repetir el experimento. Sin embargo, podríamos imaginar muchos días

37 Al menos el dado real del mundo macroscópico; con los “dados” microscópicos –los dados cuánticos con los que juega Dios–, la situación es distinta.

38 “Imprecise specification of missing information”, en Vinay Ambegaokar, *Reasoning about Luck; Probabilities and its Uses in Physics*, Cambridge University Press, 1996, p. 8.

en los que las condiciones del tiempo sean equivalentes, con una serie de causas azarosas desconocidas análogas a las del tiro del dado, y que en aproximadamente 4 de cada 10 caen chaparrones. O podríamos imaginar –siempre razonando como un físico– una serie de simulaciones numéricas con una computadora, en condiciones compatibles con las condiciones meteorológicas actuales. Como dice David Ruelle en su excelente libro *Chance and Chaos*, si la probabilidad de lluvia resulta ser del 90%, "hasta los puristas sacarían el paraguas".

Y con estos comentarios nos dirigimos hacia las reglas axiomáticas del cálculo de probabilidades, de Alexander Kolmogorov, que presento en el capítulo siguiente.

Apéndice

Selección de cuentos sobre el azar, en orden aleatorio[96]

Russell Maloney, "Lógica inflexible" (1940)

Una parodia de la repetida historia de los siete monos tecleando al azar los libros del Museo Británico. Alude al libro *The Mysterious Universe*, de James Jeans, de 1930, donde, según se dice, la historia de los monos aparece por primera vez (aunque Jeans asegura haberla escuchado de alguien, probablemente de Huxley). Borges la menciona en su ensayo "La biblioteca total".

Robert M. Coates, "La ley" (1947)

La "ley de los promedios" deja de aplicarse (por ejemplo, todos los habitantes de Manhattan deciden cruzar el puente de Triporough la misma noche); el senador J. Wing Slooper la restablece por decreto. El cuento quizá tiene ecos de "La autopista del Sur", de Julio Cortázar, o al revés.

Rodolfo Walsh, "Cuento para tahúres" (1987)

En una ronda de pase inglés, Flores está teniendo demasiada suerte con los dados. El más preocupado es él mismo.

Aleksandr Pushkin, "La dama de picas" (1833)

Guermann nunca había jugado, pero consigue extraerle a la condesa Anna Fedótovna el secreto de tres cartas ganadoras y decide apostar todos sus bienes.

96 Las fechas son las de mis ediciones y no pretenden precisión académica.

Dean Wesley Smith, "Luck be a Lady" (2009)

La Diosa de la Fortuna está perdida y hay que encontrarla. Pero la razón parece ser que alguien demostró matemáticamente que el azar no existe y que la realidad está cambiando.

Robert A. Heinlein, "El año final" (1952)

Un estadístico (especialista en estadísticas) advierte ciclos extraños y tendencias anómalas en la Tierra y anticipa que 1954 será un mal año. Resulta ser malísimo.

Ray Bradbury, "El ruido del trueno" (1952)

El cuento es precursor del llamado "efecto mariposa". Una agencia de turismo ofrece viajes al pasado. Sólo hay que contemplar el paisaje, sin modificarlo. Pero algo falla.

Stanislaw Lem, "De Impossibilitate Vitae de Impossibilitate Prognoscendi" (1978)

A la manera de Borges en "Examen de la obra de Herbert Quain", una reseña del libro inexistente "De Impossibilitate Vitae de Impossibilitate Prognoscendi", del profesor Cezar Kouska. El cuento está en el libro *Vacío perfecto*, que, también a la manera autorreferencial de Borges, contiene un ensayo homónimo en el que el autor reseña el libro mismo, y no le gusta. Una parodia con una exposición lúcida de las probabilidades. Dice por ahí: "Cada hombre es como un primer premio sacado en una lotería con teragigamegamulticentillones de chances […] en la lotería existencial los números perdedores no se ven".

Jorge Luis Borges, *El libro de arena* (1975)

Un libro de infinitas páginas. "Lo abrí al azar", dice el protagonista, pero un libro así sólo puede abrirse al azar y cada página tiene probabilidad cero de encontrarse. Por eso el vendedor del libro le responde: "Mírela bien. Ya no la verá nunca más".

Jorge Luis Borges, "La Biblioteca de Babel" (1941)

El cuento más famoso de Borges. Una biblioteca "total", que incluye todos los libros posibles (de 410 páginas).

Cada página, dice Borges, tiene 40 renglones de unos 80 caracteres. Cada libro tiene entonces 410 x 40 x 80 = 1 312 000 símbolos. Como hay 25 posibilidades para cada símbolo, usando la ley del producto, el número de libros (distintos) de la biblioteca es 25 elevado a la potencia 1 312 000; inimaginable pero no infinito. Miles de codiciosos buscan en la biblioteca sus “Vindicaciones”, libros con profecías personales, pero Borges dice: “La posibilidad de que un hombre encuentre la suya es computable en cero”. ¿Es así?

Kurd Lasswitz, “La biblioteca universal” (1901)

Cuento menor pero importante por ser el antecesor de “La Biblioteca de Babel” (Borges lo dice). El autor calcula el número de libros posibles con 100 caracteres, 500 páginas por libro, 40 renglones por página y 50 caracteres por renglón. Obtiene 10 elevado a la potencia dos millones.

Jorge Luis Borges, “La muerte y la brújula” (1944)

“Usted replicará que la realidad no tiene la menor obligación de ser interesante”, dice el detective, y luego agrega: “Yo le replicaré que […] en [la hipótesis] que usted ha improvisado, interviene copiosamente el azar”.

Jorge Luis Borges, “La lotería en Babilonia” (1941)

Una sociedad en la que el destino de los hombres está determinado por una lotería que se sortea cada sesenta noches. “La Compañía” (¿Dios?) controla la lotería y bajo su “influjo bienhechor” las “costumbres están saturadas de azar”. Para los heresiarcas “la Compañía no ha existido nunca y no existirá”.

Jorge Luis Borges, “El jardín de senderos que se bifurcan” (1941)

El cuento en el que Borges resuelve, sin saberlo, el así llamado “problema de la medición” de la teoría cuántica y anticipa la “interpretación de los muchos mundos” de dicha teoría. Según la física cuántica, el azar es una propiedad intrínseca del mundo y, según la interpretación de los muchos mundos, en cada alternativa azarosa del mundo microscópico el universo se ramifica, o se bifurca, en tantas copias como alternativas se presentan.

Arthur C. Clarke, "El otro tigre" (1953)

Un cuento borgeano con un título borgeano. Un diálogo en el que uno de los personajes propone: "Si el universo es infinito […], hay un número infinito de estrellas y de planetas […]. Por lo tanto, por las leyes del azar, todos los eventos posibles deben ocurrir no meramente una vez sino un número infinito de veces".

Primo Levi, "Registro" (1981)

Un oficinista recibe diariamente la fecha de muerte de ciertos ciudadanos. Su trabajo es asignar la causa de muerte. Pero en un caso duda.

Shirley Jackson, "La lotería" (1948)

El cuento, uno de los más famosos de la literatura norteamericana, tiene un eco lúgubre de "La lotería en Babilonia": un sorteo anual en un pueblo de 300 personas decide cuál de ellas será apedreada.

Samuel Beckett, "Sin" (1965)

Un experimento de literatura aleatoria. Beckett usa 166 palabras y genera su "relato" permutándolas al azar.

Edgar Allan Poe, "Los crímenes la calle Morgue" (1841)

Para algunos, el primer cuento policial. Al investigar el crimen, el detective es cauteloso en diferenciar una coincidencia de un vínculo causal. Dice: "Coincidencias diez veces más notables que esta (la entrega del dinero y el asesinato de sus poseedores tres días más tarde) ocurren a cada hora de nuestras vidas sin que nos preocupemos por ellas… En general, las coincidencias son grandes obstáculos en el camino de esos pensadores que todo lo ignoran de la teoría de las probabilidades, esa teoría a la cual los objetivos más eminentes de la investigación humana deben los más altos ejemplos".

Douglas Hofstadter, "The Tale of Happiton" (1983)

Alguien tira cinco dados cada vez que el reloj de los tribunales da la hora, y amenaza envenenar el pueblo con un gas letal si salen cinco 7 seguidos.[97] Pero promete bajar la frecuencia del tiro de los dados –y bajar así la probabilidad de morir envenenados– si los habitantes le mandan muchas tarjetas postales. Una alegoría y un llamado a la cooperación para minimizar el riesgo de desastre nuclear.

Marcos Donnelly, "Tracking the Random Variable" (1991)

Ronald Barr es un estadístico obsesionado por encontrar correlaciones ocultas en fenómenos azarosos. Pierde su trabajo y se emplea en un taller. Cree encontrar una correlación entre las bujías vendidas y las noches que su mujer vuelve tarde a casa.

Guillermo Martínez, "El I Ching y el hombre de los papeles" (2003)

Un profesor de estadísticas debe llevar el I Ching al hospital para que su mujer averigüe, mediante tiros de tres monedas, el destino de su hijita internada.

A la manera de las sincronías mencionadas en el primer capítulo, las tramas de los siguientes pares de cuentos tienen varios puntos en común. En todos los casos, los autores atribuyen el parecido a la coincidencia:

Gabriel García Márquez, "Un día de estos" (1977)
Hernando Téllez, "Espuma y nada más" (1950)

97 Nota sobre el dado: Hofstadter habla de un dado de veinte caras, pero numeradas de 0 a 9 (y no de 0 a 19), con cada dígito duplicado en caras opuestas. ¿Es posible un dado así, en el que cada dígito del 0 al 9 tiene la misma chance de salir? Sí, aunque Hofstadter no lo explicita: el icosaedro, un poliedro regular de veinte caras, cada una de ellas un triángulo equilátero.

Un capitán (en el otro caso, es un alcalde) va a afeitarse (en el otro caso, a sacarse una muela) y en ambos el que lo atiende es del bando opositor.

Adolfo Bioy Casares, "Un viaje o El mago inmortal" (1962)
Julio Cortázar, "La puerta condenada" (1956)

En ambos cuentos el personaje viaja de Buenos Aires a Montevideo por negocios. Ambos van al Hotel Cervantes (en el cuento de Bioy el taxista se equivoca y lo lleva a otro hotel). Del cuarto contiguo, en ambos casos, provienen ruidos de personas inexistentes.

J. G. Ballard, "El gigante ahogado" (1966)
Gabriel García Márquez, "El ahogado más hermoso del mundo" (1972)
Un ahogado de tamaño descomunal aparece inexplicablemente en la costa de un pueblo.

Advertencia para pesquisadores de plagios: así como hay coincidencias, en cada par de cuentos hay muchas discrepancias.

Índice

Este libro (y esta colección) 7

Acerca del autor 10

Introducción al azar 13

Lo coincidente y lo causal 17
Tira de coincidencias, 18. Bombas sobre Londres, 23. Creacionismo cotidiano, 25. El juego del caos, 29. La paradoja de los cumpleaños, 31. El jardín de las coincidencias de la física, 32. ¿Causalidad o coincidencia?, 37.

Lo normal y lo extraordinario 41
Soldados escoceses y astronomía, 42. Moneda al aire, 46. La altura de los hijos de Yao Ming y de Diego Buonanotte, 48. Las *baguettes* de Poincaré y una pequeña comedia de errores (normales), 54.

Lo frecuente y lo probable 59
Antiguos adivinadores, 61. Los tres dados de Galileo, 64. ¿Probabilidad de chaparrones?, 68.

Lo riguroso y lo intuitivo 73
Las reglas del juego de las probabilidades, 73. Sobre productos hay mucho escrito, 79. El aliento del César, 83. ¿Dilución o ilusión?, 85. A mí no me va a pasar, 88.

Lo directo y lo inverso 93
Falacias condicionales, 94. Paradojas porcentuales, 97. Casamiento en los Bayes, 99. Mamografías, 104. ¿Mellizos o gemelos?, 105. Dos recipientes, 107. El filtro de “spam” y los manuscritos federalistas, 110. Aprendí filosofía, 113. Horóscopos, 118. Números anómalos, 122. Derivación bayesiana de la Ley de Benford, 128.

Lo conjetural y lo estimable 133
Creer o encuestar, 133. ¿Cuántos garbanzos hay?, 137. El proyecto Coriolis, 139. Tanques alemanes y el "Argumentum Ornithologicum", 140. ¿Por qué tengo menos amigos que mis amigos y por qué siempre me toca la fila más lenta?, 145. El argumento del fin del mundo, 149. Cuánto duran los platos antes de romperse y el misterioso 37%, 155. Lluvia sobre el patio, 157. Proyecto Poisson o ¿cuántos de mis amigos de Facebook cumplen años hoy?, 160. La fórmula de *monsieur* Poisson para intrépidos, 165.

Apéndice. Selección de cuentos sobre el azar, en orden aleatorio 171

Bibliografía comentada 177