Número y Operaciones

Número y Operaciones

Los saberes que se ponen en juego

Para que los alumnos puedan aprender los saberes incluidos en los núcleos, en la escuela tendremos que proponer situaciones de enseñanza en las que se pongan en juego distintos aspectos de los mismos. Se trata de que los conocimientos matemáticos se introduzcan en el aula asociados con los distintos problemas que permiten resolver para, luego, identificarlos y sistematizarlos.

- Interpretar, registrar, comunicar y comparar escrituras equivalentes para un mismo número.
- Argumentar sobre la equivalencia de distintas descomposiciones de un número (aditivas, multiplicativas) usando unidades de distintos órdenes.
- Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales, ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.
- Interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales[1] para una misma cantidad.
- Comparar fracciones y/o expresiones decimales entre sí y con el entero a través de distintos procedimientos (relaciones numéricas, expresiones equivalentes, representaciones gráficas) ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.
- Sumar, restar, multiplicar y/o dividir números naturales con distintos significados partiendo de información presentada en textos, tablas y gráficos estadísticos, analizando el tipo de cálculo requerido –exacto, aproximado, mental, escrito, con calculadora– y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.

[1] Se incluye la comparación entre fracciones, entre expresiones decimales y entre fracciones y expresiones decimales, atendiendo a las equivalencias de uso frecuente (1/4 = 0,25; 3/4 = 0,75) y ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.

- Analizar relaciones entre cantidades para determinar y describir regularidades, incluyendo el caso de la proporcionalidad.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos (multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades correspondientes expresadas con números naturales) para calcular valores que se corresponden proporcionalmente evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles.
- Elaborar y comparar procedimientos de cálculo con números naturales –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por una cifra o más, analizando su pertinencia y economía en función de los números involucrados.
- Argumentar sobre la validez de un procedimiento o el resultado de un cálculo, usando relaciones entre números naturales y propiedades de las operaciones.
- Explicitar relaciones numéricas vinculadas con la división y la multiplicación (múltiplo, divisor, D = d x c + r).
- Elaborar preguntas a partir de diferentes informaciones, registrar y organizar información en tablas y gráficos.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades expresadas con fracciones o decimales, utilizando distintos procedimientos y representaciones, y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
- Elaborar y comparar distintos procedimientos (multiplicar, dividir, sumar o restar cantidades correspondientes expresadas con fracciones o decimales) para calcular valores que se corresponden proporcionalmente, evaluando la pertinencia del procedimiento en relación con los datos disponibles.
- Elaborar y comparar procedimientos[2] de cálculo –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre fracciones y entre expresiones decimales, incluyendo el encuadramiento de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados.
- Explicitar procedimientos de cálculo mental que puedan utilizarse para facilitar otros cálculos (la mitad de la mitad es la cuarta parte, 0,25 x 3 = 0,75 = 3/4,...) y para argumentar sobre la validez de los resultados obtenidos.

[2] Se incluye la comparación de procedimientos elaborados por los alumnos y de estos con los propuestos por el docente (estimaciones, representaciones gráficas, uso de descomposiciones aditivas y equivalencias numéricas).

Propuestas para la enseñanza

En este apartado, intentamos precisar el alcance y el sentido de los conocimientos que se priorizan en el Eje "Número y Operaciones", a partir de algunos ejemplos de actividades para desarrollar en el aula y de producciones de los niños. Además, presentamos posibles secuencias de actividades que apuntan al aprendizaje de una noción y muestran el tipo de trabajo matemático propuesto desde el enfoque explicitado al inicio de este *Cuaderno*, en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo".[3]

Para avanzar en el conocimiento del sistema de numeración

En los *Cuadernos* de años anteriores, venimos proponiendo la enseñanza del sistema de numeración decimal a partir del análisis de las regularidades en la escritura y lectura de números, y avanzando hacia la idea de sucesivos agrupamientos de a 10.

Durante el Primer Ciclo, los alumnos han trabajado con números naturales, enfrentando una gran variedad de situaciones que les permitieron usar y conocer el sistema de numeración[4] y, en 4º año/grado, han argumentado sobre las posibles descomposiciones de un número. En 5º año/grado, el trabajo que planteamos avanza en dos sentidos. Por una parte, en la explicitación de las características del sistema para los números naturales tal como lo desarrollamos en este apartado y, por otra, en el uso de esta representación para escribir cantidades no enteras, lo que se plantea en el apartado "Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones y/o expresiones decimales".

Así, en el campo de los números naturales, es necesario que los niños avancen en:

- la sistematización de las características de nuestro sistema de numeración: *las cifras del número tienen un valor diferente según el lugar que ocupen en él* (es posicional), *de derecha a izquierda cada posición vale diez veces más que la anterior* (es decimal), *cuando el número tiene 0 en una posición, significa que no tiene unidades sueltas de ese orden;*

[3] **Recomendación de lectura:** en reiteradas ocasiones se propondrán actividades a partir de lo que se ha realizado durante el año/grado anterior. En los casos en que los chicos no hayan realizado dicho trabajo u otro similar, es conveniente consultar *Cuadernos para el aula: Matemática 4* para que, en función de los conocimientos del grupo, el docente decida cómo adaptar la propuesta que allí se incluye.

[4] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Plantear situaciones para componer y descomponer números", en el Eje "Número y Operaciones" de *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y de *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, respectivamente.

- la posibilidad de argumentar sobre equivalencias entre distintos órdenes: *10.000 unidades forman 1000 decenas, porque 10.000 es 1000 x 10, y 10 unidades forman 1 decena;*
- el establecimiento de vínculos entre dos descomposiciones de un número, esto es, una aditiva, donde cada sumando expresa el valor de cada cifra en unidades (20.234 = 20.000 + 200 + 30 + 4) y otra multiplicativa, en la que cada sumando expresa el valor de cada cifra con una multiplicación, la del valor absoluto de la cifra por la unidad seguida de tantos ceros como corresponda (20.234 = 2 x 10.000 + 2 x 100 + 3 x 10 + 4 x 1).

Para promover la interpretación, el registro y la comunicación de cantidades, convendrá que para los problemas se elijan contextos extramatemáticos[5] que pueden o no estar asociados con proyectos de otras áreas, y que deberán ser apropiados para que los números "grandes" tengan sentido. Por ejemplo, al interpretar u organizar información en tablas y gráficos podemos considerar la cantidad de habitantes de una población, de asistentes a una marcha o los datos vinculados con la producción de cereales, con la explotación de recursos minerales, etc. En estos casos, se producirá la lectura, escritura e interpretación de los números involucrados en las cantidades del problema.

También es necesario que, con los mismos propósitos, presentemos problemas de contexto intramatemático, es decir aquellos en los cuales se trabaja con números y no con cantidades.

En este apartado, presentamos, en primer lugar, situaciones de ambos tipos de contexto, en las que los alumnos tendrán que identificar números a partir de un conjunto de condiciones referidas a su representación y a su comparación con otros números. Otras situaciones que se proponen dan lugar a la elaboración de explicaciones sobre las características del sistema y las equivalencias, partiendo de su descomposición aditiva y/o multiplicativa.

[5] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Los contextos", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Es importante destacar que la complejidad de las actividades no depende solamente de la cantidad de cifras de los números, sino del tipo de tarea que involucra su uso. En este sentido, la explicitación de conocimientos requeridos en las tareas de elaboración de formulaciones y argumentaciones implica una nueva reflexión sobre las relaciones establecidas cuando se resolvieron los problemas.

Con respecto a la forma en que los chicos adquieren conocimientos matemáticos, y en particular conocimientos numéricos, cabe aclarar que, durante muchos años, las derivaciones de investigaciones psicológicas que circularon en las escuelas han instalado la idea de que el uso de material concreto asegura una mejor comprensión de las nociones que se quieren enseñar. Tales ideas relativas a la construcción de conocimientos se apoyaban en la necesidad de generar interacciones de los niños con el medio a partir de alguna pregunta para luego reflexionar sobre sus acciones, y en tal sentido es importante señalar que la adquisición de conocimientos está ligada a las relaciones que se establecen en esas ocasiones. Hoy sostenemos la necesidad de tales interacciones y destacamos que estas no debieran apoyarse únicamente en la manipulación de materiales concretos sino también en el trabajo sobre las representaciones de los números, priorizando las reflexiones sobre las acciones realizadas en todos los casos[6].

Es esperable que, al ir resolviendo las actividades, las nociones vinculadas con las características del sistema (posición o lugar, decimal o de a 10) aparezcan en las formulaciones orales o escritas y en las argumentaciones de los chicos, y que los chicos vayan descubriendo que el lenguaje propio del área es un medio idóneo para expresar las ideas con claridad.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

Los problemas donde hay que establecer comparaciones entre cantidades o números dan la ocasión de interpretarlos y, eventualmente, hacer registros o comunicarlos a otros.

En 5º año/grado es posible retomar, si los chicos no lo hubieran trabajado en el año anterior, los juegos de encuadramiento de números propuestos en *Cuadernos para el aula: Matemática 4*; allí los niños debían descubrir un número a partir de indi-

[6] **Recomendación de lectura:** para profundizar sobre el uso de materiales didácticos en relación con la enseñanza del sistema de numeración en el Primer Ciclo, se puede consultar *Pensando en la enseñanza, Preguntas y respuestas*, Buenos Aires, Secretaría de Educación de la MCBA.

cios sobre su ubicación con respecto a otros (está entre…, es mayor que…). Esto implica el uso de estrategias de comparación de números y el establecimiento de las relaciones de orden, lo que podría hacerse en 5º con números de 5 o 6 cifras.

También se puede proponer la siguiente actividad, donde además de **comparar números**, hay que identificar un número por la conjunción de varias características, algunas tienen que ver con el uso de términos que denominan las posiciones de las cifras y otras, con el uso de las relaciones de mayor y menor.

Es interesante destacar que los conocimientos que se ponen en juego en la actividad se refieren a cuestiones diferentes: el conocimiento del valor posicional es relativo al sistema de representación decimal; en cambio, las relaciones de mayor o menor entre números se dan de manera independiente del sistema de representación. Así se puede pensar en la relación de mayor entre un par de números escritos en diferentes sistemas: 20 > 14, y también XX > XIV. Sin embargo, una vez elegido el sistema, es posible elaborar reglas de reconocimiento ligadas al mismo para ordenar los números, como *el mayor es el que tiene más cifras o el que manda es el de la izquierda*, para el sistema posicional decimal.

> **“Juego de las pistas”:** comparar números e identificar las posiciones de sus cifras.
> **Materiales:** tarjetas con pistas.
> **Organización de la clase:** se divide la clase en equipos de 4 alumnos.
> **Desarrollo:** se trata de una competencia entre varios equipos, cada uno de los cuales recibe dos tarjetas, cada una con un conjunto de condiciones que debe cumplir un número. En una hoja, el equipo escribe los números que cumplen las condiciones explicadas en cada una de las dos tarjetas.

Es conveniente que el maestro conozca de antemano todas las respuestas (los números que cumplen las condiciones) para dar a cada equipo una tarjeta con condiciones que cumple un único número (por ejemplo, las tarjetas 2, 4, 6 y 7) y otra con condiciones que cumplen varios números (por ejemplo, las tarjetas 1, 3, 5 y 8).

> La asignación de puntajes se realiza con los siguientes criterios: cuando la respuesta es un único número, obtienen 1000 puntos, si aciertan, y, si no, suman 200 puntos por cada dígito correctamente ubicado. Cuando hay más de un número como solución, obtienen 500 puntos por cada número correcto y 500 adicionales por escribir todas las respuestas posibles.

1

- Está entre **10.000** y **20.000**.
- Tiene exactamente **132** centenas.
- La cifra de las decenas es un número mayor que **3** y menor que **7**.

2

- La cifra de las unidades coincide con la de las decenas.
- Tiene exactamente **11** centenas.
- La cifra de las decenas supera en dos a la de las centenas.
- Todas sus cifras son impares.

3

- Tiene más de **98** centenas.
- Tiene cuatro cifras.
- Al agregarle **5** decenas, pasa a tener **5** cifras.
- La cifra de las unidades es **0**.

4

- Tiene una docena de decenas.
- Sus cifras forman una serie ordenada.
- Tiene tres cifras.

5

- Está entre **10.000** y **30.000**.
- Tiene una decena de unidades de mil.
- Agregándole **5** centenas, aumenta una unidad de mil.
- Termina en doble cero.

6

- La cifra de las unidades triplica a la de las unidades de mil.
- Tiene cuatro cifras.
- Tiene **300** decenas.
- Tiene dos ceros intermedios.

7

- No es mayor que media decena de mil.
- Las cifras de las unidades, decenas y centenas son **0**.
- Comienza en un dígito par, mayor que **3**.
- La suma de sus cifras es **4**.

8

- Está entre **4000** y **5000** unidades.
- Tiene **47** centenas.
- La cifra de las unidades es igual a la diferencia entre la cifra de las centenas y la de las unidades de mil.
- La cifra de las decenas es menor que la de las unidades.

En la puesta en común, nuestras intervenciones apuntarán a que los niños expliquen cómo lo pensaron, lo que nos permitirá conocer el estado de sus conocimientos sobre las nociones utilizadas, así como la interpretación que hacen de términos como: cifra, decena, centena, ceros intermedios, etc. En consecuencia, será necesario compartir el significado de estas expresiones.

En algunas tarjetas, la respuesta tiene varias soluciones; esto resulta interesante para que los chicos no asocien la idea de respuesta a la de solución única. Una tarea posterior atractiva para estos casos es proponer a los chicos agregar una condición para reducir o para ampliar la cantidad de soluciones, incorporando así un trabajo sobre el tratamiento de la información.[7]

A partir de esta actividad, es posible proponer a los alumnos que escriban nuevas tarjetas con pistas, para que luego respondan sus compañeros. En este caso, según nuestra intencionalidad, daremos el número que van a utilizar o bien lo dejaremos librado a los propios alumnos. Además, en la escritura de pistas, podremos imponer el uso de determinadas palabras. Si decidiéramos darle a cada grupo un número para que inventen las pistas, podríamos, sin que ellos lo sepan, darles el mismo a todos los grupos. En estos casos, en la puesta en común de lo producido, será posible comparar pistas, encontrar distintas formas de enunciar una misma condición, o bien un conjunto distinto de condiciones para identificar el mismo número. También podríamos dar a cada grupo números con alguna semejanza, como por ejemplo: 100.002, 10.002, 1002, 102. En este caso, se podrá preguntar en la puesta en común sobre qué condición cumplen todos y obtener respuestas como *Todos están formados por las mismas cifras, Tienen ceros intermedios, La cifra de mayor valor absoluto supera en dos a la de menor valor,* entre otras.

Si estas actividades la planteamos al inicio del trabajo con número naturales, nos permitirá conocer el grado de comprensión de la relación de orden, el manejo de nociones ligadas al valor posicional y el lenguaje disponible para la redacción de las consignas.

[7] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “Las relaciones entre preguntas y datos” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*.

Si cada equipo consiguiera armar dos o tres tarjetas, se podría intercambiar con los compañeros de un grado paralelo de la misma u otra escuela. Esto puede constituirse, entonces, en una oportunidad interesante para articular acciones entre el equipo docente de una institución a partir de la circulación de los saberes entre pares. Asimismo, es posible hacer una adaptación para grupos de niños con distintos conocimientos en un plurigrado.

Otros desafíos numéricos que involucran la noción de valor posicional son los siguientes:

1. ¿Cuál es el mayor número de 4 cifras que se puede obtener a partir de 5679, cambiando de lugar una sola cifra? ¿Y cambiando de lugar dos? ¿Por qué?
2. ¿Cuántos números de 3 cifras podés formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4 poniendo siempre el 1 en el lugar de las centenas, sin repetir ninguno?
3. ¿Cuántos números de 3 cifras podés formar con los dígitos 1, 2 y 0, poniendo siempre el 1 en el lugar de las decenas?

Aquí interesa tanto recuperar las nociones que se vienen trabajando como avanzar en la búsqueda de las combinaciones de cifras que respetan las condiciones pedidas, mostrando estrategias que permitan asegurar que se han considerado todas.

En cuanto a la **comparación de cantidades**, por ejemplo, 2350 m con 2 km o 375 cl con 3 l, es posible presentar actividades que incluyan la lectura y escritura de dichas cantidades, como se menciona en el apartado “Para trabajar con la información” de este *Cuaderno*. Allí, se propone construir o interpretar tablas o pictogramas. Estas representaciones podrían tomarse de textos de Ciencias Sociales o de Ciencias Naturales que se estén trabajando en esas áreas. Por ejemplo, los datos podrían referirse a recursos naturales de la Argentina o a problemas ambientales y la tarea podría ser interpretar la información contenida en tablas o encuadrar un valor al indicar a qué categoría corresponde.

Plantear situaciones para analizar distintas escrituras de un número

En el Primer Ciclo, se favoreció el uso implícito de las reglas del sistema de numeración mientras que en el Segundo Ciclo es fundamental su explicitación para avanzar en la reflexión sobre las mismas. Para ello, es necesario apoyarse en la expresión de un número con diferentes descomposiciones: la aditiva, donde se explicita el valor posicional de cada cifra (345 = 300 + 40 + 5), y la multiplicativa, donde se explicitan los órdenes de agrupación (345 = 3 x 100 + 4 x 10 + 5, o 345 como 3 grupos de 10 grupos de 10, 4 grupos de 10 y 5 sin agrupar).

Si damos la oportunidad de trabajar con formas diferentes de **escribir un mismo número**, haremos posible que los alumnos avancen en el uso de variadas estrategias de cálculo en función de los números involucrados y de lo que la situación pida, así como también en las posibilidades de comprender los distintos pasos de los algoritmos de cada operación.

Por otro lado, tener claras las características del sistema decimal como forma de representación de los números naturales contribuye a avanzar hacia el análisis de lo que cambia y lo que permanece igual cuando se comienza a trabajar con el nuevo campo numérico, el de los racionales. Estos números admiten, en principio, una representación fraccionaria, con reglas muy diferentes de las usadas para representar números naturales y un nuevo símbolo, la raya de fracción. También tienen una representación decimal, con el mismo sistema de agrupamientos de a 10 que se usa para los naturales, pero que obliga a revisar si algunas ideas que se usaban con los naturales siguen siendo válidas. Por ejemplo, con los decimales, el de más cifras no es necesariamente el más grande[8].

Nuevamente, los problemas intramatemáticos resultan un contexto interesante para que los chicos escriban números y analicen escrituras, poniendo en juego argumentaciones acerca de las descomposiciones numéricas. El juego[9] que planteamos a continuación incluye el uso de la calculadora como material auxiliar, como una herramienta que permite en este caso que un compañero controle el uso de estrategias de cálculo mental que hace otro compañero.

"Multiplico y sumo": calcular productos y adiciones con potencias de diez.
Materiales: un juego de tarjetas como las siguientes:

+ 10	+ 100	+ 1000	x 10	x 100	x 1000

[8] **Recomendación de lectura:** véase "Para avanzar en el conocimiento de fracciones y decimales" en el apartado del Eje "Número y Operaciones" de este *Cuaderno*.

[9] **Recomendación de lectura:** en el apartado "Los contextos" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*, se analiza cómo abordar los juegos como situaciones de aprendizaje.

Cada dos niños, una calculadora y una tablita de cuatro columnas, donde van anotando el número inicial, las operaciones a efectuar que aparecen en la tarjeta y el resultado.

Número	x....	+.....	Resultado
34	x 10	+ 100	440

Piedritas, fichas o tapitas para anotar el puntaje.
Organización de la clase: se juega de a dos.
Desarrollo: se colocan las tarjetas con el signo de suma en una pila y las tarjetas con el signo de multiplicación en la otra pila, todas boca abajo. Uno de los niños dice un número de dos cifras. El otro saca una tarjeta de cada pila y deberá, mentalmente, primero multiplicar el número que dijo su compañero por el número que indica la tarjeta con el signo x, y luego sumarle el número que indica la tarjeta con el signo +. Por último, deberá anotar todo en la tabla. El primero controla la exactitud del resultado, con la calculadora. Si es correcto, le da una tapita. Luego, invierten los roles. Gana el que junta más tapitas.

El docente podrá limitar la duración del juego hasta que cada pareja realice 10 jugadas, con lo que cada pareja de chicos obtendrá una tabla de 10 números. A partir de esas listas, se puede proponer una segunda actividad para discutir:

1. ¿Qué transformación se produce en un número como el 34 al multiplicarlo por 10?, ¿y por 100?, ¿y por 1000? ¿Por qué?
2. ¿Qué transformación se produce en un número como el 34 al sumarle 10?, ¿y al sumarle 100?, ¿y 1000? ¿Por qué?
3. Si me dicen 34, ¿daría el mismo resultado multiplicar primero por 100 y después sumar 100, que sumar primero 100 y después multiplicar por 100? ¿Por qué?
4. Si quiero obtener el número más grande posible, ¿qué conviene hacer primero, sumar 100 o multiplicar 100? ¿Por qué?

En la puesta en común se espera que, para la pregunta 1, los chicos expliquen que *al multiplicar por 10 un número de dos cifras, cada unidad se transforma en 10, es decir en una decena; cada decena se transforma en 10 decenas, o sea en una centena. Si se multiplica por 100, cada unidad se transforma en 100, es decir en una centena y cada decena en 100 decenas, o sea en una unidad de mil. Y lo mismo ocurre al multiplicar por 1000.* También podrían pensar en la descomposición multiplicativa del número y ver qué pasa al multiplicar. Por ejemplo, el número 34 = 3 x 10 + 4 al ser multiplicado por 10, queda así: 34 x 10 = 3 x 10 x 10 + 4 x 10 = 300 + 40 = 340.

La pregunta 2 se puede pensar a partir de la descomposición aditiva $34 = 30 + 4$, y ver que al sumar 10, queda $34 + 10 = 30 + 10 + 4 = 40 + 4 = 44$. También se puede pensar que *se agrega 1 al lugar de los dieces.*

Con respecto a la pregunta 3, se podrá pensar en la siguiente diferencia. Al hacer $34 \times 100 + 100$, se hace 34 veces el 100 y se agrega una vez más 100, en tanto que al hacer $34 + 100 \times 100$ en el orden en que aparecen, se tiene que hacer 100 veces la suma $34 + 100$.

La última pregunta puede pensarse discutiendo que, en el segundo caso, multiplicar por 100 afecta tanto a 34 como a 100 (es $34 \times 100 + 100 \times 100$); mientras que, en el primer caso, multiplicar 100 afecta sólo a 34 (es $34 \times 100 + 100$) y agregar 100 no compensa.

También sería posible en la puesta en común que aprovechemos la ocasión para discutir el modo de indicar en un cálculo con dos operaciones qué operación se hace primero, es decir el uso del paréntesis, y/o explicitar el uso de propiedades de la suma y de la multiplicación (asociativa, conmutativa, distributiva).[10]

Para seguir trabajando estos conocimientos en el cuaderno, pueden presentarse nuevas situaciones para resolver en forma individual. En estas situaciones, también aparece el uso de la calculadora[11], pero con una función diferente.

1. En el visor de la calculadora de Ale, estaba el número 3627, él dice que hizo una sola cuenta y logró que en el lugar del 6 apareciera un 4 sin que se modificara el resto de los números. ¿Es posible? Explicá por qué.
2. Después Ale dice que cuando está escrito el número 3627 en el visor de la calculadora, él logra, también con una sola cuenta, que en el lugar del 2 aparezca un 0 y en lugar del 7, un 4. ¿Es posible? Explicá por qué.
3. Finalmente, Ale dice que con una sola cuenta logra que en lugar del 3 aparezca un 8 en el visor de la calculadora, sin que se modifique el resto de las cifras. ¿Es posible?

En esta actividad se promueve la anticipación de resultados, para lo cual los alumnos deben realizar cálculos mentales. Aquí, al escribir el número en la calculadora, el jugador ya tuvo que haber tomado la decisión acerca de qué número va a utilizar. Las máquinas funcionan como elementos autocorrectores. Si no se cuenta con calculadoras suficientes para jugar con todos los niños, se podrá utilizar, para cada pareja, una tabla escrita sobre un papel, en la que cada jugador podrá escribir el número que resulta de cada uno de los cálculos mentales que va realizando, y el control se deberá realizar por medio del cálculo escrito.

[10] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno.*

[11] **Recomendación de lectura:** Broitman, C., Itzcovich, H. (2001), *Matemática. Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB.* Documento Nº 6, DGCyE, provincia de Buenos Aires.

También podremos recurrir a situaciones que den continuidad a las planteadas desde el Primer Ciclo en relación con el contexto del dinero, pero ya no con los billetes, sino de la mano de otros portadores de información numérica. Por ejemplo, en las siguientes actividades, además de interpretar la información numérica, los chicos deberán comprender los textos. Presentamos una tarea diferente a las propuestas habitualmente, un diálogo para completar:

- Completá el diálogo:

Doña Clara: *–Necesito cobrar este cheque de 5000 pesos, por favor, déme 20 billetes de 10 y el resto de 100.*
Cajero: *–Bien, aquí tiene: son 20 billetes de 10 y .... billetes de 100.*
Doña Clara: *–Disculpe, mejor déme 500 pesos en billetes de 10 y el resto, en billetes de 100.*
Cajero: *–A ver, serían .... billetes de 10 y .... billetes de 100.*
Doña Clara: *–Perdone, pero mejor llevo menos billetes, déme todo en billetes de 100.*
Cajero: *–Bien, aquí tiene: son .... billetes de 100.*

Este problema permite pensar en las equivalencias entre distintos órdenes. Así, los 5000 son 5 unidades de mil, que habrá que componer con decenas y centenas de diferentes maneras según los pedidos de Doña Clara.

Para avanzar en el conocimiento de fracciones y decimales

Ya hemos afirmado que el conocimiento de una determinada noción matemática requiere, en principio, identificar las situaciones en las que es posible, o no, utilizarla. Nos ocuparemos, entonces, de considerar distintos usos que se les puede dar a estos nuevos números, planteando situaciones que los naturales no permiten resolver.

Posteriormente, trataremos el establecimiento de relaciones entre fracciones y el entero, entre decimales y el entero; entre fracciones y decimales entre sí, etc., ya que la consideración de estas relaciones y de las distintas escrituras posibles es parte fundamental de la construcción de este conocimiento. Este trabajo se inicia con la recuperación de ciertas relaciones que los niños y niñas ya pueden tener acerca de las fracciones o decimales más usuales:

Un cuarto es la mitad de medio kilo, con 4 cuartos formo 1 kilo, con 2 monedas de 50 centavos completo $ 1, para escribir 25 centavos se puede usar un número con coma, como 0,25, para luego avanzar hacia su explicitación y generalización.

En *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, iniciamos la presentación de propuestas de trabajo con expresiones fraccionarias y decimales de los números racionales asociadas a contextos de uso social habitual que permitieron que los alumnos formularan relaciones y reglas de uso en esos contextos. En 5° año/grado, habría que ampliar los contextos de uso, puesto que los alumnos ya estarían en condiciones de tomar como objeto de estudio las relaciones que establecen, por ejemplo, algunos criterios de comparación de números, para determinar cuándo funcionan y cuándo no. Más adelante, se avanzará en extender y generalizar esas relaciones y dar razones sobre su funcionamiento. En este sentido, *"Formular leyes para comparar números, establecer la verdad o la falsedad de enunciados, analizar la equivalencia de expresiones numéricas sin apelar al cálculo efectivo, comparar diferentes procedimientos realizados por* otros, *delimitar el alcance de diferentes propiedades (esta* regla *vale en tales casos) son tareas que, al ubicar al alumno en un plano de reflexión sobre el trabajo llevado a cabo, le permiten comprender aspectos de la organización teórica de la disciplina, le posibilitan acceder a las razones por las cuales algo funciona de una cierta manera. Lograr que los alumnos adquieran cierto nivel de fundamentación para los conceptos y propiedades con los que tratan, es un propósito de la educación matemática que la escuela tiene que brindar*[12]*.*

Otro aspecto importante en el camino de avance en el reconocimiento y uso de estos números lo constituye la consideración del conjunto o familia con los cuales trabajar en este año/grado y con las nuevas relaciones que deseamos introducir. En este sentido, una propuesta podría ser la ampliación del repertorio de fracciones. Es el caso de la familia de los cuartos, los medios y los octavos hacia otras fracciones que continúen con la idea de seguir pensando en la "mitad de" (1/16, 1/32), incluyendo también los quintos, los décimos, los centésimos y los milésimos; introduciendo el noveno, los doceavos y los dieciochoavos en la "familia" de los tercios; incluyendo fracciones mayores que la unidad, como 2 $^{3}/_{12}$, 7/2, 12/9 y otras relaciones, como "es 1/3 y medio", "es 1/2 y 1/9", etc. y todas las otras familias que se derivan del trabajo con comparaciones, que explicitaremos más adelante.

En relación con el trabajo con decimales, proponemos continuar con la comprensión de estos números y sus características particulares, apuntando a una mayor sistematización respecto de la conexión entre decimales y fracciones. Para esto, se recupera el contexto del dinero ya propuesto para 4° año/grado y se incluyen otros, como los de medida de longitud, de capacidad, etcétera.

Es importante destacar que este trabajo apunta a que los alumnos comiencen a considerar que se trata de "nuevos números", distintos de los números naturales, que hay que explorar para conocer y caracterizar.

[12] Extraído del documento *Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula.

Plantear situaciones para medir, repartir o partir usando fracciones y/o expresiones decimales

En 4° año/grado, los problemas ligados a las mediciones o al uso del sistema monetario, y distintas situaciones de reparto y partición permitieron establecer las primeras conclusiones sobre las características de estos números, trabajando sobre un repertorio de números bastante acotado. El avance que proponemos para 5º año/grado consiste en presentar situaciones similares para articular con el trabajo precedente, pero que al mismo tiempo permitan tanto la ampliación del repertorio como el establecimiento de nuevas relaciones entre fracciones, entre expresiones decimales y la posibilidad de avanzar en la articulación de estas escrituras.

En relación con las **fracciones**, en el año/grado anterior propusimos el trabajo con familias de fracciones como las siguientes: 1/2, 1/4, 1/8 (mitad, mitad de la mitad y mitad de la mitad de la mitad); 1/3, 1/6 (tercera parte y mitad de la tercera parte); 1/5, 1/10 (quinta parte y mitad de la quinta parte). En 5º año/grado proponemos continuar con estas, pero ampliando de la siguiente manera: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16; 1/3, 1/6, 1/9; 1/5, 1/10, 1/100. Respecto de las relaciones entre las fracciones, trabajaremos la mitad, la tercera parte y la décima parte de cualquier fracción.

Las situaciones de partición en las que se trata de averiguar la cantidad de partes en las que se subdividió el total, una vez fijado el valor de cada parte, seguramente se han abordado al resolver problemas como: *Un apicultor cosechó 5 kg de miel y para la venta necesita fraccionarlos en frascos de 3/4 kg. ¿Cuántos frascos deberá utilizar?*

Un avance en relación con este planteo puede ser presentar varias preguntas que requieran considerar nuevas fracciones y expresiones decimales.

> • Un apicultor obtuvo 35 kg de miel de una colmena. Para su venta, decide analizar la conveniencia de usar distintos envases. ¿Cuántos necesitaría si usa: envases de $\frac{3}{4}$ kg, de $\frac{1}{2}$ kg, de $\frac{35}{100}$ de kg, de $\frac{1}{4}$ kg o de 0,2 kg?

En este caso, resulta interesante discutir con los alumnos si, frente a la variedad de cálculos, es conveniente realizar algunos antes que otros para apoyarse en los resultados obtenidos, lo que daría lugar a la explicitación de relaciones entre fracciones o entre fracciones y expresiones decimales.

En otros problemas, las cantidades expresadas con fracciones y decimales surgen como resultado de una medición. En particular, en 5° año/grado podemos proponer a los alumnos actividades que involucran mediciones de longitudes y de áreas, en las que la cantidad elegida como unidad no está contenida un número entero de veces en la cantidad que se desea medir, lo que lleva a explicitar la insuficiencia de los números naturales para expresar los resultados.

Vale aclarar aquí una cuestión respecto de la medida y de los números racionales. Hemos dicho ya que sin los números racionales, esto es, sin los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros (con el divisor distinto de cero), no habría posibilidad de expresar muchas medidas. Sin embargo, existen medidas que no pueden expresarse con números racionales, como es el caso de la longitud de la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado, que es 2, o la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que es Π. Los números que expresan estas medidas, de los cuales 2 y Π son sólo dos ejemplos, no serán estudiados en el Segundo Ciclo.

En el caso de la longitud, es posible combinar actividades que requieren medir o construir segmentos con otras en las que se trabaja sobre la recta numérica, teniendo en cuenta que esta forma de representación requiere, además, de un trabajo específico. Un ejemplo de esta combinación es el siguiente:

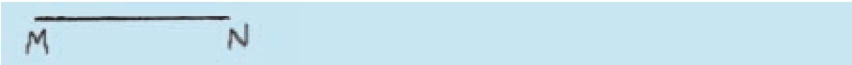
1. Hallá la medida de los segmentos PQ y RS, considerando U como unidad en ambos casos.

2. Trazá segmentos cuyas medidas resulten:

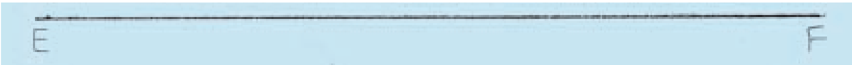
a) 2 y $\frac{1}{4}$ de la unidad U.

b) 1 y $\frac{5}{4}$ de la unidad U.

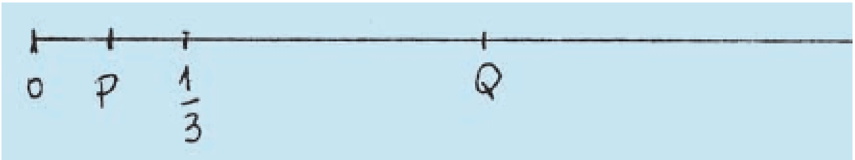
3. a) Si el siguiente segmento mide $\frac{1}{3}$ de la unidad, dibujá la unidad.

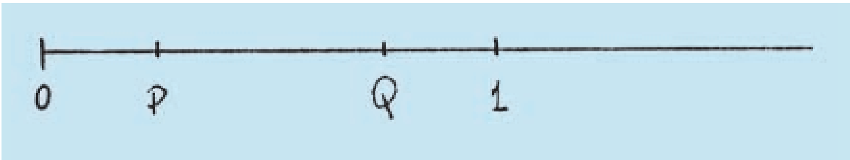


b) Si el siguiente segmento representa $1\frac{3}{4}$ de la unidad, dibujá la unidad. Explicá cómo lo pensaste.



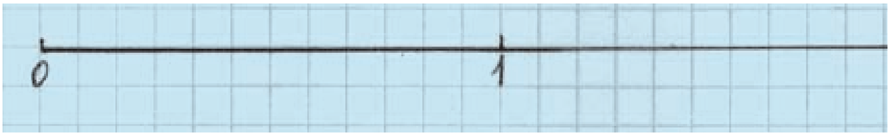
4. Indicá en las siguientes rectas los números que corresponden a la posición de los puntos P y Q:





En este tipo de problemas, resulta muy importante tener en cuenta que las estrategias puestas en juego pueden ser muy diferentes, según cuál sea la información que se da y los instrumentos disponibles. Por ejemplo, los alumnos suelen recurrir espontáneamente a medir con la regla sin tener en cuenta que, en casos como el del problema 3, se puede obtener la unidad repitiendo la parte que se conoce como dato sin conocer su longitud. Aun contando con el uso de la regla, en el caso del problema 2, los procedimientos varían si la medida de U, en centímetros, es o no múltiplo de 2. En el problema 3 a), si en lugar de 1/3 se usa 2/3, algunos alumnos considerarán que para encontrar el tercio que falta tienen que dividir el segmento en tres partes iguales y no en 2, hipótesis que puede reforzarse si el segmento original mide 3 cm.

A su vez, cuando presentemos las actividades donde se pide representar en la recta numérica, tendremos que tener en cuenta: si la longitud del segmento unidad (en cm o en "cuadraditos", en el caso de usar papel cuadriculado) es o no múltiplo de los denominadores de las fracciones que se quieren representar, si se dan las posiciones del 0 y el 1 o del 0 y otro número. En este sentido, las estrategias que se usan para representar, por ejemplo 1/3 y 1/4, en los casos que siguen no son las mismas y ponen en juego distintos conocimientos.



En 4° año/grado, seguramente los alumnos ya se han iniciado en la exploración y resolución de situaciones de reparto, donde la cantidad que corresponde a cada parte se expresa con una fracción. A modo de ejemplo, presentamos a continuación un conjunto de actividades[13] asociadas a repartos que permiten promover un trabajo de análisis y comparación de procedimientos propios y ajenos utilizados para la resolución de una situación.

En este sentido, la idea es enriquecer el tipo de trabajo que se realiza con más frecuencia en la resolución de situaciones[14], sin relegar a un segundo plano el análisis de lo producido por los mismos chicos o por otros.

[13] Problemas extraídos de *Matemática. Fracciones y Números decimales. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.
Recomendación de lectura: la lectura del material citado permitirá una mayor profundización del tema y consultar más ejemplos de actividades.

[14] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "La gestión de la clase", en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*, para profundizar sobre el sentido de elaborar argumentos y compararlos con los de otros compañeros.

Secuencia para establecer relaciones y argumentar sobre ellas: “Repartir de distintas formas”

En esta secuencia trabajamos en un contexto que no es nuevo para los alumnos y lo hacemos con fracciones conocidas, pero planteamos una tarea que, según el trabajo realizado en 4º año/grado, puede ser nueva.

Se trata aquí de elaborar argumentos y criterios independientemente de los procedimientos empíricos, como la realización efectiva del reparto o de una representación en dibujos de la situación planteada, con todo lo que esto significa para el avance en la adquisición de herramientas matemáticas para los alumnos.

Para cada una de las actividades siguientes, el docente podrá pedir a cada chico que copie el enunciado del pizarrón o podrá darle una fotocopia.

Actividad 1

• Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Ale y Jime para repartir 3 chocolates iguales entre 4 chicos.

• Discutí con tu compañero si son o no equivalentes los repartos que proponen Ale y Jime, y explicá por qué sí o por qué no.

Para resolver esta primera actividad, los alumnos tendrán que expresar con fracciones los resultados de las dos acciones y decidir si dar 3 de 1/4 es lo mismo que dar 1/2 y 1/4 a cada uno. Si los alumnos ya hubieran trabajado suficientemente con este repertorio, es posible plantear otros repartos, como por ejemplo 6 entre 5 y comparar 6 veces 1/5 y 1 + 1/5. De esta manera, son enfrentados con la idea de que una misma cantidad puede expresarse de diferentes formas, lo que permitirá luego avanzar hacia la idea más general de que un mismo número puede representarse de diferentes maneras.

Actividad 2

• Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Vanesa y Joaquín para repartir 23 chocolates iguales entre 5 chicos.

• Discutí con tu compañero si los repartos que proponen Vanesa y Joaquín son o no equivalentes, y explicá por qué sí o por qué no.

En este segundo problema, se amplía el repertorio con relaciones entre quintos y décimos. La mayor dificultad aquí es encontrar la fracción que exprese la quinta parte de 1/2. Se espera que los alumnos, apoyados en conocimientos anteriores, elaboren explicaciones del tipo: *Al dividir una mitad en cinco partes iguales, los pedacitos que se obtienen son de un tamaño tal, que con diez de los mismos se completa un chocolate entero, es decir que 1/5 de 1/2 es 1/10.* El avance en esta actividad, en relación con la anterior, está dado no sólo por la idea de fracción (1/5 de 1/2), sino también por la dificultad de determinar la equivalencia de las escrituras. Los resultados de uno y otro reparto son: 4 y 3/5 para el caso de Vanesa y 4 1/2 y 1/10 para Joaquín. Una manera de argumentar sobre la equivalencia sería: *como 1/2 es equivalente a 5/10, entonces 1/2 y 1/10 es equivalente a 6/10. Además, 3/5 se puede pensar como 3 veces 1/5 , que es lo mismo que 3 veces 2/10, porque 1/5 = 2/10, y entonces 3/5 es lo mismo que 6/10.* A continuación, es posible proponer a los niños que escriban este razonamiento utilizando cálculos equivalentes: 3/5 = 3 x 1/5 = = 3 x 2/10 = 6/10, para volver luego sobre ellos.

Actividad 3

• Leé cómo se repartieron 8 chocolates iguales entre 3 chicos.
Se han partido por la mitad 6 chocolates y se entregaron cuatro mitades a cada uno. Luego, los 2 chocolates restantes se cortaron en tres partes cada uno y se le entregaron dos de esas partes a cada chico.

• Buscá otros repartos que sean equivalentes a este.

• Anotá las expresiones fraccionarias que surgen y pensá cómo podrías explicar que son expresiones equivalentes que representan todas la misma cantidad. Escribí en una hoja tu explicación.

En esta actividad, el foco está puesto en la producción de expresiones equivalentes para una misma cantidad. No se trata de una tarea fácil, por lo que sería conveniente organizar un trabajo colectivo una vez que los alumnos hayan comprendido el reparto realizado. Se espera que al final de este trabajo colectivo se extraigan conclusiones tales como: *1 es lo mismo que 3/3; 2 es lo mismo que 6/3, por lo tanto 6/3 y 2/3 es lo mismo que 8/3, u 8 dividido 3 da 2, y los 2 que quedan se reparten entre 3 y a cada uno le toca 2/3, así que queda 2 y 2/3.* Es posible también que los alumnos lleguen a la conclusión de que el resultado de 8 dividido 3 es 8/3 y, de modo más general, que *se puede pensar una fracción como el resultado de un reparto en el que el dividendo es el numerador y el divisor, el denominador.* Nuevamente, si se propone otra actividad en la que se planteen otros repartos, se podría dar lugar a ampliar el repertorio conocido.

Es importante que luego de la producción de los alumnos y de las discusiones colectivas que se planteen, se guarde un registro, en los cuadernos o en las carpetas, de las conclusiones a las que se arribó. De esta manera, se van sistematizando los conocimientos y se puede recurrir a ellos para resolver otras situaciones o para estudiar. Por ejemplo, a partir de estas situaciones se podrían anotar conclusiones como las siguientes: *Una misma cantidad se puede representar con números diferentes*[15]*: 3/4 es lo mismo que 1/2 y 1/4; 5/4 es lo mismo que 1 y 1/4;* $1\frac{1}{2}$ *se puede armar con 6 de 1/4, por lo tanto* $1\frac{1}{2}$ *es lo mismo que 6/4, etc.* O bien: *1/5 de 1/2 es una parte tal que se necesitan 5 de esos pedacitos para completar 1/2, entonces se necesitan 10 de esos pedacitos para completar el entero; así, resulta que 1/5 de 1/2 es igual a 1/10.*

Agregar nuevos problemas de reparto, con distintas cantidades como datos, pero con los mismos resultados (3 chocolates entre 4 chicos, 6 entre 8, 30 entre 40) permitiría focalizar el análisis sobre fracciones equivalentes, derivadas de repartos equivalentes. A su vez, volver sobre los cálculos equivalentes, como $3/5 = 3 \times 1/5 = 3 \times 2/10 = 6/10$ para analizarlos, podría dar lugar a discutir sobre cómo obtener una fracción equivalente a una dada. Se trata de avanzar desde un razonamiento particular sobre un problema que involucra cantidades en un reparto concreto a la elaboración de un procedimiento más general que "vale" para cualquier fracción.

De este modo, los alumnos podrían llegar a afirmar: *Si dividís el numerador y el denominador por 2, por 3 o por 5, te da una fracción equivalente.* O bien: *Para tener una fracción equivalente hay que multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número.* Es importante que estas afirmaciones surjan como producto de una elaboración colectiva y no como una regla presentada por el maestro que se acepta y se usa de modo mecánico[16].

Queremos hacer notar, finalmente, que en este conjunto de actividades se abordaron varias nociones juntas (fracción de fracción, equivalencia de fracciones, composición de cantidades como suma de ciertas fracciones, etc.), poniendo en evidencia que están relacionadas. Muchas veces, al presentarlas separadamente para que los alumnos "no se confundan" y puedan "fijar" los conocimientos, perdemos en significatividad. Recordemos que, en este Ciclo, buscamos que los alumnos y alumnas avancen en la explicitación de sus conocimientos matemáticos, pudiendo establecer relaciones entre ellos, y esto no se favorece si las nociones se presentan aisladas unas de otras.

---

[15] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las representaciones" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

[16] **Recomendación de lectura:** véase el apartado "Las situaciones de enseñanza" en "Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo" de este *Cuaderno*.

Si bien en algunas de las actividades anteriores ya se ha incluido el uso de **expresiones decimales**, es posible que en 5º año/grado sea necesario volver sobre algunas situaciones que involucren la explicitación de la organización del sistema monetario[17]. Actividades como la composición y descomposición de una cierta cantidad con monedas de determinada clase y la escritura de dichas cantidades nos permiten diagnosticar el estado de los conocimientos de los alumnos sobre las escrituras decimales. Asimismo, tendremos que considerar si los niños pueden establecer relaciones con las fracciones decimales, como por ejemplo que 10 centavos = 1/10 de $ 1 o $ 0,10; 1 centavo = 1/100 de $ 1 o $ 0,01.

Para continuar con el tratamiento de las expresiones decimales, más allá de los décimos y centésimos, será necesario incluir situaciones que involucren mediciones o cálculos de medidas que habiliten la introducción de nuevas particiones de la unidad, cada vez más pequeñas. Si solo mantenemos el trabajo con dinero no será posible, por ejemplo, advertir que la noción de siguiente, propia de los números naturales, no puede extenderse a los racionales, ya que si bien entre $ 2,99 y $ 3 no hay otro precio posible, entre 2,99 y 3 hay infinitos números racionales.

Plantear situaciones para comparar cantidades y números

Para que los chicos puedan comparar cantidades y números expresados con fracciones o decimales, es necesario, desde el enfoque que planteamos, que estos números sean utilizados inicialmente como un recurso para resolver problemas. Pero, avanzar en la comprensión de la noción de número racional requiere, además de usar expresiones decimales y fracciones para representar resultados de mediciones o repartos, establecer relaciones de orden entre números y precisar cuáles son los criterios que permiten determinar este orden cuando se comparan distintos tipos de escrituras. En este caso, se trata de relaciones entre fracciones, entre expresiones decimales y con el entero, en particular de comparaciones, ya que estamos haciendo referencia a expresiones como *1/2 es igual que 2 de 1/4*, en la que se comparan números. O bien: *3 de 25 centavos es menos que 1 peso*, en la que se comparan cantidades.

---

[17] **Recomendación de lectura:** véanse los documentos *Acerca de los números decimales: una secuencia posible. Aportes para el desarrollo curricular* (2001), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación y *Matemática. Fracciones y números decimales. 5° grado. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.

Para los niños, que intentan conservar y extender los conocimientos adquiridos en relación con los números naturales, no es fácil advertir que 0,0867 no es mayor que 1, 2, aunque tiene más cifras, o que 4/5 no es el siguiente de 3/5, y esta situación se complica aun más cuando se trata de comparar 1,5 y 1/5.

En 4° año/grado, se partió de situaciones de **comparación de cantidades** en el contexto del dinero y de las unidades de medida, por ejemplo *Ayer Martín compró 3/4 kg de pan y hoy compró 3 bolsitas de medio kilo. ¿Cuándo compró más pan?* O bien: *Marisa y Rocío hicieron una colecta para comprar juguitos. Marisa logró juntar 5 monedas de 50 centavos y Rocío juntó 12 monedas de 10 centavos. ¿Cuál de las dos juntó más dinero?* La familiaridad de los alumnos con contextos cotidianos les permite resolver con procedimientos propios y, de esta manera, se van explicitando las primeras relaciones entre cantidades (2/4 kg = 1/2 kg; 1kg = 4/4 kg; 10 de 10 centavos es 1 peso; 4 de 25 centavos es un peso) y se formulan los primeros argumentos ligados muy fuertemente a los conocimientos que aporta el contexto.

Cabe aclarar aquí que el repertorio de expresiones fraccionarias que se usa efectivamente en contextos cotidianos es muy acotado y que muchas veces, al intentar ampliar este repertorio, manteniendo la “familiaridad” con el entorno, se fuerzan enunciados que no resultan verosímiles y que, por lo tanto, no nos permiten usar el contexto como apoyo para elaborar un procedimiento o evaluar la razonabilidad de la respuesta que se obtiene. Aunque es frecuente encontrar enunciados de este tipo en muchos libros de texto, resulta importante que estemos atentos a los problemas en los que el uso de las fracciones solo tiene sentido en el ámbito escolar, como cuando se indica, por ejemplo, comparar las partes que se pintaron de una pared en distintos días.

Así, se hace necesario que vayamos llevando paulatinamente a los niños y niñas a establecer relaciones numéricas. Para que este trabajo resulte para ellos un verdadero proceso de construcción, es necesario posibilitarles, desde las situaciones de enseñanza, la recuperación de las herramientas utilizadas en los primeros problemas para la resolución de estos nuevos desafíos. Cuando hablamos de recuperar estas herramientas propias de los alumnos nos referimos al planteo de situaciones fuera de los contextos usuales, pero que requieran el uso de las herramientas construidas al resolver problemas en ellos.

En este sentido, para dar oportunidad de **comparar números**, es posible plantear consignas como las siguientes:

• Usando lo que sabés acerca del dinero, explicá cada una de las siguientes relaciones:

a) $1{,}5 > 1{,}05$ $0{,}75 < 0{,}90$
$0{,}1 > 0{,}01$ $1{,}25 < 1{,}5$

b) $0{,}1 : 10 = 0{,}01$ $0{,}01 \times 10 = 0{,}1$
$0{,}01 = \frac{1}{100}$

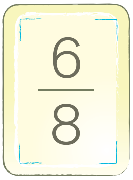
En la actividad a), se propone que los chicos apelen al conocimiento de relaciones entre cantidades que estaban utilizando, para explicar relaciones entre números (decimales y el entero, decimales entre sí). Algunos procedimientos posibles podrían ser: *1,5 es 1 peso con 50 centavos, así que es más que 1,05, que es 1 peso y una monedita de 5 centavos.* O, por ejemplo, *0,1 es una moneda de 10 centavos y 0,01 vendría a ser como una monedita de 1 centavo.* Realizar esta explicación es lo que pone a los alumnos en situación de buscar la relación entre lo que conocen dentro de un contexto y venían haciendo para resolver los problemas planteados, con la resolución de estos ejercicios.

En la actividad b), esperamos poner en discusión la relación que existe entre la escritura decimal y la multiplicación y la división por 10, 100, etc. Una vez más, aquí no estamos entendiendo la enseñanza como "mostrar el procedimiento" para comparar decimales, sino que esperamos que los alumnos puedan llegar a establecer una regla a partir de la reflexión acerca de sus procedimientos y no que la memoricen luego de haber sido mostrada por el docente. De esta manera, la técnica puede adquirir sentido y es posible tener recursos de control sobre ella.

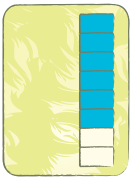
Otro tipo de actividades que también apuntan a ir haciendo avanzar los procedimientos de comparación de los alumnos son, por ejemplo, aquellas donde se propone elaborar criterios de comparación entre números fraccionarios o decimales, usarlos, probarlos, contrastarlos con otros[18]. En 5° año/grado, estos criterios podrían surgir como conclusiones del debate posterior sobre el siguiente juego:

"Guerra de fracciones": comparar fracciones.
Materiales: cada grupo debe tener un mazo de cartas. En ellas, el anverso tendrá una fracción y el reverso una representación de la misma.

[18] **Recomendación de lectura:** para analizar las propuestas, véase el apartado "Plantear situaciones para comparar cantidades y números", en "Para leer y escribir fracciones y expresiones decimales" de *Cuadernos para el aula: Matemática 4.*



Anverso


Reverso

La composición del mazo de cartas dependerá del repertorio de fracciones que se esté trabajando. Una posibilidad es usar las cartas del material recortable de Juegos en Matemática EGB 2[19] y otra es fabricarlas con tarjetas y, por ejemplo, incluir las cartas de medios, cuartos y octavos mayores y menores que la unidad:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4} - \frac{5}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{3}{8} -$$
$$\frac{4}{8} - \frac{5}{8} - \frac{6}{8} - \frac{7}{8} - \frac{8}{8} - \frac{9}{8} - \frac{10}{8} - 1\frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - 1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{8} - 1\frac{2}{8} - 2$$

Otra posibilidad sería usar medios, tercios y sextos.
Organización de la clase: se forman grupos de 4 alumnos.
Desarrollo: se mezclan y se reparten todas las cartas con la representación numérica hacia arriba, formando 4 pilas iguales, una para cada jugador. Los 4 colocan a la vez en el centro la carta superior de su pila. El que tiene la carta de mayor valor se lleva las tres o cuatro cartas y las coloca aparte, en otra pila personal. Las cartas llevadas no se vuelven a usar. Si algún jugador duda, puede dar vuelta las cartas y usar la comparación de los cuadrados pintados en el reverso. Si hay empate, se juega otra vuelta y el ganador se lleva las ocho cartas. Gana quien al final del juego tiene más cartas.

Después de jugar, los alumnos podrán explicitar qué argumentos usaron para comparar las cartas con representaciones numéricas, sin recurrir a la comparación de los reversos de las cartas.

Siguiendo con este trabajo, propondremos luego actividades para la exploración y explicitación de los límites de utilización de diferentes criterios de comparación.

[19] Estas cartas están disponibles en *Juegos en Matemática EGB 2. El juego un recurso para aprender.* (Material recortable para alumnos). En la pág.17 del Material para el docente, pueden encontrarse otras propuestas que permiten trabajar en el mismo sentido.

Llamamos aquí *exploración* al trabajo que el alumno hace sobre la situación problemática cuando aún no tiene la herramienta experta para resolverla, pero puede utilizar otros conocimientos matemáticos para intentarlo. Esta exploración se va dando en la resolución de las diferentes situaciones que sobre un mismo contenido va planteando el docente; la resolución de esos problemas les da a los alumnos información acerca de los objetos matemáticos que están usando, ¿qué son?, ¿cuándo se usan?, ¿cómo se usan? Sin embargo, para hacer avanzar a los alumnos desde esta exploración hacia una sistematización del contenido en cuestión es necesario ponerlos en posición de explicitar lo que han ido aprendiendo del objeto matemático de estudio a lo largo de las resoluciones realizadas.

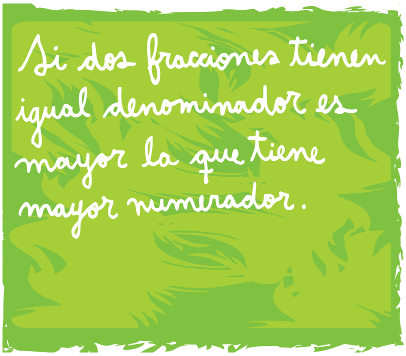
Una actividad que propone explorar y explicitar los límites de utilización de diferentes criterios de comparación es analizar un listado de estos criterios con la siguiente consigna[20]:

• Las afirmaciones siguientes fueron utilizadas por algunos alumnos para comparar fracciones. Leelas con atención.

Primero se comparan las fracciones con el entero, una puede ser mayor y otra menor. Resulta mayor la que es mayor que el entero.

Si las 2 son menores que el entero, se puede ver si alguna es mayor que $\frac{1}{2}$ y la otra es menor, o si alguna de las 2 es equivalente a $\frac{1}{2}$.

[20] **Recomendación de lectura:** actividades como la aquí planteada aparecen en *Matemática. Fracciones y números decimales. 5° grado. Apuntes para la enseñanza* (2005), Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.



• Analizá cada una de las afirmaciones anteriores y respondé si son válidas para comparar alguno de los pares de fracciones que se presentan a continuación. Justificá tu respuesta.

$\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{6}$	$\frac{7}{10}$ y $\frac{7}{4}$	$\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$
$\frac{12}{5}$ y $\frac{18}{5}$	$\frac{17}{22}$ y 1	$\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{12}$

Para evaluar si es posible utilizar o no alguno de los criterios que se presentan aquí es necesario, en primera instancia, interpretarlos, lo que implica un avance sobre lo requerido en las tareas realizadas anteriormente, ya que aquí hay que entender un criterio que elaboró otra persona, hay que ser capaz de interpretar una técnica explicada coloquialmente para poder opinar sobre su validez. Por lo tanto, convendrá prever las discusiones acerca de qué entendieron los alumnos, qué quiere decir o cómo se usa cada uno de los criterios. Si, en otras ocasiones, ha sido el docente el que interpretó una técnica y la explicó, la tarea de discusión colectiva puede ser novedosa para muchos alumnos.

El interés de esta actividad reside en responder a preguntas como las siguientes: *¿Para qué pares de fracciones se puede aplicar el primer criterio?, ¿por qué no se lo puede aplicar, por ejemplo, al par 2/5 y 2/6?* De este modo, los chicos pueden explicitar los límites de utilización de los criterios. Las conclusiones de estas discusiones se pueden registrar en las carpetas o en los cuadernos. Los criterios que se proponen para analizar pueden haber surgido en clase, como en el ejemplo del juego de la guerra de fracciones, o no. Podemos proponer otros que no se les hayan ocurrido a los alumnos o que usan incorrectamente. Por ejemplo, si los alumnos únicamente evalúan si la fracción es más grande o más chica que el entero para poder comparar (usan el primer criterio), es un buen momento para presentar un criterio como el segundo de esta actividad, donde se toman los medios como punto de referencia.

Cuando ya se ha discutido acerca de que no todos los criterios sirven para cualquier número, es bueno que volvamos a enfrentar a los alumnos con la tarea de formular un criterio de comparación, presentando nuevos desafíos:

> • Los siguientes son pares de fracciones que no se corresponden con ninguno de los criterios que se vieron hasta ahora. Discutí con tu grupo y elaborá un criterio que sirva para estos pares de fracciones. Fundamentá tu respuesta.
>
> $\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$ $\frac{17}{22}$ y 1
>
> • Federico realizó las siguientes comparaciones entre decimales:
> 3,12 es mayor que 3,7 4,50 es mayor que 4,6
> ¿Cuál creés que pudo haber sido el criterio que utilizó para realizar las comparaciones?

En el primer problema, se vuelve sobre los criterios para comparar fracciones. Aunque es fácil que los alumnos tengan en cuenta que *si se divide el entero en mayor cantidad de pedacitos, los pedacitos son cada vez más chicos,* para utilizar esto como criterio de comparación, es necesario tener dos fracciones que tengan igual numerador, ya que *si los pedacitos son chiquitos, pero son muchos, puede ser una fracción más grande que otra que tenga pedazos más grandes, pero pocos.*

En el segundo problema, se trata de descubrir un criterio utilizado por otro. Este criterio está elegido porque suele ser utilizado por los chicos al comparar expresiones decimales. Es frecuente que los alumnos intenten extender a las fracciones y decimales el uso de propiedades aprendidas en el trabajo con números naturales, lo que origina dificultades a la hora de comparar racionales. Para muchos alumnos, *3,12 es mayor que 3,7 porque 12 es mayor que 7*. Situar a los alumnos en posición de explicitar estos criterios y analizarlos, permite objetivar el error para comprenderlo y revisarlo, dando lugar a un nuevo conocimiento acerca de cómo juegan las posiciones de los números después de la coma decimal. Algo interesante de esta actividad es que en la pregunta no se evidencia un juicio de valor acerca del criterio, no se dice si es un criterio válido o no, por lo tanto se deja abierta la posibilidad de que muchos alumnos identifiquen y expliciten el criterio, totalmente convencidos de que es eficaz.

Hasta aquí, las actividades que mostramos implican la comparación entre fracciones y el entero o la comparación de fracciones entre sí y entre decimales y el entero o decimales entre sí; sin embargo, un avance que se propone desde los NAP para este año es trabajar las relaciones que se pueden dar entre ambos tipos de representaciones. Una posibilidad para propiciar este tipo de trabajo, a la vez que seguimos trabajando la ***necesidad*** de dar argumentos[21] para fundamentar las comparaciones realizadas, es jugar a “Descubriendo equivalentes”.

“Descubriendo equivalentes”: comparar escrituras fraccionarias y decimales.
Materiales: un juego formado por 42 tarjetas con distintas escrituras numéricas, como las siguientes[22], sin incluir las tarjetas que no responden a los conocimientos que los niños manejan, como por ejemplo las de porcentaje:

1	$1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\times 2$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$	100%	$\frac{10}{10}$
0,5 + 0,5	1,5 + 0,5	50%	$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{4}\times 2$	$\frac{50}{100}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}-1$	25%

Organización de la clase: en grupos de 4 integrantes.
Desarrollo: se colocan las tarjetas boca abajo, con una disposición rectangular. Por turno, cada jugador levanta dos, de manera que las vean los cuatro integrantes del grupo. Si quien las levantó identifica que las dos tarjetas corresponden a distintas representaciones de un mismo número racional, lee en voz alta ambas tarjetas, y si todos acuerdan, se las lleva y se anota para sí ese número como puntaje. Si alguien no acuerda, se discute en el grupo para decidir quién tiene razón.
Si quien levantó las fichas decide que estas no corresponden a representaciones del mismo número, las vuelve a colocar en el mismo lugar, boca abajo.
En ambos casos, le toca el turno al compañero siguiente.
Cuando no quedan más tarjetas sobre la mesa, se suman los puntos que acumuló cada uno; después de controlar y acordar con el resultado, gana quien haya logrado la mayor suma.

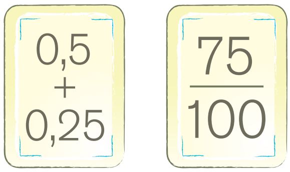
---

[21] **Recomendación de lectura:** véase el apartado “La gestión de la clase” en “Enseñar Matemática en el Segundo Ciclo” de este *Cuaderno*, en lo referido a las argumentaciones de los alumnos.

[22] **Recomendación de lectura:** véanse las propuestas de juegos sugeridas en la página 20 de Chemello, G. (coord.), Hanfling, M. y Machiunas, V. (2001), *El juego como recurso para aprender. Juegos en Matemática EGB 2, Material para docentes.* Buenos Aires, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. En el Material para alumnos se pueden encontrar las tarjetas aquí propuestas diseñadas para ser recortadas.

Decimos que este es un juego que exige la elaboración de argumentos por parte de los alumnos sobre la validez o no de una comparación entre expresiones decimales, naturales y fraccionarias, ya que es necesario llegar a un acuerdo acerca de la equivalencia de las cartas de cada jugador para que sea posible levantarlas. Es fundamental aquí que remarquemos la importancia de argumentar con fundamentos que puedan convencer a los compañeros, ya que ese es el criterio que se utilizará para poder levantar cada par de cartas.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que el aprendizaje no termina con el juego de los alumnos, sino que tienen que organizarse actividades de reflexión sobre lo que se hizo para favorecer determinados aprendizajes. Plantear partidas simuladas nos da una muy buena oportunidad para analizar procedimientos que se aprecien como interesantes por las características de las relaciones que se necesitarán establecer y que no necesariamente han aparecido mientras se realizó el juego. Por ejemplo:



• Marisa quería levantar 0,5 + 0,25 y $\frac{75}{100}$ y Rita dijo que no podía, porque $\frac{75}{100}$ es igual a 0,75 y la suma de los decimales da 0,30. ¿Quién tiene razón?

Esta partida simulada pone en discusión algunos temas interesantes que se pueden presentar al comparar fracciones y decimales. Un error muy común en los alumnos a la hora de sumar decimales es que interpretan el 5 décimos con el mismo valor que el 5 centésimos, porque sigue jugando aquí la idea que conocen de números naturales: *Si es 5, entonces es menor que 25, sea cual fuere la posición que ocupe.* El hecho de que los ceros a la izquierda de una cifra intervengan en la atribución del valor posicional es algo nuevo que les pasa a estos números y no ocurría con los otros conocidos, por eso es un concepto difícil de construir. En este sentido, es bueno tomar esta idea en diferentes momentos del aprendizaje, y recurrir a un contexto en el cual apoyarse con actividades como las que planteamos más arriba. Las distintas discusiones permitirán afianzar el conocimiento de algunos alumnos y abrir el tema para otros niños o niñas que en un momento anterior no hayan podido entender la cuestión y que ahora hayan adquirido mejores recursos como para posicionarse diferente frente al mismo debate.

Otro tema interesante que pone en evidencia esta situación es la equivalencia entre 75/100 y 0,75 que para algunos alumnos puede ser muy obvia, pero para otros no tanto y es fundamental ir cuestionando y socializando estas certezas.

También podría plantearse aquí que 0,5 + 0,75 = 0,50 + 0,75, argumentando que 5 décimos equivale a 50 centésimos. Esto permitiría volver sobre la estructura decimal del sistema de numeración señalando que diez centésimos forman un décimo, diez décimos una unidad, tal como ocurre con las unidades, las decenas, las centenas, etc., extendiendo la regla de agrupamiento del sistema ya conocida para los naturales.

Para avanzar en el uso de operaciones con números naturales al resolver problemas

Si bien es cierto que la construcción de significado de las cuatro operaciones básicas con números naturales (suma, resta, multiplicación y división) es un aspecto que se atiende durante todo el Primer Ciclo[23], es importante no abandonar esta mirada y avanzar en la presentación de nuevos problemas. En estas situaciones, es importante hacer hincapié en el análisis del tipo de cálculo a realizar, exacto o aproximado, a partir de la reflexión sobre la pregunta y de la forma de calcular según cuáles sean los números que intervienen en el problema. Asimismo, es fundamental tener en cuenta, para controlar los procedimientos y evaluar la razonabilidad del resultado, cuáles son las cantidades involucradas.

Combinar las distintas operaciones, argumentar acerca de un procedimiento de resolución, reconocer que diferentes operaciones pueden dar respuesta a la misma cuestión, producir enunciados que respondan a los diferentes significados que tiene cada operación, interpretar la información presentada en textos, tablas y gráficos estadísticos, analizar el tipo de cálculo requerido (exacto, aproximado, mental, escrito, con calculadora) y evaluar la razonabilidad del resultado obtenido serán algunas de las competencias que se esperan lograr promediando el segundo ciclo.

En este año, además, se propondrá, en el campo de los problemas multiplicativos, avanzar con aquellos que conducen a la construcción del concepto de proporcionalidad y aquellos que llevan a sistematizar relaciones como las de múltiplo y divisor.

[23] **Recomendación de lectura:** las propuestas sobre este aspecto se pueden consultar en los apartados "Para operar al resolver problemas con distintos procedimientos" en el Eje "Número y Operaciones" y "Los significados", en "Enseñar Matemática en el Primer Ciclo" de *Cuadernos para el aula: Matemática 1, 2* y *3*, respectivamente, y en el apartado "Para avanzar en el uso de las operaciones con números naturales al resolver problemas" en el Eje "Número y Operaciones", de *Cuadernos para el aula: Matemática 4.*

Plantear situaciones para operar con distintos significados

En el trabajo desplegado desde el comienzo de la escolaridad, los chicos fueron descubriendo que cada una de las operaciones les permite resolver una variedad de situaciones, lo que da lugar a asociarlas a diferentes significados[24] y también a descubrir que una misma situación se puede resolver con distintas operaciones, es decir que hay más de un procedimiento válido para resolverla.

En 5º año/grado, se trata de continuar lo planteado en años anteriores, incluyendo nuevos contextos acordes con los intereses y posibilidades de los niños, cuidando que al incrementar la cantidad de cifras no se presenten situaciones no verosímiles. Se incluyen también problemas que requieren varios pasos combinando distintas operaciones o que tienen varias preguntas para que los chicos seleccionen entre la información ofrecida, los datos que les permitan llegar a cada respuesta. Por otro lado, podremos presentar las situaciones en distintos portadores: enunciados, tablas, ilustraciones.

Por tanto, en relación con los problemas que se pueden resolver con suma y resta, los chicos seguirán resolviendo aquellos donde deban unir o separar dos cantidades, buscar la diferencia entre ellas, encontrar el complemento de una respecto de otra, agregar o quitar una cantidad a otra y componer relaciones, es decir problemas en los que se producen dos transformaciones.

En cuanto a los problemas que se resuelven con multiplicaciones y divisiones, continuaremos trabajando con los que involucran proporcionalidad simple, incluyendo casos de organización rectangular de sus elementos, y avanzaremos en otros más complejos con propuestas como las que se desarrollan en el próximo apartado.

Algunos problemas interesantes de varios pasos y varias operaciones son los siguientes:

> 1. Pedro, el cajero del teatro "Español", le entrega al dueño esta tabla con la cantidad de entradas vendidas cada día para el control de lo recaudado en la semana. Las entradas cuestan \$ 25 para mayores y \$ 12 para menores.
>
> a) Pedro informa que solo un día se agotaron las localidades. Indicá qué día de la semana el teatro estuvo completo.

[24] **Recomendación de lectura:** para ampliar el análisis de los distintos significados de las operaciones, véase el apartado "Para operar al resolver problemas con distintos procedimientos", en el Eje "Número y Operaciones" de *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y *4.*

b) El dueño sostiene que ese día es el que más dinero se recaudó. ¿Estás de acuerdo?
c) ¿Cuánto se juntó el miércoles?, ¿y el domingo?
d) ¿Qué días de la semana se recaudaron menos de $ 4000?

TEATRO **ESPAÑOL**

	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
Mayores	140	127	143	145	238
Menores	140	47	26	255	113

2. Para el aniversario de casados, María y José decidieron comprar en cuotas la heladera y el microondas que ofrece este negocio de electrodomésticos.

a) ¿Cuánto dinero ahorran si lo compran al contado?
b) ¿Cuánto tendrán que pagar el primer mes?, ¿y el último?

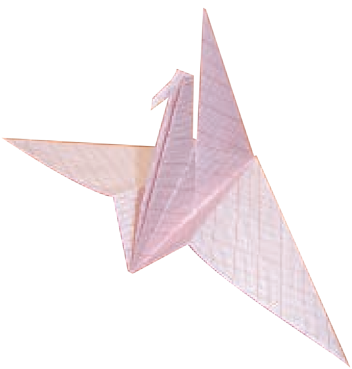
3. En una reconocida bodega de la provincia de San Juan, se han envasado 4000 botellas de una variedad muy especial. Para venderlas como regalos empresariales, quieren fabricar cajas en las que puedan colocar 12 botellas.

a) Para hacer el pedido exacto de cajas, ¿cuántas cajas necesitan?
b) Si ante el éxito de la propuesta deciden envasar otras 1300 botellas, ¿cuántas cajas más necesitarían?
c) Una empleada dice que tuvo que pedir 35 bolsas de corchos para todas esas botellas, pues en cada bolsa entra lo que se denomina una *gruesa*, es decir 144 corchos. ¿Fue adecuado el pedido que hizo la empleada?
d) Daniel dice que para envasar las 4000 botellas alcanza con 333 cajas, y Cacho sostiene que necesitan una más. ¿Con quién estás de acuerdo?
e) Un mayorista de cada una de las 24 provincias del país serán los vendedores exclusivos del artículo vitivinícola. Si el dueño de la bodega decide ser equitativo y entregar la misma cantidad a cada provincia, ¿cuántas cajas deberá entregar a cada mayorista?

4. Se llenaron 24 cajones con 64 manzanas cada uno. Si cada manzana pesa entre 150 y 200 gramos:
a) ¿podrías levantar uno de estos cajones?
b) Juan dice que un cajón pesa cerca de 100 kg y es imposible levantarlo. ¿Estás de acuerdo?, ¿cuál es el peso aproximado del cajón?

5. Un obrero gana por mes entre $ 450 y $ 800. Si ahorra su sueldo completo, ¿cuánto tardará como máximo en completar $ 8500?, ¿y como mínimo?

6. Como souvenir de su cumpleaños, Carla llenó una bolsa con grullas de papel y le alcanzó para todos sus 15 amigos. Si quería repartirlas dándole a cada uno por lo menos 10 grullas, ¿cuántas grullas tenía Carla como mínimo?



Para responder a cada una de las preguntas del problema 1, los chicos pueden hacer uso de distintos procedimientos, así como también de distintos tipos de cálculo. Por ejemplo, para discutir respecto de los distintos procedimientos, se puede analizar cómo resolvieron la pregunta c), ya que para saber cuánto se recaudó el miércoles, es posible sumar ambos valores de entrada y luego multiplicar el resultado por 140 o bien averiguar cuánto se recaudó con cada tipo de entrada y sumar después. Para responder la pregunta d), alcanza con hacer cálculos aproximados a diferencia de las otras, en las que se requieren resultados exactos. Por otra parte, la presentación en una tabla supone que los alumnos reconozcan la forma particular en la que está organizada la información para poder seleccionar los datos en función de la pregunta.

En cuanto a los problemas 2 y 3, la operación que resuelve con más eficacia es la división, pero, como puede analizarse, se trata de presentar preguntas que involucran tanto repartos como particiones para consolidar estos significados. En el problema 3, la pregunta c) promueve también el análisis del resto, ya que es necesario evaluar lo que sobra en cada una de las divisiones para acertar con el número de cajas.

En el problema 4, no es necesario dar un resultado exacto. En este problema no solo hay que operar, sino que también aparecen condiciones de máxima (si todas pesan 200 g) y de mínima (si pesan 150 g).

Los problemas 5 y 6 dan lugar a retomar el trabajo de considerar condiciones de máxima y de mínima y tomar decisiones en cuanto a la aproximación más conveniente.

En cuanto a los problemas de **combinatoria**, es decir aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones, presentaremos problemas con dos y tres variables. En el caso de los primeros, ya trabajados en años anteriores, los retomaremos con mayor cantidad de elementos de cada tipo para que, al tener que combinar "todos con todos", los chicos reconozcan en la multiplicación una herramienta eficaz que evita el trabajo de enumerar todos los pares[25]. Como problemas donde intervienen tres variables podemos presentar, por ejemplo:

- En la fiesta de 15 años de Mariela, los invitados podían elegir entre 2 tipos de entradas, 3 platos principales y 2 tipos de postres. El hermanito, Nahuel, dijo: *Así cada invitado pide un menú diferente*; ¿puede ser cierto lo que dijo?

[25] **Recomendación de lectura:** para un análisis más exhaustivo de los distintos procedimientos que pueden desarrollar los niños, se puede consultar el apartado "Plantear situaciones para multiplicar y dividir", en el Eje "Número y Operaciones" de *Cuadernos para el aula: Matemática 3.*

• María está preparando centros de mesa, todos diferentes, combinando una flor, una vela y una base, y tiene flores de 3 tipos distintos, 5 velas de diferentes colores y bases de distintas formas. Si necesita armar 30 centros de mesa, ¿cuántas formas de base necesita?

En el primer problema, cada chico tendrá que elegir cómo representar cada tipo de entrada, plato y postre para determinar que lo que afirma Nahuel solo es posible si los invitados eran 12. En el segundo problema, tendrán que buscar el número de bases resolviendo primero cuántas combinaciones de velas y flores puede hacer. En ambos casos, los procedimientos podrán variar según la experiencia previa en la resolución de problemas de combinatoria. Algunos podrán hallar el resultado multiplicando y otros podrán hacer algún esquema o diagrama en el que representen los elementos.

Plantear situaciones para analizar relaciones de proporcionalidad

La construcción del concepto de proporcionalidad demanda varios años de la escolaridad. Desde el Primer Ciclo, los chicos han resuelto situaciones de proporcionalidad simple al multiplicar o dividir, tales como *Si 1 paquete trae 4 figuritas, ¿cuánto traen 8 paquetes?* o bien: *Si 5 chocolates iguales cuestan $ 30, ¿cuánto cuesta cada uno?* También han usado las relaciones involucradas en la proporcionalidad de manera implícita cuando completan tablas y calculan el doble de una cantidad porque corresponde al doble de otra o suman las cantidades correspondientes a otras dos para encontrar el valor que corresponde a la suma. En 5º año/grado habrá que avanzar planteando problemas en los que se relacionan magnitudes directamente proporcionales, donde no se da el valor unitario.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que en 5º año/grado se pueden incorporar nuevas representaciones de las relaciones de proporcionalidad a las ya conocidas de enunciado textual y de tabla; se trata de algunos gráficos estadísticos de barras o pictogramas.

Es habitual que, al inicio del trabajo de proporcionalidad, todas las situaciones que se presentan sean directamente proporcionales. En el trabajo matemático con una noción es necesario conocer en qué casos es posible usarla para resolver y también conocer sus límites, es decir en qué problemas no es posible usar la noción. En 5º año/grado, es necesario analizar los datos de distintas situaciones para ver si presentan o no una regularidad que cumpla con las propiedades de la **proporcionalidad directa**.

Entre los contextos que nos permiten proponer este trabajo, podemos considerar, entre otros, el cálculo de cantidades en una receta, el costo o la capacidad de distintos envases o el análisis de distintas ofertas. También es posible retomar problemas resueltos anteriormente, por ejemplo lo pagado por mes en el problema de las cuotas, la cantidad de cajas de vino y la cantidad de botellas, y explicitar si las relaciones entre las cantidades son o no de proporcionalidad.

Algunos ejemplos de problemas son los siguientes.

• Indicá si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:
a) Para hacer una torta de manzana necesito 3 huevos, para hacer 3 tortas de manzana necesitaré el triple.
b) Para embaldosar dos aulas iguales, necesito 238 baldosas, para embaldosar solo una, necesito 119.
c) Si al año Ema pesa 12 kg, a los 10 años pesará 120 kg.
d) Si con 24 baldosones cubro un piso de 3 m por 2 m, con 48 baldosones cubro un piso de 6 m por 4 m.

Al discutir sobre cada una de las opciones, los niños descubrirán que hay situaciones en las que al doble le corresponde el doble, pero que en otras situaciones estas relaciones no se sostienen, ya sea porque, como en la opción c), no se puede saber el peso de Ema a los 10 años y no es razonable que una niña de esa edad tenga ese peso o porque, como en la opción d) duplicar el número de baldosas no alcanza para cubrir un patio si se duplican ambas variables, largo y ancho.
Las actividades en las que hay que cambiar la forma de representación de una relación de proporcionalidad, también aportan a la construcción de sentido[26]. Por ejemplo, se puede presentar la siguiente situación, en la que se incluyen algunas expresiones decimales en el contexto del dinero, que es conocido por los niños y que permite, eventualmente, operar con naturales expresando los precios en centavos.

• Leé este texto y luego contestá a las preguntas.
En el parque acaban de instalar camas elásticas para saltar. Un cartel dice: *$ 2 LOS 10 MINUTOS.* Patricia tiene solo $1, mira al boletero y con su mejor sonrisa le dice:
–¿Puedo pagarle $ 1 y saltar 5 minutos? Quiero practicar la vuelta carnero en el aire.
–Está bien, nena –contesta el boletero–, hoy me agarraste bueno.

[26] Tal como se plantea en el apartado “Para trabajar con la información”, en el Eje “Número y Operaciones” de este *Cuaderno*, también será posible pedirles a los alumnos, cuando sea conveniente, que armen un gráfico de barras a partir de la información de una tabla o bien un pictograma.

Al escuchar este diálogo, Carlos se anima y le dice:
–Yo sólo tengo 40 centavos, ¿puedo pagárselos y saltar el tiempo que me corresponde?
–Bueno, pero ni un segundo más, le responde el boletero.
Ambos se zambullen en las camas elásticas y comienzan a saltar.

a) ¿Durante cuánto tiempo pueden saltar juntos Patricia y Carlos?
b) Diseñá una tabla para pegar en la boletería, donde se muestre cuánto tiempo se puede saltar con 80 centavos, con $ 4, con $ 1,20 y con $ 3. Luego incluí lo que se tiene que cobrar si alguien quiere saltar 1 minuto, 45 minutos o una hora.

La tabla resultante construida a partir de operaciones del campo multiplicativo, vinculando medidas de tiempo y precios, es una representación de la relación que facilita la identificación de relaciones numéricas.

Precio en $	2	1	0,40	0,80	3	0,20	9	12
Tiempo en min	10	5	2	4	15	1	45	60

Los chicos podrán analizar, en todos los casos, que si se duplica el dinero, se duplica la cantidad de tiempo que se puede saltar; si se triplica el dinero, se triplica el tiempo, si se reduce el dinero a la mitad, se reduce el tiempo a la mitad, es decir que estas relaciones se dan entre las cantidades de las dos magnitudes y que pueden generalizarse en la siguiente afirmación: ***Si una cantidad se multiplica o se divide por un número, lo mismo ocurre con la cantidad correspondiente.*** De igual forma, si sumamos, por ejemplo, $ 2 y $ 1, tendremos un pago de $ 3, y si sumamos las cantidades correspondientes de la otra magnitud, 10 min y 5 min, obtenemos la cantidad correspondiente a $ 3 que son 15 min, lo que puede generalizarse en la afirmación: ***Si dos cantidades se suman entre sí, al resultado le corresponde la suma de las cantidades correspondientes.***

Si no surgiera espontáneamente, sería interesante preguntar *¿Esta última conclusión también vale para la resta de cantidades correspondientes?* Por ejemplo, para saber *cuánto pagaría si quisiera saltar sólo 8 minutos, ¿podría restar algunos datos de la tabla?* Observando la tabla, encontramos que 10 minutos cuestan $ 2 y que 2 minutos cuestan 40 centavos, por lo tanto restando entre ambas cantidades, obtenemos que para 8 minutos (10 – 2) corresponde pagar $ 1,60 (2 – 0,40). Una de las formas que nos permiten reconocer si este procedimiento es correcto, consiste en buscar el resultado usando la propiedad de la suma y elegir valores que sumados den 8 minutos (5 + 2 + 1).

Volviendo a la tabla, también es posible que los chicos descubran, y si así no lo hicieran lo podríamos señalar, que todos los valores de tiempo resultan de *multiplicar por 5 el valor que corresponde al dinero*. De esta manera, podrán comenzar a reflexionar, en el contexto, sobre la forma de encontrar el valor de una cantidad a partir de la otra. Será este el momento de volver sobre las relaciones no proporcionales ya analizadas para descubrir que *cuando las cantidades no se relacionan de forma directamente proporcional, no podemos multiplicar por un mismo número para calcular una cantidad a partir de otra.*

Para avanzar en las formas de calcular con números naturales

En los *Cuadernos* anteriores, venimos planteando que es necesario pensar la enseñanza del cálculo en dos sentidos. Por una parte, los problemas donde las operaciones adquieren distintos significados presentan una oportunidad para resolver cálculos exactos o aproximados según lo requiere la situación y, en ese caso, los cálculos aparecen como una "herramienta útil". Por otra parte, los cálculos también pueden ser "objetos de estudio" en sí mismos cuando consideramos los distintos procedimientos producidos por los mismos chicos u otros que podemos introducir, para compararlos y discutir si son o no válidos o si pueden simplificarse, justificando las decisiones que se tomen al respecto. En este apartado, nos ocuparemos del cálculo en este segundo sentido.

Cuando los chicos llegan a 5º año/grado, en general, han podido discutir la conveniencia de un procedimiento u otro según los números involucrados, es decir pensando cuál es el modo más conveniente de hacerlo, en lugar de proceder automáticamente con un algoritmo igual para todos los cálculos. Por ejemplo, si deben calcular 1000 + 50, 200 x 300 o 15.000 : 50, podrán obtener el resultado mentalmente, sin escribir una cuenta. También, habrán adquirido un repertorio memorizado de sumas, restas y multiplicaciones que les permitirán calcular con mayor seguridad.

Asimismo, al comparar distintos procedimientos de cálculo con los algoritmos usuales de suma, resta, y multiplicación por una y dos cifras, y el de división por una y dos cifras por aproximaciones sucesivas, habrán considerado cuáles son las propiedades de las operaciones que permiten justificar cada paso y cuáles son más económicos. Durante el Segundo Ciclo, los algoritmos van avanzando hacia formas cada vez más expertas y eficaces, siguiendo con un proceso de producción y análisis de distintos procedimientos originales de los mismos alumnos que, sin abandonar necesariamente los primeros, reconocen en estos últimos una posibilidad de agilizar las estrategias. En 5º año/grado deberán afianzar los conocimientos adquiridos:

- ampliando el repertorio de sumas y productos para calcular mentalmente,
- extendiendo a números un poco más grandes los algoritmos conocidos y controlando sus resultados mediante cálculos aproximados,
- comparando procedimientos, argumentando sobre su validez en base a sus conocimientos sobre las propiedades y la interpretación que hacen de los números y analizando argumentos de otros y
- explorando nuevas relaciones entre números y sistematizando otras conocidas.

Plantear situaciones para avanzar en el cálculo

En relación con la ampliación del repertorio de **cálculos memorizados**, es muy efectivo plantear situaciones de juego, pues éstas dan lugar a la aparición de relaciones matemáticas que luego pueden ser objeto de reflexión y sistematización. Por otra parte, si bien inicialmente jugar es un tipo de trabajo realizable en el aula, luego podrá formar parte de las tareas que los chicos desarrollarán fuera de la escuela, cuando el docente lo considere necesario.

Presentamos aquí un juego cuyo objetivo es la memorización de productos y cocientes de la tabla pitagórica que muchas veces aún no se ha logrado en este año.

> **“Descubrir la carta”:** cálculo mental de productos y cocientes.
> **Materiales:** un mazo de cartas españolas hasta el 10 por grupo y una hoja para anotar para cada chico.
> **Organización de la clase:** en grupos de tres integrantes, y uno de ellos será elegido juez rotativamente en cada mano.
> **Reglas del juego:** se reparten las cartas entre dos jugadores. Cada jugador tiene su pila de cartas boca abajo y no debe mirarlas. Los dos jugadores levantarán al mismo tiempo una carta de sus pilas y la mirarán sin mostrársela al compañero. Tendrán que recordar el número de la carta que sacaron. Luego se la entregarán al juez para que diga en voz alta el resultado de la multiplicación de ambas cartas.
> Con ese resultado, cada jugador deberá anotar el producto de su carta por la que crea que es la de su compañero. Por ejemplo, si su carta era un 8 y el producto es 72, deberá anotar 72 = 8 x 9. El tercer jugador mira ambos productos y le da un punto a cada participante que haya anotado bien.
> El juego continúa hasta que no queden más cartas. El juez podrá recurrir a la tabla pitagórica para resolver cualquier discusión.

Después de jugar, cada chico deberá marcar, en una tabla pitagórica individual, los productos que ya tenía memorizados y cuáles no para tener un registro de sus aprendizajes.

Por último, propondremos que discutan sobre las diferentes formas de obtener los productos aún no memorizados, apoyándose en otros conocidos[27]. En este trabajo habrá que analizar la conveniencia de pensar, por ejemplo 8 x 9 como *el doble de 4 x 9* o como *5 x 9 más 3 x 9*, en lugar de pensarlo como *la suma de 9 veces ocho u 8 veces nueve*.

Una segunda versión del juego podrá incluir algunos números de dos cifras en las cartas, con el propósito de avanzar en cálculos con los mismos. Para ello, será necesario incluir tarjetas en las que estén los números de 1 a 10, 25, 50, 20, 30, 40, 60 hasta 100.

En este caso, luego de jugar, se podrá discutir sobre cómo multiplicar números de una cifra por 10 y por 100, y cómo apoyarse en estos productos para pensar el x 20 como x 2 x 10; el x 30 como x 3 x 10, etc. Asimismo, se podrá pensar que x 50 es x 100 : 2 en todos los casos y que también es : 2 x 100, cuando el número es par, o que x 25 es x 100 : 4 y, en algunos casos, también es : 4 x 100, cuando el número es múltiplo de 4. Más adelante, al operar con decimales podrán establecerse otras relaciones como: multiplicar por 0,25 es equivalente a dividir por 4.

También se podrá discutir sobre cómo se multiplican dos números "redondos" de dos o más cifras entre sí, por ejemplo 200 x 40, al pensarlos como 2 x 100 y 4 x 10, analizando luego si la regla que se obtiene puede extenderse para números redondos de más cifras. Es interesante destacar que tanto la descomposición en factores como el uso de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación resultan significativas para los alumnos cuando descubren que pueden usarlas para transformar una cuenta que podría parecer difícil en un cálculo un poco más largo, pero que resulta más fácil, como por ejemplo:
480 x 250 = 6 x 4 x 2 x 10 x 25 x 10 = 25 x 4 x 100 x 6 x 2 = 120.000

Otros juegos dan lugar a la utilización de cálculos con las cuatro operaciones. Por ejemplo:

"Lo más cerca posible": cálculo mental combinando operaciones.
Materiales: un mazo de 27 tarjetas con los números 100, 200 hasta 900, 10, 20 hasta 90 y 1, 2, hasta 9. Fichas o piedritas para anotar el puntaje.
Organización de la clase: se juega de a cuatro jugadores.
Desarrollo: en este juego hay que llegar hasta 100, haciendo operaciones con los números de 4 cartas del mazo.

---

27 **Recomendación de lectura:** en los *Cuadernos para el aula: Matemática 3* y *4*, y en el apartado "Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones", en el Eje "Número y Operaciones" de este *Cuaderno* se pueden consultar actividades cuyo propósito es promover estas reflexiones.

Se mezclan las tarjetas y se colocan en una pila boca abajo. Un jugador saca las cuatro primeras y las coloca boca arriba, en el centro, para que todos las vean. La carta con el número mayor se aparta. Luego, cada uno escribe un cálculo con los otros tres números cuyo resultado sea lo más cercano posible al número de la carta apartada. Gana 2 puntos aquel que obtiene el resultado más cercano; si hay más de uno con el mismo, cada uno de ellos obtiene un punto.
En otro momento, se podrá jugar de modo que el resultado que haya que obtener sea el número menor.

Esta actividad favorece el uso de cálculos mentales aproximados antes de hacer el cálculo exacto para controlar su resultado, o para tomar la decisión de no hacerlos, y permite discutir luego sobre cómo se modifica el resultado al cambiar el orden de las operaciones. Las argumentaciones que se utilicen darán cuenta de la disponibilidad de las propiedades de las operaciones que los chicos hayan adquirido.

Como actividad posterior, se podrá analizar una partida simulada, por ejemplo como la siguiente:

• Los cálculos siguientes los escribió Matías cuando jugaba a “Lo más cerca posible” y habían salido las tarjetas: 200, 50, 3, y 70

50 x 3 + 70   70 x 3 - 50   (50 + 70) x 3   50 x 70 : 3

a) Sin hacer los cálculos, decidí qué cálculo está más lejos del resultado.
b) ¿Qué cálculo gana?
c) Matías dice que ***cincuenta por tres más setenta*** es 220 y Ayelén dice que da 3650. ¿Cómo pensó cada uno?

Un ejemplo de la utilidad de hacer cálculos aproximados para decidir sobre si hacer o no el cálculo exacto, es anticipar que el resultado de 50 x 70 va a tener 4 cifras y “está muy lejos” de 200.

Otro modo de promover el **cálculo mental** es plantear situaciones en las que haya que buscar números que cumplan con ciertas condiciones vinculadas con operaciones, como en los casos siguientes:

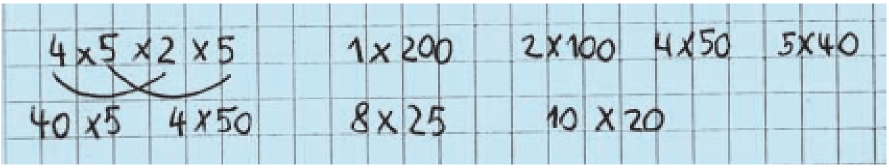
1. Encontrá todas las maneras posibles de obtener 200, multiplicando dos números naturales.

2. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200, multiplicando más de dos números naturales.

3. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200 como resultado, utilizando sumas y multiplicaciones de números naturales.

4. Encontrá tres maneras posibles de obtener 200 como cociente, utilizando una división.

Para responder a la consigna 1, algunos niños buscan por tanteo pares de números que den 200, otros niños descomponen en factores de una cifra y luego los van combinando; mientras que otros van recorriendo el 1, el 2, el 3, el 4 y prueban si es posible encontrar el otro factor. Así, los niños podrán encontrar, entre otros:



En este camino, surgirán cuestiones para discutir, por ejemplo: *¿Se aceptará 1 x 200?, ¿son dos formas diferentes 2 x 100 y 100 x 2?*

La consigna 2 avanza hacia descomposiciones multiplicativas, donde podremos evaluar el aprovechamiento que se haga de las relaciones que quedaron disponibles de las del primero. En la discusión común, podremos preguntar *Si se descompone el 200 en 10 x 20, ¿se puede escribir 2 x 5 x 4 x 5 y también 2 x 5 x 2 x x 2 x 5? Si se hace lo mismo con 8 x 25, ¿se obtienen los mismos factores? ¿Por qué?* En la consigna 3, si los niños emplean simultáneamente multiplicaciones y sumas, podrá surgir el uso del paréntesis para indicar el orden en que se realizan. Finalmente, en la consigna 4, se podrá poner en evidencia que a partir de una cuenta de dividir que dé 200 como cociente y con resto 0 basta multiplicar dividendo y divisor por un mismo número para obtener otra que también da ese cociente.

Plantear situaciones para multiplicar y dividir por dos cifras

En 5º año/grado, las sumas y las restas con números naturales resultan cálculos suficientemente conocidos como para no dedicar un tiempo específico a su revisión, salvo en lo que se refiere al cálculo aproximado, al controlar los resultados. Sin embargo, todavía suele ser necesario retomar conocimientos sobre la multiplicación y la división por dos cifras para profundizarlos.

Al llegar a 5º año/grado los chicos ya han conocido diferentes formas de multiplicar un número natural por otro y han arribado a la conveniencia de usar el **algoritmo convencional** cuando no es sencillo operar mentalmente. Sin embargo, resulta un desafío extender los procedimientos conocidos para calcular productos de números más grandes y debatir sobre los conocimientos en los cuales se apoyan.

Las actividades que siguen toman los procedimientos como objeto de análisis para compararlos y explicitar las relaciones establecidas, a la vez que exigen la formulación de argumentos sobre su validez.

• Respondé a las siguientes preguntas sin hacer las cuentas.
a) Para resolver la cuenta 164 x 12, Nacho multiplicó 164 x 4 y 164 x 8 y luego sumó los resultados. Explicá cómo lo pensó.
b) Guille pensó el 12 como (10 + 2) y usó el mismo procedimiento que Nacho. ¿Cuál de las dos formas usarías? ¿Por qué?
c) Para resolver el mismo cálculo, Gaby hizo 164 x 3 x 2 x 2, porque ella dice que le resulta fácil calcular dobles. ¿Te parece que su procedimiento está bien?

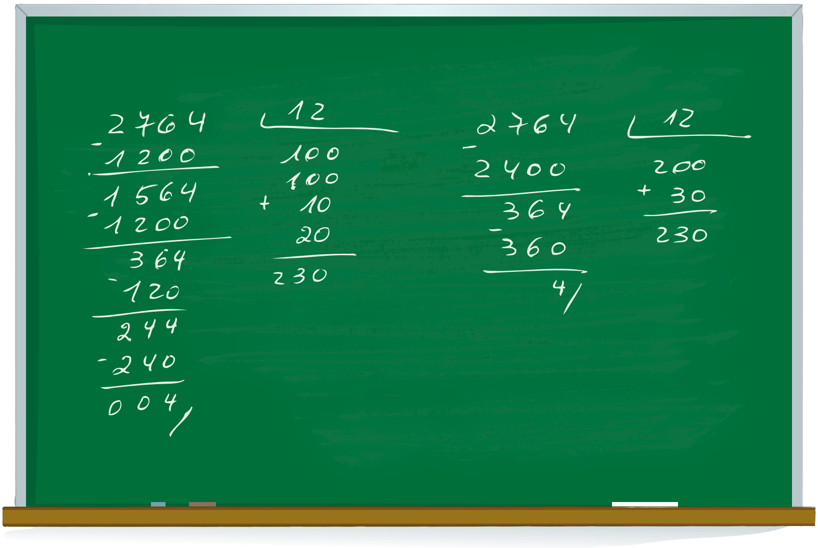
• Tres chicos pensaron el cálculo 420 x 39 de las siguientes formas:
420 x 40 – 420
420 x 13 x 3
42 x 4 x 100 – 420
Sin hacer los cálculos, respondé:
a) ¿Se obtiene el mismo resultado en los tres casos?
b) ¿Cómo lo pensó cada uno?
c) ¿Qué propiedad permite a cada uno plantear el cálculo de esa forma?

Estas actividades permiten discutir cómo las propiedades de la multiplicación justifican los procedimientos de cálculo. Por ejemplo, en el debate de las respuestas elaboradas por los chicos sobre la actividad 1, en el ítem a) podrán aparecer formulaciones como *Nacho pensó en que hacer doce veces un número es lo mismo que hacer ese número cuatro veces y después ocho veces y sumar.* En el ítem b), podrán pensar que de las dos descomposiciones aditivas de 12 conviene la que hizo Guille, porque para multiplicar por 10 se agrega un cero. En ambos casos, los chicos usaron la propiedad distributiva. En cuanto a la forma de calcular de Gaby, ella se apoyó en la idea de que 12 se puede descomponer en factores y después asociarlos como resulte más fácil.

En cuanto a la **división de un número por otro de dos cifras**, en 4º año/grado hemos propuesto avanzar hacia el algoritmo basado en aproximaciones sucesivas al cociente, por lo que, ya en 5º año/grado, este algoritmo debiera estar disponible para todos los alumnos, incluyendo una versión lo más sintética posible.

Por ejemplo, si se trata de dividir 2764 : 12, el cociente será mayor que 100 y menor que 1000, pues 12 x 100 = 1200 y 12 x 1000 = 12000, por lo que será un número de 3 cifras.

¿Cómo se podría ir pensando la cuenta? Veamos dos versiones, una larga y otra más corta.



Tal como hemos planteado en el *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, si los chicos se apoyan en el trabajo de cálculo mental y aproximado que vienen realizando, es fácil para ellos pensar en multiplicar el divisor por la unidad seguida de ceros e ir restando los resultados. Para acortar la cuenta, se podrá pedir a los alumnos que anticipen el resultado de la resta antes de realizarla efectivamente, con el fin de determinar si es posible aumentar el cociente *para que sobre lo menos posible*. Esta estrategia va reduciendo el número de restas escritas. Es posible que algunos niños puedan hacer estas restas mentalmente; sin embargo, para otros, esto les hace perder el control sobre el procedimiento. En este sentido, y dado que priorizamos este control, no conviene insistir en abandonar la resta buscando una rapidez que no resulta significativa.

Es importante señalar que no es necesario que todos los chicos hagan la cuenta del mismo modo. Si, al llegar a 5º año/grado, algunos niños han aprendido el algoritmo tradicional en el que se separa el dividendo en cifras, se multiplica y resta mentalmente y “se baja” una nueva cifra, tendremos que trabajar con ellos para conocer si tienen control de los pasos que hacen y, si no es así, colaboraremos para que comparen su forma de resolver con otras e incluyan todas las escrituras auxiliares que necesiten.

Otras actividades que resultan muy importantes para afianzar las habilidades de cálculo son aquellas que requieren realizar **cálculos aproximados con números más grandes**, pues permiten controlar los resultados que se obtienen al hacerlos en forma exacta.

1. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

375 x 23 =	6625	8625	10625
2581 x 19 =	49039	28039	61039

2. Encuadrá el resultado de cada cuenta. ¿Cómo lo pensaste?

5 x 22	entre 100 y 1000	entre 1000 y 10000	entre 10 y 100
49 x 51	entre 100 y 2000	entre 2000 y 3000	entre 3000 y 4000

3. Colocá un número, para que el producto resulte entre los números indicados.

19 x … está entre 350 y 400
31 x … está entre 3500 y 4000

4. Marcá el resultado correcto sin hacer la cuenta.

6890 : 32 =	215	315	415
7008 : 24 =	29	292	2902

La justificación de la selección del resultado llevará a los alumnos a formular argumentos vinculados con la cantidad de cifras que puede tener el cociente, la cifra que ocupa el lugar de las unidades, etc.

En otras actividades, es necesario reflexionar acerca de las relaciones entre multiplicación y división, y entre el resultado de una división y la descomposición en factores del dividendo y el divisor. Por ejemplo:

Sin resolver las cuentas de dividir, sabiendo que 120 x 50 = 6000, calculá:

a) 6000 : 50 =	6000 : 120 =	6120 : 120 =	5950 : 50 =
b) 6000 : 25 =	6000 : 12 =	6000 : 40 =	

En el caso a), los dos primeros cálculos llevan a pensar a cada uno de los factores como divisores y los dos últimos a considerar cómo cambia el cociente cuando el dividendo aumenta o disminuye en relación con esos factores. En el caso b), descomponer 120 y 50 en factores permite combinarlos para obtener los resultados sin dividir. Por ejemplo, como 50 es 25 x 2, el resultado de 6000 : 25 es 120 x 2 y, además, como 120 es 12 x 10, el resultado de 6000 : 12 es 50 x 10. Recuperar distintas formas de descomponer un número en factores es una estrategia que da lugar a pensar diferentes divisiones. Así, 6000 = 40 x 3 x 5 x 10, entonces se puede calcular sin dividir el resultado de 6000 : 40, de 6000 : 3, de 6000 : 5 y de 6000 : 10, asociando los otros factores.

Plantear situaciones para sistematizar relaciones numéricas y propiedades de las operaciones

En este apartado, nos ocuparemos de presentar actividades de sistematización de conocimientos numéricos ya explorados en las actividades de cálculo mental y en la producción y análisis de procedimientos de cálculo.

Ya desde *Cuadernos para el aula: Matemática 3* se propone un trabajo de comparación de tablas de multiplicar en la tabla pitagórica, mientras que en *Cuadernos para el aula: Matemática 4* se presenta la extensión de algunas relaciones fuera de la tabla. Podemos retomar este trabajo en 5º año/grado, proponiendo actividades en las que se presenten afirmaciones para decidir sobre su validez.

Por ejemplo, en la primera versión del juego "Descubrir la carta", en este *Cuaderno*, se plantean diferentes formas de pensar 8 x 9 y, en la segunda versión, se plantea cómo apoyarse en los productos x 10 y x 100, para pensar los productos x 25, y x 20, x 30, x 40, hasta x 90. Para que los chicos puedan discutir estas reglas y las propiedades en las que se apoyan, podremos proponer actividades como las siguientes.

1. a) ¿Con cuáles de las siguientes afirmaciones estás de acuerdo? ¿Por qué?
8 x 9 es el doble de 4 x 9.
8 x 9 es 5 x 9 más 3 x 9.
8 x 9 es el doble del doble del doble de 9.
8 x 9 es el triple del triple de 8.
8 x 9 es lo mismo que 9 x 8.
8 x 9 es 3 veces 8 más 6 veces 8.
b) Escribí con un cálculo las afirmaciones con las que estés de acuerdo.

2. Encontrá, si es posible, algún ejemplo donde la regla se cumpla y otro donde la regla no se cumpla.
a) Para multiplicar un número por 5 se le agrega un cero y al resultado se lo divide por dos.
b) Para multiplicar un número por 5 se halla la mitad y se multiplica por 10.

3. Para multiplicar un número por 5, ¿vale alguna de estas reglas?
Doblar y añadir el doble,
añadir el doble del doble,
añadir el doble y doblar.

4. ¿Es verdad que para multiplicar un número por 99, se añaden dos ceros y se le resta el número? ¿Por qué?

5. Para hacer 7650 : 25:
Jimena hace 7500 : 25 = 300 y 150 : 25 = 6 y después suma 300 + 6.
María, en cambio, hace 7650 : 10, después 7650 : 10 y 7650 : 5, y después suma.
¿Está bien lo que hace Jimena? ¿Y lo que hace María? ¿Por qué?

6. Ale dice que si 6 x 5 = 5 x 6, entonces 450 x 392 = 392 X 450, ¿estás de acuerdo?, ¿por qué?

7. Guille dice que para resolver 36 x 150, hace 30 x 150 y 6 x150 y suma los resultados.
Gaby dice que ella hace 36 x 100 y 36 x 50, y después suma los resultados. ¿Está bien lo que hace Guille?, ¿y lo que hace Gaby?, ¿por qué?

Al analizar las reglas, es importante considerar que algunas valen para todos los números (para multiplicar un número por 5 se le agrega un cero y al resultado se lo divide por dos pues 5 = 10/2), otras sólo en algunos casos (para multiplicar un número por 5 se halla la mitad y se multiplica por 10, que vale solo para los números pares) y otras nunca (para multiplicar un número por 5, no vale doblar y añadir el doble porque se obtendría el número por 4). Asimismo, habrá que explicitar de qué modo se utilizan las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva en los distintos casos.

Plantear situaciones para analizar las relaciones de múltiplo y divisor

Las relaciones de múltiplo y divisor, inversas entre sí, vinculan pares de números y pueden ser enunciadas del siguiente modo: *Si un número* d *se multiplica por un número natural, se obtiene otro número* m*, que es múltiplo de* d*. A la vez,* d *divide exactamente a* m *y es un divisor del mismo. Por ejemplo, 2 multiplicado por 3 es 6, entonces es posible decir que 2 es divisor de 6 y 6 es múltiplo de 2, y también que 3 es divisor de 6 y 6 es múltiplo de 3.*

En 5º año/grado se avanzará en el reconocimiento de estas relaciones, teniendo en cuenta que es importante no avanzar en la comunicación de las reglas, como los criterios de divisibilidad o el procedimiento para el cálculo de múltiplos y divisores comunes basado en la descomposición en factores primos, si los chicos no pueden dar cuenta de las razones en las que esas reglas se apoyan.

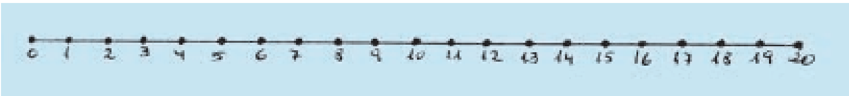
Cuando presentamos enunciados de problemas vinculados con el uso de múltiplos y/o divisores, es importante que tengamos presente que, para resolverlos, hay que utilizar un repertorio multiplicativo importante. Si bien estos problemas contribuyen a memorizar las series de múltiplos, las posibilidades de abordar las nuevas nociones en juego mejoran si los alumnos ya tienen disponible el repertorio multiplicativo que se fue instalando desde años anteriores.

Los niños ya conocen algunos múltiplos de algunos números, como *los números de las tablas,* y apoyándose en este conocimiento es posible extenderlo y avanzar en la noción de múltiplo común. Consideremos la siguiente secuencia de actividades que permite explorar esta relación y luego sistematizarla al reflexionar sobre las formas de jugar.

Secuencia para analizar las relaciones de múltiplo y divisor: "Saltos y múltiplos"

La presente secuencia tiene como propósito dar lugar a la identificación de múltiplos. Se puede jugar con diferentes versiones[28], pero aquí hemos tomado solo dos.

Actividad 1
"La pulga y las trampas": búsqueda de múltiplos comunes.
Materiales: para cada equipo, se necesita una tira de papel o cartulina con números hasta el 20, los espacios entre números deberán ser aproximadamente de cuatro centímetros, una bolsa con aproximadamente 20 chapitas para cada equipo y una piedrita con la que pondrán la trampa.



Organización de la clase: en grupos de 4, en cada grupo dos equipos de dos chicos.
Desarrollo: anunciaremos que la pulga va a saltar sobre la tira con saltos iguales de 2 en 2 o de 3 en 3. Luego, sobre un número de la tira, uno de los equipos coloca una "trampa". El otro equipo, comenzando desde cero, elige con qué salto recorrer la tira y hace avanzar la "pulga" con los saltos del tamaño que haya escogido, procurando no caer en las trampas. Si cae en la trampa, no puede seguir. Si logra atravesar toda la tira sin caer en la trampa, se queda con su chapita; si no, se queda con ella el equipo que puso la trampa.

[28] **Recomendación de lectura:** Fuenlabrada, I. y otros (2000), *Juega y aprende matemática*, Buenos Aires, Novedades Educativas.

> Luego, se alternan los roles de los equipos y juegan un número par de veces, para que ambos equipos tengan la misma oportunidad de obtener chapitas. Gana el equipo que se queda con más chapitas.

La estrategia del colocador de trampas consistirá, en todos los casos, en buscar números que bloqueen totalmente el camino en algún momento para ganar las chapitas. Para esto, los niños deberán, poco a poco, desarrollar estrategias de cálculo mental para buscar números que estén contenidos en varias series a la vez.

> **Actividad 2**
> Cada equipo debe escribir cómo piensa al poner la trampa para ganar y por qué le parece que funciona. Luego, se leen las estrategias para que quede claro para todos cómo lo pensó cada equipo.

En este caso, la explicitación de la estrategia da lugar a reconocer y nombrar los conocimientos utilizados.

Actividad 3
Otros problemas interesantes para volver a utilizar los conocimientos elaborados son los siguientes:

> 1. Fijate dónde ponen la trampa estos chicos y respondé para cada uno: ¿te parece que es un buen lugar para la trampa? ¿Por qué?
> a) Matías puso la trampa en el 7.
> b) Lucía puso en el 10.
> c) Martina puso en el 18.
> d) Malena puso en el 15.
>
> 2. Hacé una lista de los números hasta 20:
> a) que sean los mejores para poner la trampa,
> b) que sean los peores para poner la trampa.
>
> 3. Si la tira de números fuera hasta el 30:
> a) ¿qué números de la tira convienen más?
> b) ¿cuáles no convienen?

Actividad 4
Propondremos jugar nuevamente, enfrentando equipos de dos chicos pero con algunos datos cambiados. La tira es hasta el 30, se ponen dos trampas, el salto puede ser de 2 en 2, o de 3 en 3, o de 4 en 4, o de 5 en 5.

El cambio de reglas enriquece mucho las posibilidades de múltiplos comunes, pues al haber dos trampas, permite tomar las series de múltiplos de a dos. Por ejemplo, una trampa para los múltiplos comunes a 2 y 3, y otra para los comunes a 4 y 5, o también para los múltiplos comunes a 4 y 3, y otra para los comunes a 2 y 5. Otra opción es considerar una trampa para tres series y otra para una, por ejemplo 2, 4 y 3, y otra para 5, o también una para 2, 3 y 5, y otra para 4.

Actividad 5

Se pide nuevamente que escriban la estrategia ganadora y por qué creen que funciona. En este caso, como hemos planteado recién, se dan varias posibilidades.

Esta versión también permite discutir que algunas series de múltiplos están incluidas en otras, pues se da el caso de que ***la serie del 4 (los múltiplos de 4) está incluida en la serie del 2 (son también múltiplos de 2)***, y discutir también si la inversa es cierta, es decir, ***si los múltiplos de 2 son (todos) múltiplos de 4.***

Asimismo, se podría discutir qué largo debería tener la tira para que se pudiera poner una única trampa que atrapara a la pulga con cualquiera de los cuatro saltos posibles, es decir cuál sería el mínimo común múltiplo de los números 2, 3, 4 y 5.

Otra discusión puede darse acerca de una nueva regla “hay que salvar a la pulga”. En este caso, habrá que determinar si es posible poner la trampa en algún número, de modo que ninguna pulga caiga en ella. La reflexión en este último caso podría llevar a identificar los números primos.

Actividad 6

Nuevamente, se pueden proponer problemas interesantes para volver a utilizar los conocimientos elaborados. Por ejemplo:

- Si la tira se extiende, y la pulga salta de a 2, de a 3, de a 4 o de a 5:
  a) ¿cae en el 123? ¿Por qué? b) ¿cae en el 137? ¿Por qué?

- Si se sabe que cayó en el 122, ¿se puede saber de a cuánto saltaba?

Siguiendo con el mismo esquema de juego, podremos ir aumentando el número de trampas a 3 y los saltos hasta de 7 espacios, o bien aumentar a 4 trampas y los saltos de hasta 9 espacios. Por supuesto la tira deberá ser, al menos, de 40 o 50 números respectivamente.

En un grupo de plurigrado, es posible realizar el juego inicial en conjunto y luego organizar actividades diferentes para grupos con distintos conocimientos. En un caso, se podría focalizar la actividad solo en la idea de múltiplo, en otros en la idea de múltiplo común, en otros sobre primos y compuestos y, para los más avanzados, se podrían plantear problemas en los que la pulga salta desde una partida distinta de 0. En este último caso, se puede avanzar en la explicitación de la relación $D = d \times c + r$, ya que el resto sería el punto de partida.

Si bien en 5º año/grado no se aborda el análisis de criterios de divisibilidad, pues su justificación no está al alcance de los alumnos, es posible comparar pares de números y decidir si uno divide a otro en forma exacta o no. Por ejemplo, en el caso de la siguiente actividad que podemos presentar a los niños por grupos o individualmente, y en la que hay que descubrir la regla de un juego.

• Dos niñas, Cecilia y Rosa, encontraron en un cajón un mazo de naipes sin el 11 y el 12, e inventaron un juego nuevo con ese mazo, que se llama "Da justo". Les preguntamos cuáles eran las reglas y no quisieron revelarlo. Pero observemos cómo jugaron: luego de barajar, cada una tomó tres cartas que fue colocando alternativamente sobre la mesa. Anotaron las jugadas subrayando la carta ganadora en cada una. Si era empate no se subrayó nada. ¿Cómo deciden cuál es la carta ganadora?

Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa	Ceci	Rosa
2	4	**1**	2	**2**	8	**2**	4	**3**	6
5	8	**5**	10	7	**1**	5	8	4	**2**
3	**1**	3	2	6	**3**	3	**1**	8	7

La interpretación que hagan los chicos de la información en las tablas dependerá de sus experiencias a propósito del análisis de relaciones entre números dando lugar a distintas conclusiones, como: *el que tiene la carta más baja gana* o *conviene sacar el 2 porque gana casi siempre o bien el que conviene sacar es el 1, que gana siempre.*

El siguiente es un fragmento de una clase donde se indagan las reglas del juego.

Registro de clase

Maestra: –*¿Hay alguna manera de saber cuál es el número que gana en cada tirada?*
David: –*Siempre es el más chico.*
Maestra: –*Entonces, ¿por qué no le ganó el 2 al 3, o el 4 al 9…?*
David: –*Pero le ganó el 2 al 4, el 5 al 10… Porque no es "un más chico cualquiera", son más chicos que si los vas sumando llegan al otro número, justo.*
Maestra: –*¿Alguien entiende lo que dice David?*
Ana: –*Seguro, mirá: si sumás 2 + 2 + 2, llegás a 6 justo. Si sumás 5 más 5, te da 10 justo…*
Maestra: –*¿Y esto vale en todos las jugadas? ¿Por qué no lo verifican?*
Varios: –*¡Sí! ¡Vale siempre!*

Maestra: –*Entonces, si juego con Lucas, y yo saco el 8* (levanta una carta con este número) *y Lucas saca el 3* (entrega una carta con este número a Lucas), *¿quién de los dos gana?*
Lucas: –*Nadie, porque tres veces 3 se pasa de 8.*
Maestra: –*Entonces, ¿qué carta le conviene tener a Lucas para ganarme?*
Ana: –*Puede tener el 2.*
Andrés: –*O el 4 también. O el 8…* (duda).
David: –*Sí, te da justo una vez. Puede tener el 1, ¡y si tiene el 1 siempre gana! Porque 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1… te da lo que quieras…*
Maestra: –*Esos números que nombraron, el 1, el 2, el 4 y el 8 son los que "dividen justo" al 8. Se llaman* divisores del 8. *Y si tengo el 3, ¿a qué cartas le gano?*
Aníbal: –*Al 6,… al 9.*
Maestra: –*¿A alguno más?*
Matías: –*Al 3 y… ninguno más.*
Maestra: –*Entonces, si queremos escribir las reglas del juego, ¿qué ponemos? Escríbalo cada uno primero y después nos ponemos de acuerdo entre todos.*
Leonardo: (Lee.) –*En este juego se tiran las cartas que te tocan y ganás si tenés el número que entra justo en la carta del otro.*
Maestra: –*¿Qué dicen? ¿Se entiende?*
(Todos asienten.)
Maestra: –*¿Alguno escribió otra cosa?*
Débora: –*Yo puse:* Tenés que buscar si llegás justo al número que tiene el otro y entonces ganás.
Maestra: –*¿Qué quiere decir que* llegás justo*?*
Débora: –*Que mirás las cartas y si te da justo, ganaste.*
Maestra: –*¿Qué cosa te da justo?*
Débora: –*La suma… o la multiplicación.*
Maestra: –*¿Y cómo se podría decir usando la idea de divisor?*
David: –*Digo:* gano, *si tengo un divisor del otro.*
(A continuación, la maestra les entrega un mazo de naipes completo, con cartas hasta el 12 y les solicita que hagan una lista de cuáles son los números a los que les ganan el 1, el 2, el 3, el 4, el 5… etc., hasta el 12. Y luego dice:) –*Cada lista tiene los divisores de cada número, ¿por qué? Porque un número es divisor de otro si lo divide exactamente.*
Finalmente, se da este diálogo.
Maestra: –*¿Dónde podemos buscar divisores de un número?*
David: –*En la cabeza.* (Todos se ríen.)
Maestra: –*¿Y si reviso entre las tablas de multiplicar?*

Es interesante observar cómo los niños, en este registro de clase, apelan inicialmente al campo aditivo para justificar sus dichos, en este caso a la suma repetida, que dio sentido inicialmente a la multiplicación de números naturales. Luego, utilizan la idea de división exacta y la maestra propone el lenguaje matemático que expresa la idea que se está elaborando. Si un número "entra justo" en otro, es un divisor del otro número.

Luego de jugar, se pueden plantear preguntas sobre situaciones hipotéticas relacionadas con el juego, como las siguientes.

• Si se agregan cartas hasta el 50:
a) ¿a qué números les gana el 5? ¿Y el 2?
b) ¿Qué cartas les ganarían a los siguientes números?
27 17 35 40

• Si el mazo tiene 10 cartas, 10, 20, 30 hasta el 100:
a) escribí dos empates posibles.
b) ¿Hay algún número con el que se gana siempre?

Si bien no se espera que los alumnos enuncien los criterios de divisibilidad como tales, la reflexión sobre las respuestas a estas preguntas podría dar lugar a conclusiones como: *en el juego del 50, todos los pares se pueden dividir por 2* o bien, *todos los que terminan en 0 se pueden dividir por 10.*

Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas

Desde la perspectiva que asocia el aprendizaje con la construcción del sentido de los conocimientos, para las operaciones con estos "nuevos" números, interesa ocuparse de:
- los problemas que se resuelven o que se relacionan con ellas,
- las situaciones en las que no pueden ser utilizadas,
- la evolución de las distintas concepciones de la operación que permita utilizarla en los distintos campos numéricos,
- sus relaciones con otros conceptos (multiplicación y división con proporcionalidad, por ejemplo),
- sus relaciones con otras operaciones,
- los recursos de cálculo que pueden ser utilizados, en donde el algoritmo es uno entre otros posibles,
- por qué funcionan tales recursos de cálculo,
- cuáles son los mecanismos de control que se poseen y que permiten validar el procedimiento realizado o la adecuación de la respuesta, etc.[29]

[29] Saiz, I. (1999), *Hacer matemática 2*, Libro para el docente, Buenos Aires, Estrada.

Estamos hablando aquí de algo mucho más complejo que agregar un contexto a una suma de fracciones o incorporar un listado de problemas al final del desarrollo de un tema que "muestre" dónde se usa un algoritmo, estrategias de enseñanza que se apoyan en la idea ya superada de que mirando y practicando se aprende. En los dos apartados que siguen, nos ocuparemos de dar ejemplos de actividades pensadas específicamente con el objetivo de propiciar en los alumnos un tipo de aprendizaje como el que se describe en la cita anterior.

Los procedimientos que se utilizan en "Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas", se recuperan en las actividades propuestas en "Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales". Por ejemplo, los ejercicios de cálculo pensado brindan la oportunidad de hacer evolucionar y mejorar los procedimientos utilizados inicialmente por los alumnos y, a la vez, abren la posibilidad de aumentar la complejidad en los problemas.

En particular, en el apartado "Plantear situaciones para operar con fracciones y decimales con distintos significados" nos ocuparemos de presentar situaciones que requieran un uso posible de los números racionales para que los alumnos puedan resolverlos con herramientas propias. Nos parece fundamental, además, proponer aquí un trabajo de análisis y reflexión a partir de la comparación de situaciones problemáticas que involucran distintas operaciones y sus diferentes significados con el objeto de permitir el estudio de los límites de utilización de cada una de las operaciones. Para ello, el contexto de la proporcionalidad, por su relación con otros conceptos matemáticos, proporciona un ámbito ideal para iniciar el estudio de la multiplicación y división de fracciones, a la vez que se desarrollan estrategias de cálculo relacionadas con dichas operaciones. Por este motivo, los dos subtítulos incluidos en este apartado están íntimamente relacionados, ya que si bien el modelo de proporcionalidad es lo suficientemente complejo como para requerir que nos ocupemos especialmente de sus propiedades y características definitorias, es nuestra opción utilizar ese estudio como recurso que permita a su vez resignificar y ampliar el uso de las fracciones. En síntesis, lo que planteamos aquí es la necesidad de proponer problemas que permitan a los alumnos ir comprendiendo el tipo de situaciones para las que son útiles las operaciones.

Por otra parte, en el apartado "Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales" la resolución de los problemas da lugar a la elaboración de estrategias de cálculo que será necesario hacer evolucionar a través de actividades de cálculo mental como las que se proponen hasta llegar, más adelante, a la sistematización de una técnica general, el algoritmo. En este sentido, el inicio del trabajo con operaciones se plantea uno o dos años antes de la introducción del algoritmo. En particular, en este año no se priorizan los algoritmos de las operaciones, sino que se recuperan, se profundizan y se sistematizan otros recursos de cálculo más pensados, y se sigue profundizando en el sentido de las operaciones, analizando las diferentes situaciones en que pueden utilizarse y en las que no es posible hacerlo. En *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, en el apartado análogo, se proponen problemas en los que los alumnos pueden poner en uso la idea que tienen de las fracciones y los decimales para encontrar resultados de sumas y restas con recursos propios[30]. El trabajo en 5° año/grado incorpora un nuevo repertorio de números además de los más usuales y familiares y problemas donde puedan usar las estrategias para sumar y restar que venían construyendo desde el año anterior, en relación con la multiplicación y división de racionales por un número natural.

Plantear situaciones para operar con cantidades expresadas en fracciones o decimales con distintos significados

El planteo de nuevos problemas que requieran utilizar las operaciones permitirá a los alumnos resignificarlas en el nuevo campo numérico.

Si bien más adelante nos ocuparemos más exhaustivamente de las situaciones de **proporcionalidad directa**, los problemas asociados a estas relaciones son particularmente interesantes para avanzar en el trabajo con la multiplicación y la división. A la vez, brindan una nueva oportunidad para realizar **sumas y restas**.

- En la heladería de Rocío, necesitan 5 kg de frutillas para hacer helado. El martes habían quedado del día anterior 7 bandejas de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Es suficiente con lo que tienen o deberán comprar más frutillas?

- Ramiro fue al kiosco, sacó 8 fotocopias que costaban $ 0,07 cada una y compró 3 barritas de cereal de $1,20 y 5 bocaditos de $ 0,35. ¿Cuánto gastó?

[30] **Recomendación de lectura:** en "Para calcular de diferentes formas con fracciones decimales" de *Cuadernos para el aula: Matemática 4*, se hace referencia al tipo de procedimientos al que aludimos.

En estos casos, es posible resolver apoyándose en la suma y retomar un significado de la multiplicación con el que los alumnos ya están familiarizados para ir construyendo los primeros procedimientos de cálculo de dobles o mitades, triples, etc. A continuación, mostramos algunos procedimientos que utilizan los alumnos y que, por supuesto, dependen de los conocimientos con los que cuentan.

Erika

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

3 y $1\frac{1}{2}$

Y si agrego otro $\frac{3}{4}$ es $5\frac{1}{4}$

Yanina

$\frac{3}{4}$ es 3 veces $\frac{1}{4}$,
así que 7 de $\frac{3}{4}$ es
como 21 veces $\frac{1}{4}$
$\frac{21}{4}$ que es 5 y $\frac{1}{4}$

Javier

35 centavos × 5 = 175 centavos = $1,75

7 centavos × 8 = 56 centavos

3 × $1,20 son $3 y 60 centavos

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 1{,}75 \\ 0{,}56 \\ 3{,}60 \\ \hline 5{,}91 \end{array}$$

Analizar las producciones y vincular el sentido del problema con los resultados obtenidos permitiría obtener algunas primeras reglas ligadas a la descomposición de fracciones a/b como a x 1/b o a la consideración de las denominaciones de las cifras decimales.

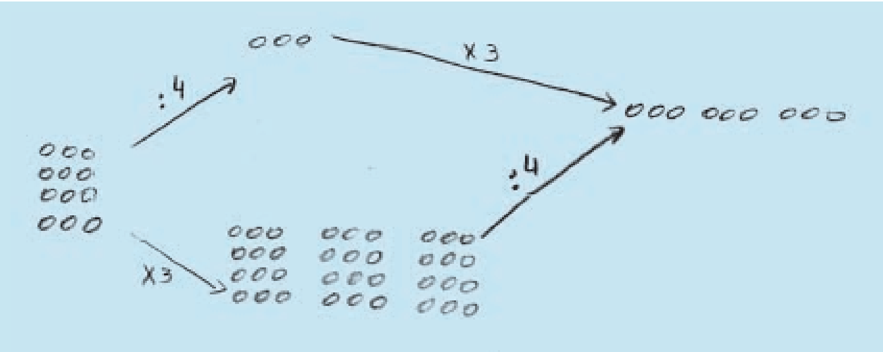
7 x 3/4 = 7 x 3 x 1/4 = 21 x 1/4

5 x 0,35 = 5 x 35 centésimos = 175 centésimos

Estos recursos de cálculo que aparecen al resolver problemas se retomarán luego con actividades específicas, como los juegos o actividades de cálculo mental para afianzarlos y avanzar en su generalización.

Otros problemas que es necesario considerar refieren al **cálculo de una parte** de una cantidad. Esta es una tarea que puede ser nueva para este año, pero que es posible vincular con situaciones de reparto en partes iguales que ya se hayan realizado, como calcular la cuarta parte o la mitad. Lo nuevo será vincular la multiplicación y la división con las escrituras fraccionarias, ya que, por ejemplo, buscar las tres cuartas partes de 12 puede pensarse como dividir el 12 por 4 y tomar 3 partes, lo que supone pensar a 3/4 como el triple de la cuarta parte o también puede pensarse como hacer el triple de 12 y después averiguar la cuarta parte, es decir, calcular la cuarta parte del triple.

Es interesante observar que si se calcula la cuarta parte del triple, o el triple de la cuarta parte, se obtiene el mismo resultado, aunque el significado de lo que se hace sea distinto.



Para los alumnos, la idea de "parte de…" es más fácil de relacionar con una división que con la multiplicación, pero habrá que explicitar que hacer la mitad de 24 puede escribirse tanto 24 : 2 como 1/2 x 24, y agregar más adelante 0,5 x 24.

El siguiente es un ejemplo de un problema que enfrenta a los alumnos con una situación de **reparto**, uno de los significados de la división ya trabajados con los números naturales, y cuya resolución pone en evidencia relaciones aritméticas inherentes a la escritura de los números decimales.

• Gisela compró 5 lápices y pagó en total $ 7,5. ¿Cuánto le costó cada lápiz?

Un procedimiento posible es pensar en $ 1 para cada lápiz y después repartir los $ 2,50 que quedan, que son $ 0,50 más para cada lápiz. En este tipo de procedimientos, sigue funcionando el hecho de poder descomponer el número según convenga por la situación que se presente. También es posible que los alumnos utilicen resultados multiplicativos que tienen memorizados, como por ejemplo que 5 x 15 = 75 y deducir que cada lápiz debería costar $ 1,50. En resumen, lo que queremos mostrar aquí es que los alumnos pueden resolver problemas de multiplicación y división sin necesidad de haber aprendido el algoritmo.

Otro tipo de trabajo que es necesario plantear es el de análisis y reflexión de situaciones problemáticas que involucran **distintas operaciones** y/o diferentes significados de las mismas con el objeto de analizar los límites de la utilización de cada una de ellas.

A continuación, presentamos un fragmento del registro de una clase en la que se trabaja con los alumnos la problemática de diferenciar las situaciones multiplicativas de las aditivas.

Registro de clase

Maestro: –*Ahora les voy a dar de nuevo la lista de problemas que resolvieron el otro día y quiero que analicen, en el grupo, cuáles son los que ustedes resolvieron con suma y cuáles con multiplicación. Después vamos a discutir si solo es posible resolverlo de esa manera o si, por ejemplo, los que resolvieron con suma se pueden resolver con multiplicación o al revés, y si los que resolvieron con multiplicación se pueden resolver con suma, indistintamente. ¿Quedó clara la consigna?*
Algunos dicen sí, mientras el maestro reparte la fotocopia que se reproduce en la página siguiente.
El maestro pega en el pizarrón las resoluciones de los alumnos de días anteriores (…). Después del trabajo de los alumnos en los grupos, mientras habla, hace un cuadro en el pizarrón.
Maestro: –*Hay tres grupos que dicen que en el problema 1 se puede multiplicar y sumar y otros dos grupos dicen que es de suma.* (Anota en el pizarrón con signos de pregunta los problemas en los que hay discusión).
En cambio, todos coinciden con que en el problema 2 se puede multiplicar y también se puede sumar, así que lo ponemos en la tercera columna.
El problema 3, todos coinciden que es de suma y el problema 4, que es de suma y multiplicación.

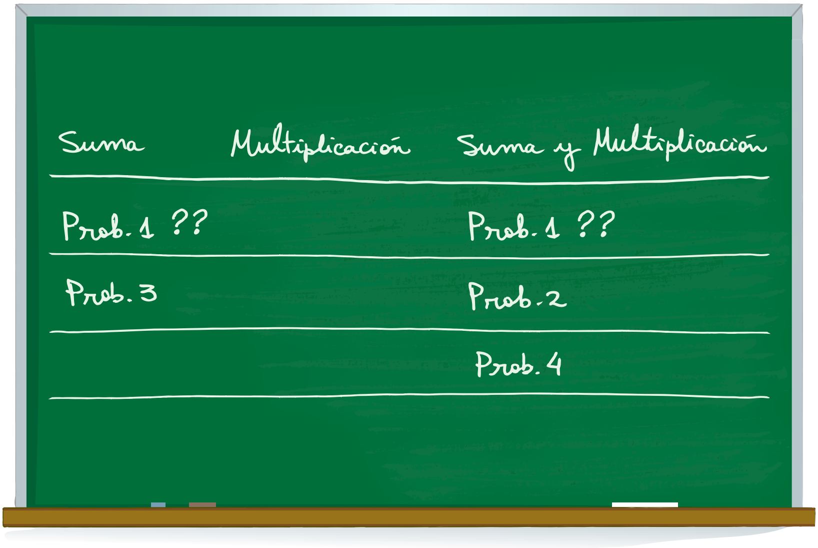
En la heladería de Rocío, todos los días usan frutillas para hacer helado. Pero como a veces incorporan gustos nuevos, compran más de lo que necesitan para poder experimentar recetas y muchas veces les sobran frutillas para el día siguiente.

1. Para hacer el helado de frutillas utilizan 5 kg de frutillas todos los días. Del día anterior quedaron 4 bandejas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 bandejitas de $\frac{1}{4}$ kg; ¿les alcanza con lo que tienen o necesitan comprar más?

2. En cambio otro día la situación fue distinta: les habían quedado del día anterior 7 bandejas de $\frac{3}{4}$ kg. ¿Les alcanza para completar los 5 kg para el helado de frutillas?

3. Manuel, para ayudar a Rocío, fue a hacer el pedido, pero necesita saber cuántos kilos de frutilla le faltan para completar los 5 kg diarios. Tiene una bandeja de $\frac{3}{4}$ kg, otra de $\frac{1}{2}$ kg, otra de 1 kg y una chiquita de $\frac{1}{4}$ kg. ¿Cuánto tendrá que pedir Manuel al vendedor?

4. El jueves el proveedor les dejó 9 bandejitas de $\frac{1}{2}$ kg y 9 de $\frac{3}{4}$ kg; ¿para preparar el helado de frutillas de cuántos días les alcanza?



Maestro: –*Todos coinciden en que para resolver el problema 3, no se puede multiplicar. ¿Por qué?*
Nacho: –*Porque ahí son todos distintos los números (3/4 + 1/2 + 1 + 1/4).*
Mariano: –*Y porque ahí habla de las mismas cosas.*
Maestro: –*¿Dónde habla de las mismas cosas?*
Mariano: –*Ahí solo son kilos.*
Maestro: –*A ver…, a ver… Acá me hicieron un lío ustedes dos, porque me dijeron que eran distintos los números.*
Mariano: –*Sí… hay diferentes números, pero ahí habla de las mismas cosas… solo de kilos habla ahí.*
Maestro: –*¿Vos entendés lo que dice Mariano? ¿En cuál habla de las mismas cosas?*
Guille: –*En el de multiplicación se repite siempre el mismo número.*
Gaby: –*Sí, pero Mariano decía que eso era en los de suma…*
Mariano: –*Nooooo, yo no digo el mismo número, ¡digo la misma cosa! Ahí son todos kilos los que estoy juntando, no se mezclan las bandejas con los kilos.*
Maestro: –*Ahhh… vos decís que en los problemas de suma hay distintos números pero representan las mismas cosas. ¿Están de acuerdo?*
Coro: –*¡Sí!*
Maestro: –*Bueno, pero entonces es importante mirar bien si son o no las mismas cosas. ¿Y con los números? Algunos dijeron que sí es el mismo número el que se suma es multiplicación.*
Javier: –*En la multiplicación se repite siempre el mismo número.*
Maestro: –*A ver, miremos la suma y la multiplicación para el problema 2. ¿Quién me puede explicar con estos ejemplos cómo es eso? ¿A ver, Rocío?*

Rocío: *–En el problema 2 se repite siempre el mismo número… 3/4.*
Javier: *–Sí, es de multiplicación y cuando se hace la suma se repite siempre el mismo número.*
Antonio: *–Pero en el problema 3 no se suma siempre el mismo número.*
Javier: *–Y por eso no es de multiplicación.*
Maestro: *–Pero hay problemas como el 3 que son de suma pero no son de multiplicación. ¿Por qué?*
Francisco: *–Porque se suman todos números distintos.*
Maestro: *–Entonces en resumen hasta acá podemos decir que hay problemas de suma que no se pueden hacer con una multiplicación porque se suman distintos números. Y los problemas de multiplicación se pueden hacer como una suma en la que se suman los mismos números.*
Maestro: *–Pero, a ver, yo quiero hacer una pregunta, ¿es en el enunciado que se repite el número en los problemas de multiplicación?*
Nacho: *–Nooo.*
Guille: *–Sí.*
Maestro: *–Mmmm… algunos dicen sí y otros no… bueno, piensen eso, miren de nuevo los problemas y me cuentan dónde se repite y cuándo se repite el número.*

Este es el tipo de discusión que pone a los alumnos en el lugar de evaluar las características de una situación que determinan si puede resolverse con suma o multiplicación. Por otra parte, cabe aclarar que es posible hacer este tipo de trabajo cuando todavía no está sistematizado el algoritmo, ya que lo que se busca es que se identifique la situación como multiplicativa o aditiva (en este caso) aunque sigan resolviendo las dos situaciones con recursos aditivos.

Plantear situaciones para avanzar en el análisis de relaciones de proporcionalidad

En este apartado nos ocuparemos del análisis de relaciones de proporcionalidad, entendiendo que un avance en el análisis de las mismas requiere abordar las operaciones de multiplicación y división de fracciones y decimales por un natural y viceversa. Debemos aclarar, sin embargo, que para que los alumnos estén en condiciones de estudiar estas relaciones en el campo de los racionales, es necesario que ciertas propiedades, tales como: ***al doble le corresponde el doble, al triple el triple, etc.*** y ***a la mitad la mitad,*** ya hayan sido trabajadas en problemas con números naturales.

A continuación, presentamos un conjunto de problemas en los que analizaremos las variaciones y dificultades que podrían proponerse.

• Completá las siguientes tablas:
1. Entre los ingredientes que se utilizan para preparar alfajores, se encuentra el almidón de maíz. La tabla siguiente relaciona la cantidad de alfajores que se desean preparar con el peso del almidón necesario para tal fin:

Peso del almidón de maíz (kg)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$			$1\frac{1}{2}$
Cantidad de alfajorcitos		48	24	96	

2. Esta tabla relaciona los precios de las manzanas con sus pesos en kg.

Peso de las manzanas (kg)	5	3	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$
Precio de las manzanas ($)		9			

Los conocimientos que han adquirido los alumnos en relación con la proporcionalidad con naturales les permiten recuperar las relaciones multiplicativas *(a el doble de… le corresponde el doble, al triple de…, a la mitad de…, a la cuarta parte de…)* y aditivas *(a la suma de... le corresponde la suma de…)* para usar herramientas propias de cálculo.

En el primer problema tienen que obtener una fracción como resultado de evaluar la relación entre los enteros 24 y 96 respecto del valor conocido 48. En el caso del 24, deben establecer que se trata de la mitad de 48, por lo tanto le corresponderá un peso igual a la mitad de 1/2, es decir 1/4. Y a 96, como es el doble de 48, le corresponderá el doble de 1/2, o sea el entero. En los otros dos casos pueden apoyarse en estos resultados, a partir de establecer relaciones entre las fracciones, para obtener los valores que se solicitan. El 3/4 podría pensarse como la suma de 1/2 y 1/4 y, por lo tanto, le corresponderá la suma de los valores correspondientes a estos (48 + 24) o, a partir del dato que se tiene para 1/2 y usando 3/4, que es la suma de 1/2 + 1/4, entonces se podrá calcular el valor correspondiente para 1/4 como la mitad de 1/2 y luego sumar los valores correspondientes a estos dos. Para 1 1/2 también deben apelar a la idea de que a la suma de dos valores de una de las variables le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra variable.

En el segundo problema, es necesario averiguar, al inicio, el precio de 1 kg de manzanas porque a partir de este valor se pueden obtener los demás precios.

Así, para saber el precio de los 5 kg, será suficiente con multiplicar por 5 ese valor. Y para el caso de 1/2 kg y 1/4 kg, habrá que dividir por 2 y por 4, respectivamente, el precio de 1 kg hallado. La dificultad en este problema está dada por el cálculo de la mitad de un entero que arroja un decimal (3 : 2 = 1,5), lo mismo que para la mitad de la mitad (1,5 : 2 = 0,75). Aun así el contexto del dinero es de gran ayuda, por cuanto les permitirá utilizar resultados y relaciones entre determinados valores conocidos para determinar los precios solicitados.

Por otro lado, estamos pensando en alumnos que vienen obteniendo resultados a partir de cálculos "pensados", esta es la razón por la que en el análisis que hacemos no consideramos la posibilidad de que comiencen a realizar el cálculo para 5 kg a partir de saber el precio de 3 kg, dado que esto demandaría el uso de la regla de tres simple. Desde nuestro punto de vista, y dado que se trata del inicio de estos aprendizajes, no es necesario promover el uso de esta regla.

En función de los conocimientos disponibles de los alumnos, es posible avanzar incluyendo algunos problemas donde la constante de proporcionalidad sea un número racional (1/2, 0,5, 1/4), como por ejemplo en el caso siguiente.

- Para la venta de frutillas se utilizan bandejas de diferentes tamaños, lo que hace que los pesos del contenido de frutillas varíen de una a otra. Completen estas tablas que relacionan la cantidad de bandejas con el peso total del contenido de estas, para bandejas de diferentes tamaños:

Cantidad de bandejas de frutillas	3	2	9	7		
Peso del contenido (kg)	$\frac{3}{4}$				$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$

Cantidad de bandejas de frutillas	2	5	6	1	
Peso del contenido (kg)	$1\frac{1}{2}$				3

Aquí, como en las demás situaciones, es necesario comparar los valores dados de las dos magnitudes para determinar la relación entre ellas. Sin embargo, esto no es "visible" tan fácilmente pues 3 no es múltiplo de 3/4. Recordemos que las relaciones de múltiplo y divisor se dan entre los enteros.

Para el primer caso, se podría comenzar por obtener el valor correspondiente a 9 bandejas, teniendo en cuenta que este número es el triple de 3, y calcular así el triple de 3/4; luego sería posible seguir con el cálculo de cuántas bandejas corresponderían a 11/2 kg, teniendo en cuenta que este valor representa el doble de 3/4. También es posible considerar que 3/4 = 3 x 1/4, lo que permite advertir que cada bandeja pesa 1/4. Para obtener cuánto pesan 7 bandejas, también es posible utilizar distintos procedimientos, por ejemplo calcular el peso de 6 bandejas (obteniendo el doble de 3/4) y luego sumándole el peso de 1 bandeja o restando al peso de 9 bandejas el peso de 2 bandejas. Socializar estos diferentes caminos permitirá sistematizar conclusiones acerca de los diferentes procedimientos posibles y la vinculación que estos tienen con las relaciones de proporcionalidad. En la puesta en común también hay que evaluar los datos que proporciona la tabla y decidir, en función de este análisis, de qué modo conviene calcular. No se trata de seguir el orden en el que aparecen los valores en la tabla, sino de analizar cuáles sirven para calcular otros de manera más económica.

Este es el tipo de análisis y discusiones que buscamos con estas propuestas, ya que lo que propiciamos en 5º año/grado es la elaboración de recursos de cálculo adecuando los mismos a las diferentes situaciones presentadas, de manera de preparar el camino para la sistematización de estrategias generales a realizarse en 6º año/grado. Es decir, una vez más, la técnica experta y general debería ser el cierre de los aprendizajes obtenidos a partir de todo un proceso de enseñanza que dura varios años/grados y que, en este caso, se ha iniciado en 4º año/grado con los números naturales.

Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales al resolver problemas

El aprendizaje de diferentes procedimientos y técnicas de cálculo en el campo de los racionales incluye un trabajo con los algoritmos, el cálculo mental y el uso de la calculadora. Se busca formar un sujeto que sea capaz, frente a un problema, de decidir si lo que se le requiere es una respuesta exacta o una aproximada y, en función de esto y del tipo de números involucrados, cuál es el procedimiento de cálculo más pertinente.

Cuando se pone el acento sobre la enseñanza de los algoritmos, muy rápidamente los aprendizajes de los alumnos quedan reducidos a la memorización de un conjunto de reglas para cada una de las operaciones y se empobrece la comprensión de las mismas. Es más, la aplicación de las reglas remite directamente a operar con naturales, los numeradores y los denominadores, sin que se advierta que cada fracción es un número.

Por ejemplo, si para sumar $5\ {}^{3}/_{4}$ + 7/2 los alumnos solo dispusieran del recurso del algoritmo (buscando el común denominador), se perderían una buena oportunidad de poner en juego relaciones entre las fracciones como:

Nahuel

En un entero hay cuatro cuartos así que 5 es $\frac{20}{4}$. $\frac{7}{2}$ son $\frac{14}{4}$ y entonces el resultado es
$20+3+14$ $\frac{37}{4}$ que es 9 y $\frac{1}{4}$

Melina

$\frac{3}{4}$ es $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$
$\frac{7}{2}$ más $\frac{1}{2}$ es $\frac{8}{2}$ que es 4
5 y 4 es 9 y $\frac{1}{4}$ que queda $9\frac{1}{4}$

Entender la cuenta de estas maneras no es lo mismo, bajo ningún punto de vista, que solo saber el algoritmo para resolverla. No se aprende lo mismo si solo se toma contacto con el "final de la película" que si se participa en la elaboración de la misma. Al respecto, resulta esclarecedora la siguiente afirmación:

Centrar la enseñanza de fracciones tomando el algoritmo como punto de partida olvida completamente la historia de los conocimientos matemáticos en general y de los algoritmos en particular. Estos representan un lugar de encuentro, de síntesis, son y han sido los procedimientos más económicos que cada cultura fue capaz de construir en su tiempo. En tanto más económicos, necesariamente posteriores a aquellos que han sido dejados de lado. La escuela no alienta a que los alumnos (ni los docentes) reflexionen sobre este tipo de cuestiones"[31].

No estamos afirmando que los alumnos no deban aprender los algoritmos, sino que si el punto de partida y de llegada de la enseñanza se asienta en el aprendizaje de los mismos, el campo de acción de los alumnos se verá enormemente reducido. Tampoco se trata de cambiar una regla por otra ahora hay que pasar primero a fracciones equivalentes para luego sumar o restar. Estamos pensando en darles la posibilidad a los alumnos de llegar a las reglas, pero partiendo de recursos de cálculo producidos por ellos, privilegiando de esta manera la comprensión y control de los cálculos.

Para lograr que los alumnos se involucren en un trabajo como el citado anteriormente, es necesario presentarles situaciones que vayan de los problemas a los recursos de cálculo (cálculo mental y posteriormente a los algoritmos) y viceversa. De esta manera, estaríamos instalando la idea de que los cálculos son herramientas que permiten resolver los problemas, pero que, al mismo tiempo, estudiarlos en sí mismos permitirá determinar, entre otras cosas, los alcances y

[31] Ponce, H. (2000), *Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el Segundo Ciclo.* Buenos Aires. Novedades Educativas

límites de su utilización. La elaboración de estrategias y el estudio de las mismas son dos actividades esencialmente diferentes, pero imbricadas al mismo tiempo; mientras que una los enfrenta con la necesidad de buscar y producir procedimientos de solución a problemas, la otra los pone en situación de hablar de los mismos y les abre la posibilidad de adquirir mayor dominio sobre ellos. Esta es la razón por la que presentamos las actividades organizadas en dos apartados diferentes: “Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo” y “Plantear situaciones para explicitar estrategias de cálculo mental”.

Plantear situaciones para elaborar y comparar diferentes procedimientos de cálculo.

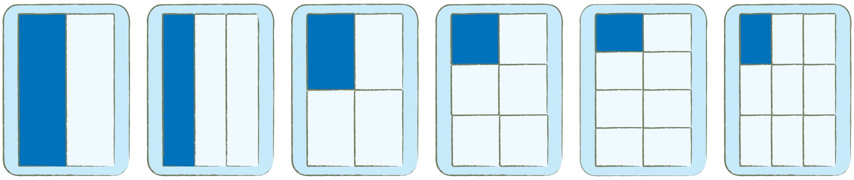
La propuesta para este año es retomar los procedimientos conocidas e incluir otras fracciones (con numerador 1 y mayor y menor que uno, números mixtos, tercios, sextos y novenos, etc.) y decimales (con décimos, centésimos y milésimos) para hacer progresar a los alumnos en sus conocimientos acerca de dichas estrategias. El estudio de los distintos procedimientos de cálculo puede pensarse recuperando los que producen los alumnos al resolver problemas o al jugar para abordar luego el estudio de las estrategias de cálculo independientemente de los contextos que les dieron origen.

En este sentido, para resolver 3/2 + 1/4, haber resuelto problemas antes ayuda a recurrir a ellos para poder pensar algo: *esto es lo mismo que cuando hacíamos el problema de los alfajores, 3/2 era lo mismo que 6/4, entonces si sumo otro cuarto es 7/4…* Los procedimientos que los niños producen se asientan en conocimientos ya trabajados sobre las relaciones entre las fracciones y entre estas y el entero (en 1 entero hay dos medios, cuatro cuartos, tres tercios, ocho octavos; en 1/2 hay dos cuartos, cuatro octavos, etc).

Para dar lugar a la elaboración de estrategias personales de **suma de fracciones**, es posible proponer juegos de cartas como el siguiente:

> **“El uno”:**[32] construir un conjunto equivalente a un entero.
> **Materiales:** se necesitan 2 mazos de 32 cartas cado uno: uno rojo y uno azul. Cada mazo está formado por cartas con rectángulos y, en cada caso, se han pintado: 2 cartas con 1/2, 3 cartas con 1/3, 4 cartas 1/4, 6 cartas 1/6, 8 cartas con 1/8, 9 cartas con 1/9.

[32] Elaborado por el equipo de Matemática de la Asesoría Técnico-Pedagógica del Consejo General de Educación: I. Saiz, C. Camerano y C. Barrionuevo.



Organización de la clase: se juega en grupos de 3 o 4 jugadores.
Desarrollo: se reparten 10 cartas a cada integrante. Cada jugador trata de formar un conjunto equivalente a un entero con las cartas que le tocaron. El juego equivalente a uno con el menor número de cartas gana la vuelta. Luego, se reparten las cartas que quedaron sin repartir y se vuelve a jugar.

“Escoba del uno”: sumas que dan 1.
Materiales: los mismos que para el juego anterior.
Organización de la clase: se juega entre 3 o 4 jugadores.
Desarrollo: se reparten 3 cartas a cada jugador y se colocan 4 cartas boca arriba en el centro de la mesa. Cada jugador, por turno, trata de formar un entero con una de sus cartas y la mayor cantidad de cartas de la mesa. Si lo forma, las levanta y las coloca a su lado. Si no puede formar un entero, tira una de sus cartas al centro de la mesa. Continúa el siguiente jugador. Una vez que juegan los 4 jugadores, se reparten nuevamente 3 cartas a cada jugador, pero no se agregan nuevas cartas al centro. Gana un punto cada jugador que haya formado un entero recogiendo todas las cartas de la mesa y otro punto por el mayor número de cartas recogidas.

Una característica de estos juegos es que favorecen la adquisición del sentido de la suma como reunión de las partes de un todo y en todos los casos se trata de sumas de fracciones de numerador uno.

A partir de estas situaciones, se puede iniciar el proceso de descontextualización con vistas a que los alumnos dispongan de las estrategias de cálculo que pudieron haber elaborado en este contexto. Para esto, luego de jugar, una primera actividad podría ser proponer un conjunto de cuentas que simulen jugadas. Por ejemplo, para el caso de la “escoba”, se puede proponer:

• Martín tiene entre sus cartas una de $\frac{1}{6}$, y en la mesa hay dos cartas de $\frac{1}{6}$, una de $\frac{1}{2}$, una de $\frac{1}{3}$ y dos de $\frac{1}{4}$. Él dice que la mayor cantidad de cartas que puede levantar para formar un entero es de 4.
¿A qué cartas se refiere?

Haciendo variar la cartas de la mesa y las que podría tener un jugador se puede hacer que los alumnos pongan en juego distintas relaciones entre las fracciones y con el entero. Es importante que estas variaciones las piense y plantee el docente, porque es el que tiene claro los objetivos de aprendizaje y, en consecuencia, el que sabe cuáles son las "partidas" más pertinentes para introducir las discusiones y posteriormente las conclusiones que quiere obtener.

Posteriormente a las partidas simuladas, una variante que permite seguir profundizando el análisis de las estrategias de cálculo que pudieron haber elaborado en el contexto del juego es la siguiente:

- Usando el mismo tipo de procedimientos que en el juego "Escoba del uno" decí cuáles de estas sumas dan un entero. En el caso de no ser así, decí cuánto sobra o cuánto falta.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

d) $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$

- Buscá el total de:

a) $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$

- Resolvé:

a) $\frac{8}{2} + \frac{9}{8} + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} =$

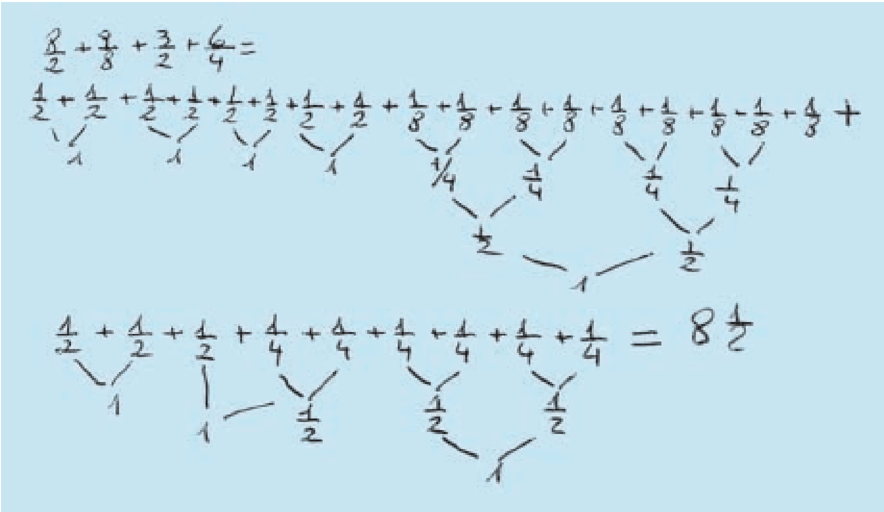
b) $3\ \frac{6}{8} + \frac{18}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{4} =$

c) $3\ \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{12}{4} - \frac{7}{8} =$

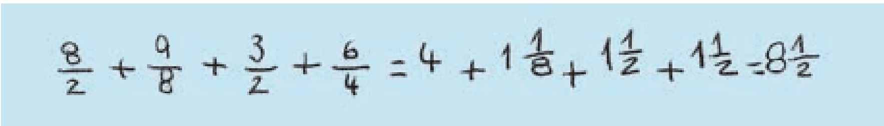
Es importante destacar que este tipo de ejercicios pone a los chicos en situación de usar lo aprendido a partir de los juegos y de las actividades como las señaladas antes (completar enteros), pero también estamos apelando a que los chicos se conecten con otros conocimientos tales como: que en 1/2 entran dos cuartos, cuatro octavos, etc.

A continuación, veremos cómo resolvieron el punto a) del tercer ejercicio alumnos que estuvieron realizando un trabajo como el anterior, ya que de otro modo es poco probable que surjan producciones como las siguientes.

Gonzalo



Yoel



Para que los alumnos avancen desde procedimientos como el primero hacia el segundo, se hace necesario confrontar estas producciones para analizarlas. El primer caso muestra claramente un procedimiento ligado al juego. Para este alumno, 8/2 es 8 veces 1/2 y lo tiene que explicitar (por escrito) para posteriormente armar los enteros, no ve ***de entrada***, como el otro alumno, que 8/2 es 4 enteros. Es decir, que tiene que desagregar para luego armar los enteros, evidenciando que aún no se ha apropiado de una definición de fracción como 1/n x n veces = 1, que es precisamente lo que se está usando en el segundo caso. El alumno relaciona cada fracción con el entero anotando lo que *sobra*, y luego halla el total de enteros y la fracción *sobrante*: 8 1/2. A partir de la comparación, tiene que quedar claro para toda la clase que en el segundo procedimiento se usa la relación que tiene cada fracción con el entero *el octavo entra 8 veces en el entero* o *con 8 octavos se forma un entero* y de la misma manera para los casos de los cuartos y medios.

Un trabajo similar al analizado para las fracciones se puede realizar con las **sumas de decimales**. Presentamos a continuación un juego que remite a un posible inicio en el tratamiento del cálculo mental con estos números.

"El cinco y medio": suma de números decimales.
Materiales: se juega con las siguientes cartas, y se arma un mazo con cuatro de cada una.

0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,25 | 2,50 | 2,75

Organización de la clase: se juega en grupo de 4 jugadores.
Desarrollo: se reparte una carta para cada jugador y tiene que pedir todas las cartas que quiera para tratar de aproximarse lo más posible a 5,5. Cada jugador decidirá cuándo le conviene "plantarse", para no pasarse del valor indicado. Se anota un punto el jugador que más se acerque en cada vuelta.

En el caso de la **multiplicación de un número natural por una fracción y de la división**, ya planteamos en el apartado *Para operar con fracciones y decimales al resolver problemas* algunas situaciones que, al mismo tiempo que dan sentido a estas operaciones, permiten analizar los recursos de calculo utilizados. Para ampliar estos recursos de cálculo, es posible considerar nuevamente un juego que permite introducir otros números y otras relaciones.

“¿Partes o veces?”: multiplicación y división con fracciones.
Materiales: 20 tarjetas con números como las dibujadas.

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{6}$
2	32	16	8	24
12	4	6	28	20

Dos mazos uno rojo y uno azul, de 10 tarjetas cada uno, con las siguientes leyendas.

Calcular $\frac{1}{4}$ de...	Calcular $\frac{1}{2}$ de...	Calcular $\frac{3}{4}$ de...	Calcular $\frac{3}{4}$ de...
Calcular $\frac{1}{8}$ de...	Calcular $\frac{1}{8}$ de...	Calcular el **doble** de...	Calcular el **triple** de...
Calcular el **cuádruplo** de...	Calcular el **quíntuplo** de...		

Organización de la clase: se divide el curso en 2 grupos.
Desarrollo: se mezclan todas las tarjetas con leyendas, las rojas y las azules, en un mazo y las tarjetas con números se separan en dos mazos por color. Se ubican los tres mazos boca abajo, por separado, sobre el escritorio. Los 2 grupos participan por turno a través de uno de sus integrantes por vez. Pasa un alumno de uno de los grupos y saca una carta del mazo de las cartas con las leyendas y otra carta del mazo de los números, según el color que corresponda. Muestra ambas cartas a toda la clase, por ejemplo, "calcular 3/4 de 16". El alumno debe decir lo más rápido posible el resultado, pues tiene 2 minutos como máximo, y lo anota en el pizarrón. Es conveniente que dicho alumno anote o recuerde cómo hizo para calcular el resultado, porque eso se pondrá en discusión una vez terminada cada ronda.

Se juegan 6 u 8 partidas, aproximadamente, no menos. Luego de realizada esa ronda del juego (3 o 4 alumnos de cada grupo), se analiza entre todos los alumnos, en el pizarrón, si los resultados son correctos, y se le otorga el puntaje correspondiente. Si hay dudas, el alumno que obtuvo el puntaje debe explicar lo que hizo, así se decide la validez de la respuesta. Se juegan varias rondas y gana el grupo que haya obtenido mayor puntaje.

Una vez finalizado el juego, sería conveniente organizar una actividad colectiva de reflexión sobre lo realizado. Por ejemplo, *preguntando si todas las tarjetas les ofrecieron igual dificultad*, haciendo un listado de procedimientos que utilizaron en las fáciles y en las difíciles, analizando la diferencia entre uno y otro caso.

Plantear situaciones para explicitar estrategias de cálculo mental

Para que una estrategia de cálculo se transforme en una estrategia disponible para cada uno de los alumnos de una clase, no es suficiente con que participen en actividades como los juegos, aun con todas las ventajas que esta producción propia y original implica. Es necesario ocuparse de las estrategias de cálculo, desde la comprensión de los procedimientos elaborados por otros y el análisis de las diferencias entre uno y otro, hasta hacerlas propias a partir de utilizarlas, de reconocer sus límites y ventajas, etc. Algunas actividades de esta clase ya han sido propuestas en el apartado anterior.

Además, es posible proponer nuevos problemas en los que se deban utilizar las estrategias ya descubiertas con otros números: fracciones mayores y menores que los enteros, otras de denominadores diferentes a los cuartos, medios y octavos. Por ejemplo, el siguiente problema.

• Resolvé las siguientes sumas, agrupando primero los enteros.

a) $\frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{5}{2} =$

b) $\frac{11}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{2} + \frac{13}{8} =$

c) $\frac{7}{5} + \frac{12}{10} + \frac{2}{5} + \frac{21}{10} =$

d) $\frac{4}{3} + \frac{12}{9} + \frac{1}{2} + \frac{19}{3} =$

En el primer cálculo, se obtiene fácilmente $7\,{}^{1}\!/_{4}$. Sin embargo, en los otros ejercicios se introducen algunas dificultades. En b) hay una fracción que es menor que el entero y el resultado podría quedar expresado provisoriamente como $6\ {}^{1}\!/_{2}\ {}^{3}\!/_{4}$. En este caso, en el 1/2 + 3/4 hay un entero y 1/4, por lo que es preciso usar relaciones entre estos números también para armar enteros. En los ítems c) y d) también se necesita realizar un análisis similar, pero en estos casos apelando a relaciones entre décimos, quintos, tercios y novenos, respectivamente.

A continuación, presentamos un fragmento de registro que muestra la dificultad de los alumnos para entender una actividad "nueva" para ellos, como la que les estamos planteando aquí y cómo el docente puede guiar la confrontación para que se centre en lo que efectivamente se pretende discutir y no se desvíe a una simple corrección de los resultados.

Registro de clase

José

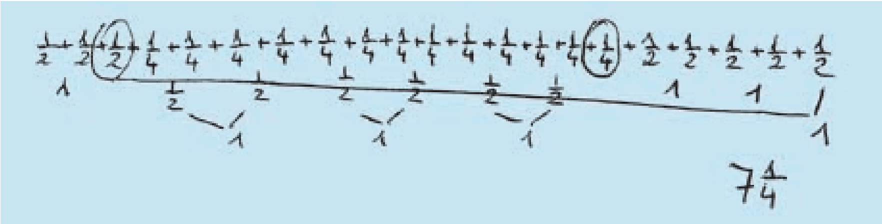
A)

$1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{4} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{4}$

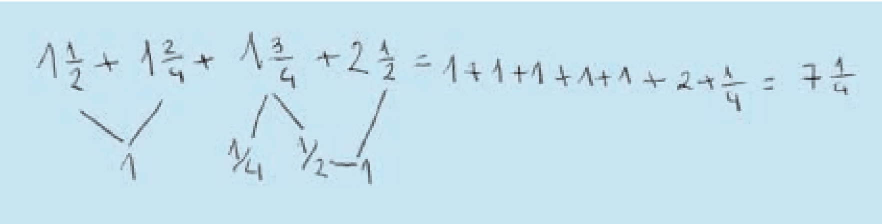
1

$1\frac{1}{4}$

Martín



Rocío



Maestra: –*Bueno, chicos, vamos a mirar cómo hicieron acá los compañeros. Vamos a controlar si respetaron la consigna.*
Federico: –*Sí, seño, Martín y Rocío hicieron igual… porque les salió el mismo resultado, pero José hizo mal.*
Maestra: –*A ver… ¿vos decís que estos dos están de acuerdo a la consigna porque les salió el mismo resultado? ¿Están de acuerdo con Fede?*
Marisa: –*Sí, seño, está bien lo que hicieron Martín y Rocío.*
Augusto: –*Está bien… pero no lo hicieron armando directamente los enteros… eso había que hacer… ¿no, seño?*
Maestra: –*Eso es lo que les estoy preguntando… si están cumpliendo con la consigna… ¿Cuál era la consigna?*
Karina: –*Resolver usando el procedimiento que vimos ayer.*
Augusto: –*Sí, eso digo yo… que había que armar directamente los enteros.*
Maestra: –*¿Y qué quiere decir eso de armar directamente los enteros? A ver, ¿quién lo puede explicar de otra manera? Ayer hablamos bastante sobre ese procedimiento.*
Pedro: –*Yo, seño…*
Maestra: –*A ver…*
Pedro: –*Ayer dijimos que hay que tener en cuenta que 4 de un cuarto forman un entero… y no estar haciendo…1/4 y otro 1/4 es 1/2, 1/4 y otro 1/4 es 1/2… y así, hay que decir directamente 4 de un cuarto ya son un entero.*

Rocío: *–Sí seño, si tenemos 6/4 ya sabemos que con 4/4 formamos un entero, eso ya lo sabemos... no necesitamos hacer todo ese lío.*
Maestra: *–Bueno, entonces, acá lo que tenemos que controlar es si usaron ese procedimiento o no… eso sería en este caso analizar si se respeta la consigna… miren los procedimientos y les vuelvo a preguntar enseguida…*

Hasta aquí estuvimos proponiendo que utilicen un procedimiento en particular, con el objetivo de que se apropien del mismo. Introducimos también variaciones en las cantidades, para hacer aparecer nuevas problemáticas. Nos referimos, en este caso, a *cómo hacer para sumar dos fracciones como 1/2 y 3/4*, para luego analizar cuáles son los procedimientos posibles y cuáles son las características particulares que tienen estas fracciones que los hacen posibles (sus denominadores son múltiplos).

Se puede incluir también el análisis de nuevos procedimientos con la siguiente consigna:

- ¿Cómo pensaron los que hicieron estas sumas?

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ o

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ y $\frac{1}{4}$.

Aquí, mientras que en el primer caso se está pensando que *1/2 es lo mismo que 2/4*, es decir, transformando una de las fracciones en una equivalente de igual denominador que la otra, en el otro caso, se está pensando cómo hacer para completar al entero y, para ello, se desarma una de las fracciones, sacando lo que le falta (saca 1/2 de 3/4) para llegar a 1. Al tener dos procedimientos, es posible proponer el análisis de cuándo conviene usar cada uno, como se plantea en la siguiente actividad.

- Calculá las siguientes sumas y restas. Antes de hacerlo, pensá si conviene utilizar equivalentes o completar enteros.

a) $\frac{6}{7} + 1 =$ c) $\frac{19}{5} - 2 =$ e) $\frac{17}{4} - 1 =$

b) $\frac{17}{3} + 1 =$ d) $\frac{3}{5} + 2 =$

Profundizando aun más el análisis que venimos haciendo, se podría proponer que inventen otras sumas que se puedan resolver con este procedimiento, de manera de acercarlos a la explicitación de los límites de utilización del mismo. Otra variante posible para este mismo fin es presentar un listado de sumas solicitando que reconozcan en cuáles de ellas se puede utilizar el mismo procedimiento y en cuáles no.

En el juego del “Cinco y medio”, los alumnos estuvieron realizando sumas de ciertos números (mitades, cuartos, tres cuartas partes de enteros) componiéndolos, con el objetivo de formar una cantidad lo más cercana posible al 5,5. La socialización de las “maneras de arreglarse” de algunos alumnos es un inicio interesante en la discusión de los distintos procedimientos, pero es preciso plantear a toda la clase actividades como:

• Un alumno recibió la carta con el 0,75, entonces pidió 4 cartas y recibió las siguientes: 2,25 – 1,50 – 0,25 – 0,50. ¿Cuál podría ser una manera rápida de obtener el total?

• Resolvé los siguientes cálculos agrupando los números de tal manera de obtener una respuesta lo más rápida posible:

a) 4,25 + 1,50 + 2,25 =
b) 2,75 + 3,50 + 1,25 + 5,50 =
c) 1,50 + 9,25 + 1,75 + 2,25 =

En relación con el juego “¿Partes o veces?”, se podría pensar en una secuencia similar a las ya analizadas. En este juego no es lo mismo sacar tarjetas que impliquen calcular la mitad de cualquiera de los números, que si hay que calcular la cuarta parte, la octava parte, o las tres cuartas partes. Al calcular mitades de los números de las cartas azules, siempre se obtienen enteros pero, por ejemplo, es más complejo obtener la cuarta parte de 6 y aun más complejo calcular 1/8 de 1/2.

Todas estas actividades buscan que se expliciten procedimientos y se dispongan en la memoria de una serie de relaciones entre las fracciones y con el entero para encontrar equivalencias, resolver sumas o restas y encontrar fracciones de números naturales, determinando cuáles son las estrategias más económicas y/o convenientes.

Para trabajar con la información

En este apartado, incluimos propuestas que toman la idea de tratar información desde una perspectiva amplia que implica no solo reflexionar acerca de cómo trabajar con los datos, sino también cómo obtener, organizar y representar conjuntos de datos. En principio, y como ya se ha expresado en los cuadernos anteriores, cada vez que se resuelve un problema se trata información. Por lo tanto, son aspectos propios de la resolución del mismo el análisis de los datos en un contexto y el modo en que estos se presentan, con enunciado verbal, gráficos o tablas, la selección de incógnitas, el número de soluciones (una, varias, ninguna), entre otros tantos.

En este sentido, la variación en la presentación y en las preguntas asegura una mejor posibilidad de resolución de situaciones fuera de la escuela pues, en general, los problemas que se deben resolver en estos casos no se presentan con un enunciado y, muchas veces, para una cierta pregunta, no tenemos toda la información necesaria para responderla.

Por otra parte, las actividades ligadas a la obtención, organización y representación de conjuntos de datos dan inicio, en el Segundo Ciclo, a enfrentar a los chicos con nociones que luego invertirán al estudiar estadística.

Estas actividades, ya propuestas para años anteriores, comienzan con la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados. En 5º año/grado proponemos avanzar hacia actividades en las que sea necesario pasar la información de una forma de presentación a otra incluyendo, además de las conocidas, los gráficos de barras y los pictogramas.

Es importante aclarar que los ejemplos que incluimos en este apartado corresponden a contenidos incluidos en el Eje "Número y Operaciones". Sin embargo, el trabajo de tratamiento de la información que aquí recuperamos es transversal a todos los contenidos señalados en los NAP, por lo que al desarrollar los contenidos del Eje "Geometría y Medida" incluiremos otras propuestas similares.

Plantear situaciones para establecer relaciones entre datos e incógnitas

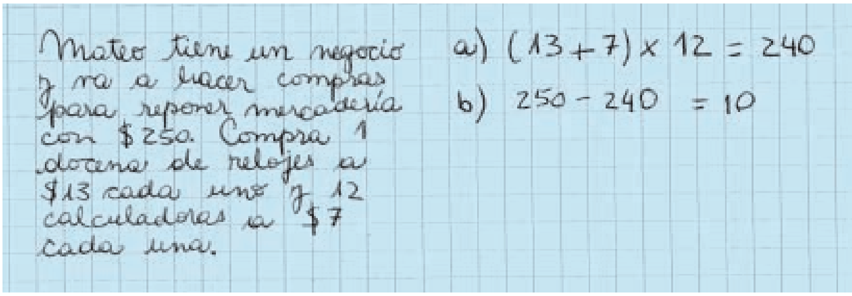
Una tarea interesante es la producción de problemas a partir de diferentes informaciones. Así, cuando un alumno produce un problema o lo transforma –al incluir otros datos o idearle posibles preguntas– intervienen en el proceso tanto su posibilidad de interactuar con la información como el sentido matemático que les otorga a las nociones involucradas en el contexto planteado.

Por ejemplo, podríamos ofrecer preguntas con referencia a un contexto para que los chicos describan la situación y elijan los datos adecuados, o bien darles un cálculo o una medida y que deban proponer un problema que incluya su realización, o también formular la pregunta en función de una resolución dada.

1. Proponé un problema que se resuelva con el cálculo: 240 : 4.
Modificá el problema que formulaste, para que se resuelva con 240 : 4 – 52.

2. ¿Cuáles pueden ser la o las preguntas de este problema si para responderlas un chico hizo estas cuentas?

Javier


Mateo tiene un negocio y va a hacer compras para reponer mercadería con $250. Compra 1 docena de relojes a $13 cada uno y 12 calculadoras a $7 cada una.

a) $(13+7) \times 12 = 240$

b) $250 - 240 = 10$

La cuenta del problema 1 puede ser pensada como un reparto o como una partición si se tratara de cantidades, pero como no se indica el contexto, también podría ser un problema con números. Analizar los significados atribuidos a las operaciones en las producciones de los chicos permitirá al docente conocer cuáles dominan y cuáles seguir trabajando.

Es posible que, en el problema 2, los chicos enuncien dos preguntas, una para cada cálculo. Una discusión interesante podría plantearse ante una intervención como la siguiente: ¿Es necesario hacer dos preguntas o podríamos hacer una?

Como hemos planteado para los años anteriores, también es importante presentar problemas donde la pregunta tenga más de una respuesta, para que los chicos no construyan la idea de que un problema tiene siempre una única solución.

- Claudio tenía caramelos y los repartió entre 6 amigos, dándole a cada chico la misma cantidad de caramelos, y no le sobró nada. ¿Cuántos caramelos podía tener?

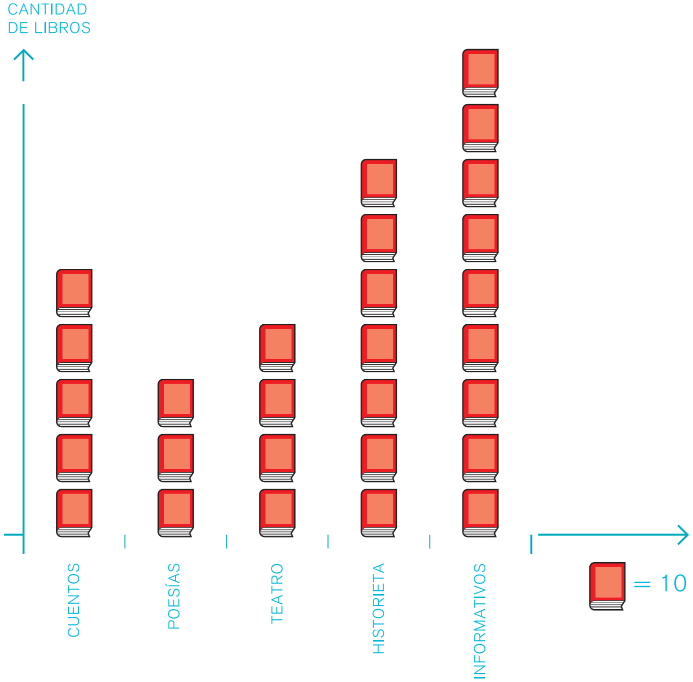
Analizar el texto del problema supone reconocer que Claudio podía tener 6, 12, 18 caramelos, es decir que hay muchos números que responden la pregunta. Las soluciones que podrán hacer los chicos incluirán tanto un único número como un listado de posibles soluciones y algunos reconocerán que esos números son los múltiplos de 6. El problema tiene infinitas soluciones, porque esos múltiplos son infinitos.

Plantear situaciones para obtener y organizar datos

Las actividades para obtener y organizar datos comienzan en el Primer Ciclo, cuando se juega a los dados o se realiza una votación, por ejemplo, para elegir el nombre de la biblioteca del aula, y se registran en una tabla los puntos o votos obtenidos.

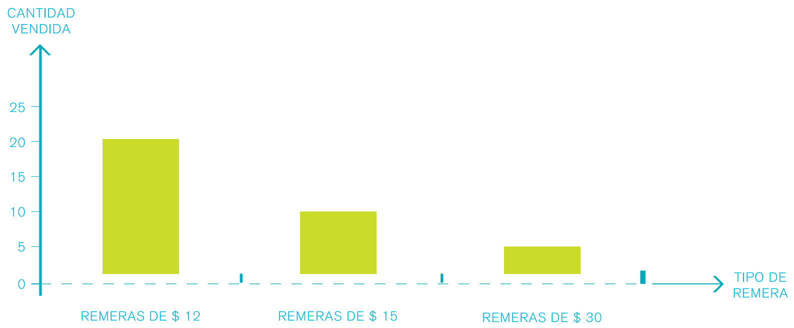
Otras actividades implican la interpretación de tablas y gráficos ya confeccionados. En este sentido, resulta interesante en 5° año/grado incluir la interpretación de los gráficos estadísticos denominados pictogramas. En esta representación, al igual que los gráficos de barra, se usan escalas que conservan la proporcionalidad entre las cantidades intervinientes en la situación. Por ejemplo, en un diario se presenta el resultado de una encuesta:

¿CUÁL FUE EL ÚLTIMO LIBRO QUE LEÍSTE?



A partir de esta imagen es posible plantear diversas preguntas que promuevan la interpretación: *¿Qué tipo de libros son los más leídos? ¿Cuántos chicos respondieron a la encuesta?*, o bien *La bibliotecaria quiere hacer un pedido para comprar 50 nuevos libros, ¿le sirve la información del gráfico para decidir la compra? ¿Cómo?* Otro tipo de actividades que se puede proponer en 5° año/ grado son aquellas donde es necesario pasar la información de una forma de presentación a otra, como por ejemplo la siguiente.

• En un negocio de venta de ropa, se realiza el control mensual de las ventas de cada tipo de mercadería. En el siguiente gráfico, se presentan las ventas de diferentes tipos de remeras durante un mes.



a) ¿Cuántas remeras se vendieron ese mes?
b) ¿Cuánto dinero se recaudó por la venta de remeras?
c) ¿Podrías mostrar esta misma información en una tabla?
d) ¿Cuál de las representaciones muestra más rápidamente las diferencias?
e) Si un empleado del negocio mira el gráfico y realiza la siguiente cuenta: 12 x 10 + 6 x 30, ¿qué pregunta le pueden haber hecho?
f) ¿Podrías trasformar los datos de esta tabla en un gráfico o gráficos como los que usan en este negocio?

Cantidad de remeras vendidas en una semana					
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1ª marca	23	26	17	0	12
2ª marca	12	9	18	0	2
3ª marca	3	5	7	8	10

Además de analizar la información, aquí interesa discutir qué tipo de presentación resulta más adecuada para las necesidades de quien organiza esa información.

Al seleccionar los gráficos que se incluyan en las propuestas es conveniente considerar que las variables representadas sean conocidas por los alumnos o estén siendo estudiadas en el área de Ciencias Sociales y Ciencias Naturales.

nap El reconocimiento y uso de relaciones espaciales y de sistemas de referencia.

El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones, considerando las propiedades involucradas.

La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes expresiones posibles para una misma cantidad.

El análisis y uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas.