Nombre del proyecto:

¡A derivar sin límites, y a toda velocidad!

Autora: Profesora Laura del Río

Área o áreas disciplinares del proyecto: Matemática, con aplicaciones en física, química, ciencias sociales, ciencias biológicas, economía.

Objetivo general:

Proponer una secuencia didáctica para la enseñanza de la noción de *derivada* sin el requerimiento previo de la noción de *límite*, en la Escuela Secundaria, en la cual los estudiantes, interactuando con las nuevas tecnologías informáticas, puedan ser protagonistas de la construcción de su propio conocimiento.

Objetivos específicos:

- Lograr que los alumnos identifiquen el concepto de *velocidad media* de un móvil, en el marco físico, con el concepto de *pendiente de una recta*, en el marco gráfico, y con el concepto de *tasa o razón de cambio*, en el marco numérico.
- Introducir la noción de *razón de cambio promedio* para distintas magnitudes, en relación con otras disciplinas.
- Cuestionar el alcance de la noción de razón de cambio promedio en situaciones en las cuales la misma sea variable.
- Introducir la noción de *razón de cambio instantánea*, en relación con el concepto de *recta tangente*, en el marco gráfico.
- Introducir la noción de *función derivada*, como generalización del proceso de cálculo de la pendiente de la recta tangente para un punto cualquiera de la gráfica de una función.
- Relacionar el crecimiento de una función en un intervalo, con el signo de la función derivada en el mismo.
- Estudiar las aplicaciones de la noción de derivada a problemas de aproximación lineal y a problemas de optimización en una variable.

Justificación y fundamentación de la importancia y utilidad del desarrollo presentado.

Marco teórico

La presente propuesta se enmarca en el Diseño curricular para 6° año de la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos Aires[1], en la cual se estipula la enseñanza de la noción de *derivada de una función*. En el mismo, se "considera a la disciplina [matemática] como parte de la cultura, y valora a los alumnos como hacedores de la misma. Por este motivo, se propone un cambio sustancial en el quehacer matemático del aula mediante el cual el docente, a partir de la asimetría, sea un motor importante en la construcción de conocimientos que cobren sentido dentro de la formación integral del alumno." (pág. 9)

Es por ello que la secuencia que aquí se propone, está integrada por problemas que intentan desafiar al alumno, para que se comprometa en la tarea de resolución y logre construir los conocimientos matemáticos como resultado de esa actividad.

El concepto de *derivada* es muy importante tanto en matemática como en muchas otras disciplinas: física, ingeniería, economía, química, medicina, sociología, ya que es una potente herramienta para estudiar el cambio de las magnitudes, encontrar valores óptimos (máximos y mínimos), realizar aproximaciones (cuando la complejidad de los cálculos lo requiere). Además, abre las puertas a otra área de la matemática, el cálculo integral, que también posee infinidad de aplicaciones.

La enseñanza de la *derivada* se desarrolla, tradicionalmente, luego de la enseñanza de la noción de *límite*. Esto es así porque la definición formal actual de derivada se da en términos del límite del cociente incremental de la función. Sin embargo, en la historia de la física y la matemática, la construcción de ambos objetos (límite y derivada) fue exactamente al revés:

"Los primeros matemáticos que abordaron estos problemas fueron Fermat (1601 - 1665) y Descartes (1596 – 1650), quienes crearon procesos para la construcción de las tangentes a una curva en un punto dado.

"Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) quienes desarrollaron procedimientos para abordar los problemas enunciados [acerca de la velocidad instantánea de un objeto en movimiento]. Bolzano (1817) fue quien definió por primera vez la derivada como un límite y poco tiempo después Cauchy describió la derivada en su libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección, a partir de los aportes de Bolzano."[2].

---

[1] Diseño Curricular para la Educación Secundaria 6o año: Matemática-Ciclo Superior / coordinado por Claudia Bracchi y Marina Paulozzo - 1a ed. - La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2011. Disponible en: http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/sexto/materias%20comunes/matematica_6.pdf

[2] Lozano Robayo, Y. "Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite". Bogotá, 2011

La enseñanza de límites antes de derivada, impone numerosos obstáculos epistemológicos y didácticos[3], y se limita, por lo general, al estudio mecánico de reglas de cálculo. En cambio, si se enseña la noción de derivada asociada a la de velocidad (noción que los estudiantes manejan), el límite aparece luego de un modo más natural, como una herramienta para resolver este tipo de situaciones (que luego puede extenderse para otras situaciones)[4].

Importancia de la integración de esta propuesta con la tecnología digital

"Las calculadoras y los ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud, pueden apoyar la investigación de los estudiantes en cada área temática, incluyendo geometría, estadística, álgebra, medida y números. Cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas."[5]

La integración de los programas **Modellus** y **GeoGebra** obedece a múltiples razones. Por un lado, la integración de simulaciones de movimiento realizadas en **Modellus**, permite una interacción dinámica entre distintos marcos[6]: el marco físico (al tener una representación de la trayectoria del móvil), el marco gráfico (al proveer gráficos de posición en función del tiempo del móvil simulado), el marco numérico (a través de la tabla de valores). Esto promueve una mejor comprensión del fenómeno que se está estudiando.

Por otro lado, los *applets* de **GeoGebra**, permiten a los estudiantes concentrarse en las cuestiones conceptuales que hacen a la noción de derivada, en lugar de perderse en una infinidad de cálculos aritméticos y algebraicos. Les permite

---

[3] Lozano Robayo, Y. *Op. Cit.*

[4] Un antecedente importante de esta inversión del orden en que se desarrollan los temas, respecto de la enseñanza tradicional, lo podemos encontrar en la asignatura Matemática A, que se dicta para primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Algunos de los problemas que se proponen en esta secuencia, son adaptaciones de los propuestos en el material teórico-práctico que se utiliza en esa asignatura.

[5] Saiz, I y Acuña N. Matemática. Aportes para la enseñanza a Nivel medio: Influencia de las TIC: Nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática. Disponible en: http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/recorrido-historico/

[6] Aquí se toma la noción de *marco* en el sentido que lo define Douady ("Relación enseñanza-aprendizaje. Dialéctica instrumento-objeto, juego de marcos", París, 1984): "El juego de marcos traduce la intención de explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos puede intervenir en distintos dominios, **diversos marcos** *físico, geométrico*, *numérico, gráfico* u otros. Para cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el marco. (…) Para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos, elegimos problemas donde aquellos intervienen en dos marcos como mínimo. Privilegiamos los marcos en los que la imperfección de correspondencias creará desequilibrios que se trata de compensar."

también moverse entre los distintos marcos (gráfico, geométrico, numérico, algebraico) en forma dinámica, afianzando la comprensión de los conceptos involucrados.

Contenido: Derivada de una función en un punto. Velocidad instantánea.

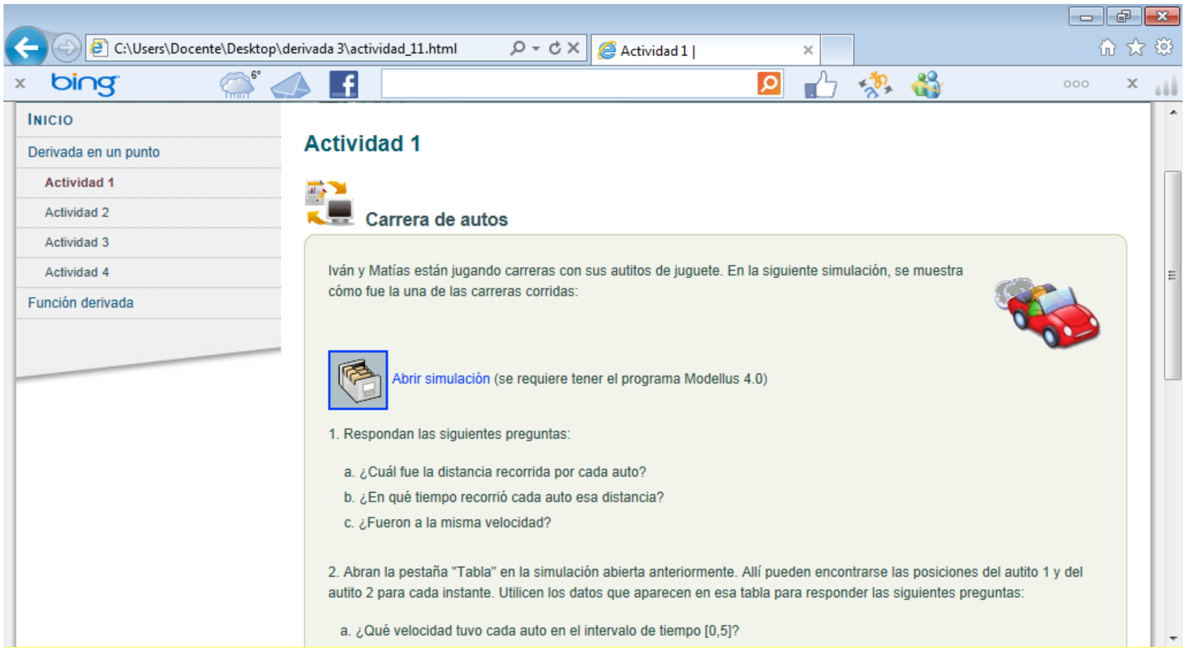
Plan y estrategias de trabajo.

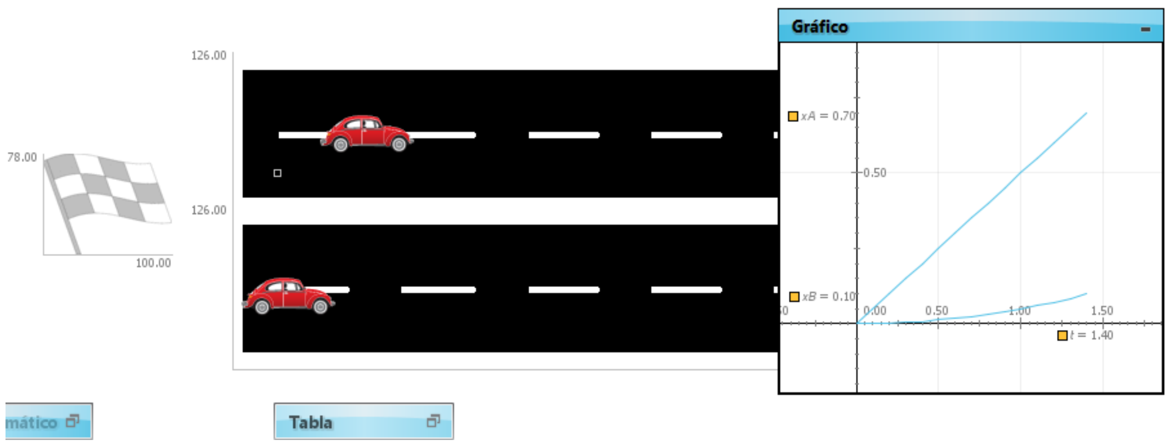
Descripción de la secuencia

Es importante que los alumnos tengan disponibles los conocimientos relacionados con las funciones lineales, sobre todo la idea de *pendiente*.

La secuencia, que se anexa al presente proyecto en formato de sitio web, comienza con una actividad cuyo objetivo es cuestionar el alcance de la noción de velocidad media para resolver problemas de movimiento no uniforme. Para ello, se les da una animación, realizada en **Modellus,** de dos autos que recorren una misma distancia, en un mismo intervalo de tiempo, pero cuyas velocidades no son iguales en todo momento[7]. Se muestran a continuación, las consignas a responder por los alumnos, utilizando tanto lo observado en la simulación, como los distintos registros de representación que presenta el programa a partir de la misma: gráfico y tabla de valores[8].

[7] Este problema es una adaptación del presentado en el libro Matemática 1, Itzcovich, H. *et al*, Editoral Tinta Fresca, Buenos Aires, 2006, pag.178. para su resolución utilizando las herramientas que ofrece **Modellus**.
[8] Aquí se presentan algunas capturas de pantalla para mostrar algunas de las consignas de las actividades y los *applets* y simulaciones realizadas en **Modellus** y **GeoGebra**. Para ver la totalidad del material, se recomienda ver el archivo entregado como Anexo a esta propuesta.

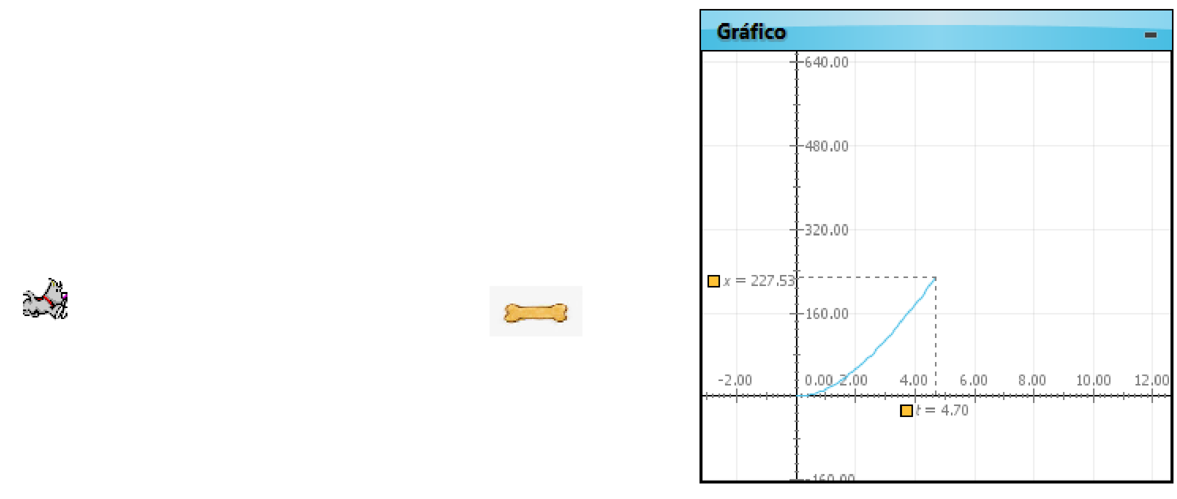




Al finalizar esta actividad, el docente debería institucionalizar la definición de *variación o velocidad promedio* y explicitar que, para el caso de funciones lineales, la misma no varía en los distintos intervalos, pero que para otras funciones, puede ser variable.

La segunda actividad intenta una primera aproximación a la idea de velocidad instantánea, a partir de analizar qué valores toma la velocidad media cuando se consideran intervalos de tiempo cada vez más pequeños en torno de algún punto de interés[9]. Para ello, recurrimos a otra simulación en **Modellus**:

[9] Este problema fue tomado y adaptado del material de la cátedra Matemática A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, Búcari, N. 2012, disponible en http://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0301/index.php?secc=descargas



Como cierre de esta segunda actividad, debería quedar institucionalizada una forma de encontrar un valor aproximado para la velocidad en un instante, como valor al que se acercan las velocidades medias a medida que se achica el intervalo de tiempo alrededor del mismo.

Luego, se propone una actividad que pone de manifiesto que estas ideas no solamente son útiles para el estudio de cuerpos en movimiento, sino para el estudio de cualquier magnitud que cambie y que sea interesante conocer qué tan rápido cambia. A modo de ejemplo, se propuso estudiar la razón de cambio de población mundial en distintos intervalos de tiempo[10], pero esta actividad puede reemplazarse por otras[11] en

---

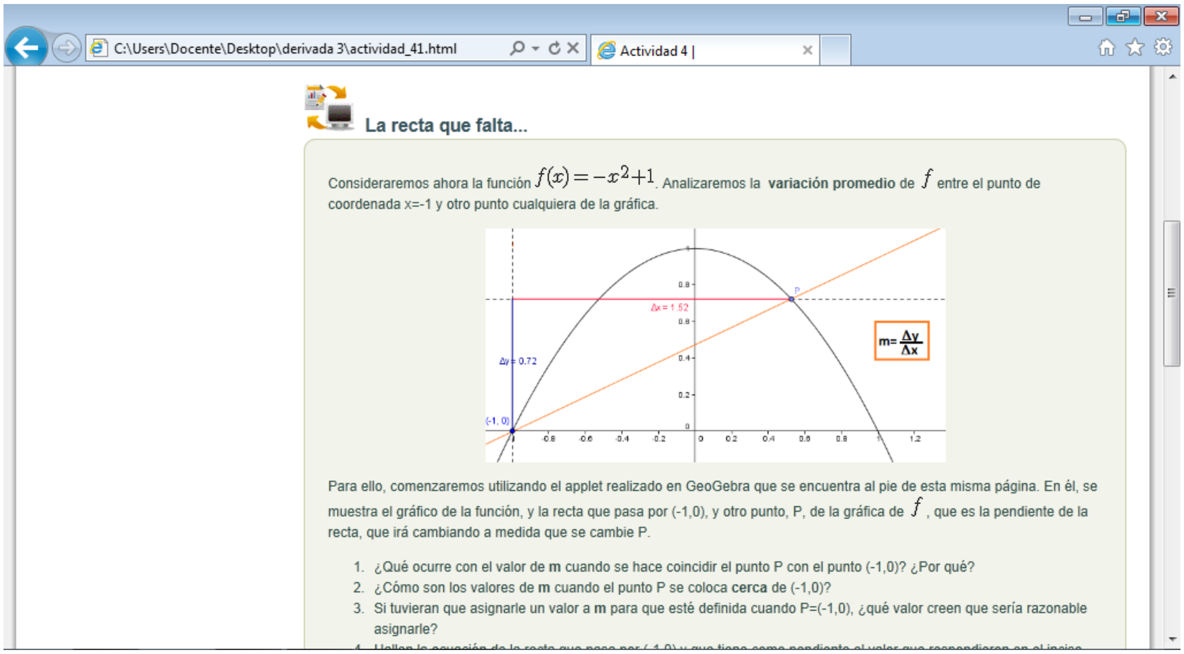
[10] Idea tomada del texto "Resolución de problemas – Entre la Escuela Media y los estudios superiores" del programa "Apoyo al último año del nivel medio/polimodal para la articulación con el nivel superior", Agrasar, M.; Chemello, G. 2005, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.

función de la orientación del curso, o de los intereses de los alumnos, o incluso entregarse distintos problemas a distintos grupos de alumnos para que luego cada grupo cuente los resultados de su investigación a los demás.

A continuación, nos trasladaremos al marco gráfico y geométrico para enriquecer estas ideas. Se propone el estudio las pendientes de distintas rectas secantes[12], entre un punto fijo de la gráfica de una función y otro punto variable de la misma. Para ello, el uso del software de geometría dinámica **GeoGebra** tiene una enorme importancia, ya que hacer la misma actividad manualmente, implicaría o bien un largo y tedioso trabajo mecánico de cálculo de pendientes o bien, un importante dominio del álgebra de funciones racionales que impediría a los alumnos concentrarse en lo conceptual.

[11] Pueden proponerse actividades similares que aborden diferentes problemáticas sociales, como la desocupación, la pobreza, etc. O problemas propios de las ciencias naturales, como el propuesto en el Diseño Curricular par 6to año de la Provincia de Buenos Aires, referente al estudio del cambio de la temperatura de una sustancia que se enfría.

[12] Este problema fue tomado y adaptado del material de la cátedra Matemática A de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (*Op. Cit.*), para su resolución con **GeoGebra**.



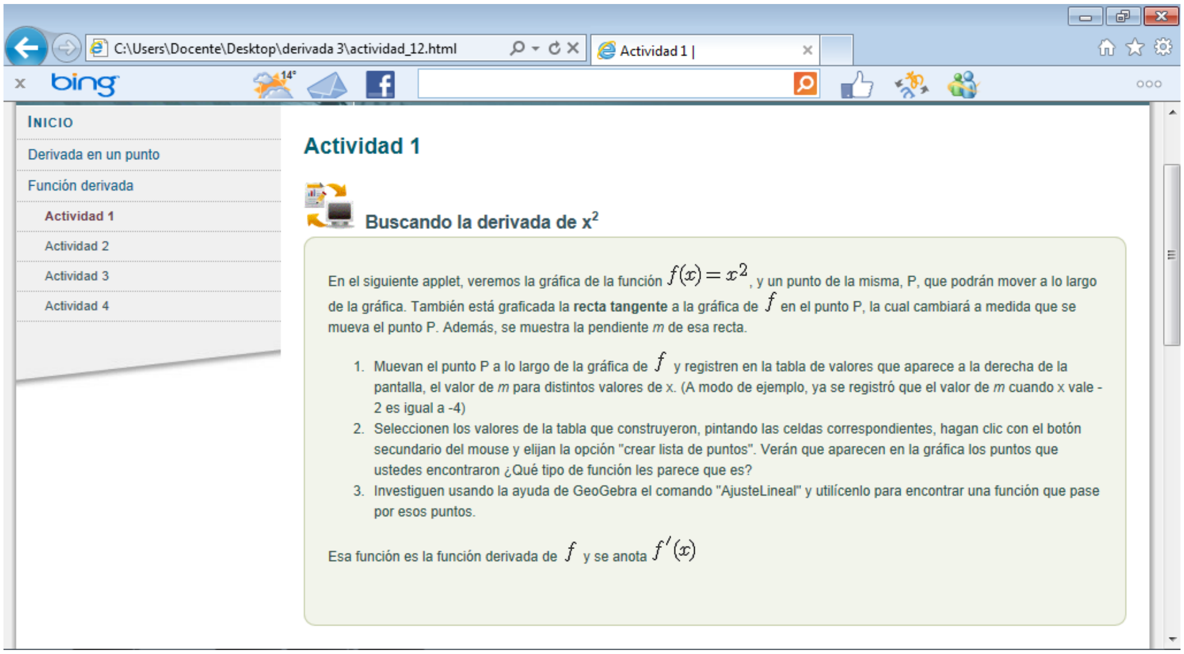
Como conclusión de esta actividad, debería quedar explícito: que la variación promedio de una función puede calcularse únicamente entre dos puntos distintos; que esa variación representa la pendiente de la recta secante que pasa por esos puntos de la gráfica; que hay un valor al cual se aproximan estas pendientes al aproximar entre sí los dos puntos[13]; que la recta que pasa por el punto analizado y que tiene por pendiente ese valor, se denomina *recta tangente* y que tiene la particularidad de aproximar bien a la función en puntos cercanos al punto en cuestión (dicho en otros términos, si se hace un zoom cerca de ese punto, la recta y la gráfica de la función llegan a confundirse).

Las actividades presentadas subsiguientemente, intentan aproximar a los alumnos a la idea de *función derivada*, y a la introducción de algunas *reglas de derivación* (en particular, a la derivación de funciones monómicas y luego, polinómicas).

Se presenta la *función derivada* como una fórmula que nos permite averiguar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en cada punto. Para obtener dicha fórmula para el caso de la función x^2, se propone una actividad en la cual los alumnos investigan la relación entre la abscisa de un punto de la gráfica y la pendiente de la recta tangente en el mismo hallada con **GeoGebra** y proponen, como hipótesis, una fórmula para esa función.

---

[13] Esta afirmación solamente es cierta para funciones derivables, pero es preferible dejar la discusión acerca de las limitaciones de esta definición para una instancia posterior.



También se propone una actividad similar para postular una fórmula para la derivada de x^3.

Además se plantean actividades tendientes a establecer una relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función, y otras para que los alumnos puedan conjeturar, y luego poner a prueba esas conjeturas, cuáles son las derivadas de las funciones de la forma ax^n.

En el material adjunto no se continuó con el desarrollo de la secuencia, ya que el objetivo de ese material es ilustrar qué *applets* y simulaciones se pueden ofrecer a los alumnos para el estudio de este tema, y no presentar un material acabado y definitivo para su puesta en aula.

La secuencia debería continuar con más actividades que permitan a los alumnos incorporar reglas de derivación y poner en juego la relación observada entre el crecimiento de una función y signo de su función derivada.

Por último, se presentarían problemas de aplicación, por ejemplo, para realizar aproximaciones lineales de una función, y la obtención de valores óptimos (máximos y mínimos).

Gestión de la clase para la implementación de la secuencia

Una secuencia didáctica en sí misma, por buena que sea, no garantiza el aprendizaje de los estudiantes que la transitan. Es importante también tener en cuenta en la planificación de las clases: el tipo de intervenciones que realizará el docente, cómo tratará los errores de los alumnos, qué institucionalizará, cómo y en qué momento lo hará.

El docente debe generar un clima en el cual los alumnos puedan confiar en su propia capacidad y en el cual las producciones grupales sean respetadas. Para ello, es importante que habilite la palabra de todos y rescate lo valioso de todas las producciones, aunque sean erróneas.

Muchas veces es conveniente iniciar la actividad con una instancia de trabajo individual, para que cada uno entre en contacto con el problema y prepare su aporte personal para el trabajo en grupo.

Con los aportes de todos los miembros, cada grupo elaborará una producción consensuada para comunicar al resto de la clase, y elegirá el modo que considere más adecuado de presentación. Todos los miembros del grupo deben estar preparados para ser el portavoz, ya que será el docente el que elegirá quién tendrá ese rol en cada caso, procurando dar la palabra a todos, en distintas oportunidades, para no generar asimetrías en el curso.

Finalizada la puesta en común de las distintas producciones, el docente tomará los aportes de los alumnos, los ordenará y enriquecerá y les dará estatus matemático, haciéndolos explícitos. Es decir, institucionalizará los conocimientos construidos por el grupo y enunciará las definiciones y propiedades que considere necesarias, y que los alumnos estén en condiciones de interpretar en función del trabajo realizado.

Productos esperados:

Al término de este recorrido propuesto, se propone que cada grupo de alumnos en el aula elija, con ayuda del docente, una temática de su interés a investigar. En dicha investigación, se deben poder relacionar variables cuantitativas por medio de funciones, y la derivada debe aparecer como una herramienta útil para responder interrogantes sobre la misma. Se dan algunos ejemplos:

- Si un grupo de alumnos muestra interés, a lo largo del trabajo con esta secuencia, en el estudio de indicadores sociales, el docente puede proponer un trabajo con tablas de valores de indicadores de desocupación, de pobreza, etc., plantear la pregunta de cómo puede estimarse el valor de los mismos en un futuro no muy lejano, y orientarlos a obtener una aproximación lineal de la función, tomando como pendiente una variación promedio adecuada.
- Si otro grupo de alumnos se muestra más afín al estudio de la economía, se podría plantear un problema de optimización en ese campo, en el cual se conoce la ganancia como función de alguna variable, y se pregunta acerca del valor que debe tomar esa variable para que la ganancia sea máxima.

- Para alumnos más orientados al área de las ciencias naturales, se puede proponer el estudio de una función que modelice la concentración de un fármaco en la sangre (el docente puede proveer la función), para intentar determinar en qué momentos esa concentración es máxima, o cada cuánto deben administrarse las dosis para que no se supere una determinada concentración que podría resultar nociva para la salud

Los alumnos darán forma al problema, siempre con la orientación del docente, y arribarán a alguna respuesta.

A continuación, se propondrá que cada grupo comparta el problema que resolvió con los demás grupos, y para la exposición deberán hacer una presentación en **Power Point** o **Prezi**, o un video, en el cual cuenten: cuál fue el problema elegido, cuáles son los datos con los que contaban para la resolución, qué procedimientos pusieron en juego para resolverlo y cuáles fueron los resultados obtenidos. Sería sumamente enriquecedor que de esta puesta en común participen alumnos de distintos cursos dentro de la misma escuela, o, mejor aún, que se pueda compartir con alumnos de otras escuelas en un encuentro interinstitucional.

Estrategias de evaluación:

La evaluación de un proyecto educativo va más allá de la evaluación de los saberes alcanzados por los alumnos que lo transitan. Algunas preguntas que podrían guiar la evaluación del éxito del proyecto podían ser las siguientes:

¿Los alumnos están más motivados, más entusiasmados con este tipo de trabajo? ¿Se comprometen más con la actividad y con su grupo de compañeros? Esto podrá ser observado por el docente tanto durante la resolución de las actividades de la secuencia, como durante la elaboración del trabajo de investigación final.

Por otro lado, resulta interesante rescatar una distinción que realizan varios autores en relación con los aprendizajes alcanzados en interacción con la tecnología: "Distinguimos en primer lugar entre dos tipos de efectos cognitivos los efectos que se obtienen EN CONJUNCION CON la tecnología en el campo de la colaterización intelectual con ella, y los efectos PROCEDENTES DE la tecnología, en términos del residuo cognitivo transferible dejado por la colaterización, tras la forma de un mayor dominio de habilidades y estrategias".[14]

Será necesario evaluar, entonces, qué conocimientos y habilidades resultan capaces de demostrar los alumnos usando la tecnología (que es de gran valor en la

[14] Salomón, G.; Perkins, D.; Globerson. T. "**Coparticipando en el conocimiento: la ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes**" Revista CL&E Comunicación, lenguaje y educación Nº 13:6-22. (1992)

sociedad actual) y hasta qué punto pueden usar o poner en juego esos conocimientos y habilidades que aprendieron con la tecnología cuando no cuentan con ella (es decir, analizar qué les queda como aprendizaje luego de apagar la computadora). Ambos tipos de aprendizaje son valiosos y no debe menospreciarse el primero cuando no se puede dar cuenta del segundo, aunque lo ideal sería que se den ambos.

Sugerencias de aprovechamiento didáctico (cómo el proyecto puede servir en otros contextos aúlicos, geográficos, en otras disciplinas u otros niveles de enseñanza)

Si bien esta propuesta se pensó inicialmente para su implementación en el 6° año de la Escuela Secundaria de la Provincia de Buenos Aires, puede ser aplicada en cualquier otra jurisdicción en la que este tema se prevea.

También es adecuado para los primeros años de numerosas carreras de nivel superior, tanto Universitario como Terciario (tecnicaturas, ingenierías, ciencias exactas, económicas y naturales, profesorados), en las cuales este tema aparece como central.

El soporte elegido para la compilación de las actividades, un hipertexto en HTML, es altamente re-utilizable, ya que cualquier software navegador de internet puede leerlo. Además, los programas con los que fueron generados los *applets* y simulaciones, **GeoGebra** y **Modellus** respectivamente, son de uso libre y gratuito.

Por otra parte, al haberse generado el archivo HTML con el programa **ExeLearning**, puede exportarse como un paquete SCORM e integrarlo a múltiples entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje para su utilización en educación a distancia. Además, al ser **ExeLearning** una herramienta de autor, el docente que desee utilizarlo en sus clases, puede editarlo y adaptarlo a sus necesidades y preferencias sin necesitar ser un experto en informática.

Anexo

Como ya se mencionó a lo largo de la presente propuesta, se entrega como material adjunto a la misma un hipertexto que compila las actividades iniciales de esta secuencia didáctica a modo ilustrativo. En el mismo, se han incorporado las simulaciones realizadas en **Modellus** y los *applets* **GeoGebra** como parte de un mismo objeto de aprendizaje. La inclusión de este material es muy importante, ya que resulta muy complicado dejar en claro mediante un texto escrito cómo funcionarían estos objetos dinámicos, sin mostrarlos.

Para poder acceder a ese material, es preciso descomprimir la carpeta, y abrir con un navegador (preferentemente Internet Explorer) el archivo “Index”. Es importante no quitar este archivo de la carpeta original, ya que en la misma se hallan ocultos otros archivos vitales para el correcto funcionamiento del HTML. Además, será necesario tener instalado el programa **Modellus 4**, y actualizado el **Java**.