

LA TRAMA HEXAGONAL

Ricardo Miró

CORTE SUPREMA DE JUSTICIA
DE LA NACIÓN
Área de Procesamiento de Datos

1. CONTENIDOS GENERALES

El hexágono regular aparece de manera muy llamativa en la naturaleza, cuando se observa la malla que conforman los alveolos de los panales en donde las abejas depositan la miel, fruto de su trabajo incesante. Uno de tales alveolos muestra típicamente la celda básica de todo panal; y considerados en conjunto, constituyen un ejemplo muy notable de prismas colindantes de sección hexagonal regular.

Asimismo, la trama que cubre las circunferencias de los mediomundos usados por nuestros pescadores en nuestros muelles atlánticos, tienen el mismo patrón celular. También, de manera muy conocida, se observa exactamente lo mismo en el alambrado que protege a los gallineros hogareños, tan difundidos en el ambiente rural argentino.

Cabe observar, además, que existen baldosas regulares y de manera ocasional, también mosaicos o losetas de cemento hexagonales, pero nunca pentagonales u octogonales. ¿Por qué esto es así? Se responderá, entre otros interrogantes, a esta cuestión (Le Courbelier, 1955).

El alambre tejido a base de la trama hexagonal constituye ante todo, tautológicamente, un tejido. Ahora bien: ¿qué sucede con los tejidos de lana? El rastreo de los orígenes de esta bella y útil artesanía lleva fácilmente a Egipto, a Babilonia, a Sumeria e inclusive mucho más atrás en el tiempo. Pero surge de inmediato un inconveniente documental importante, que impide observar con atención muestras de tejidos reales muy antiguos.

Como se sabe, la lana se degrada completamente en pocas décadas. Esta verdadera ventaja ecológica, constituye no obstante un serio inconveniente para el estudioso, y entonces resulta muy difícil conjeturar acerca del estilo de tejido o los puntos usados por los artesanos y artistas en el comienzo de la Historia. Las escasas muestras de tejido de lana de mayor antigüedad que se pueden apreciar hoy día, pertenecen a la dinastía isáurica del Imperio Bizantino, y se pueden observar muy bien conservadas en el British Museum o en la conocida mezquita de Sofía en Estambul (Espasa Calpe, 1950).

Mi mamá, Tuca Arancet, que es una tejedora consumada desde la época en que comenzaba a ser festejada por mi papá, fue interrogada a propósito de este artículo. Me comentó que el punto denominado *jersey* es el que consume menos lana para un diseño de prenda específica imaginada a priori. Me mostró luego, muy orgullosa, una larga colección de diseños significativos que lo utilizan con sugestiva belleza (Semper, 1990).

Intrigado por el detalle, tomé una lupa y examiné un viejo pullover mío tejido por ella a base del citado punto, mirando del revés. Ya no me sorprendió encontrar allí, una vez más, la trama hexagonal.

Estimo de manera imperativa recordar -además-, que el eminente Jorge Luis Borges eligió precisa y explícitamente el hexágono regular como módulo de acople arquitectónico básico, en su extraordinaria e inmortal *Biblioteca de Babel* (Borges, 1979).

Vale la pena recordar, de paso, que Jersey es la isla inglesa más extensa del Canal de la Mancha, famosa por las ovejas de la raza homónima que allí se crían. Su nombre proviene de *Kaer-Ceyrya*, que alude en celta latinizado

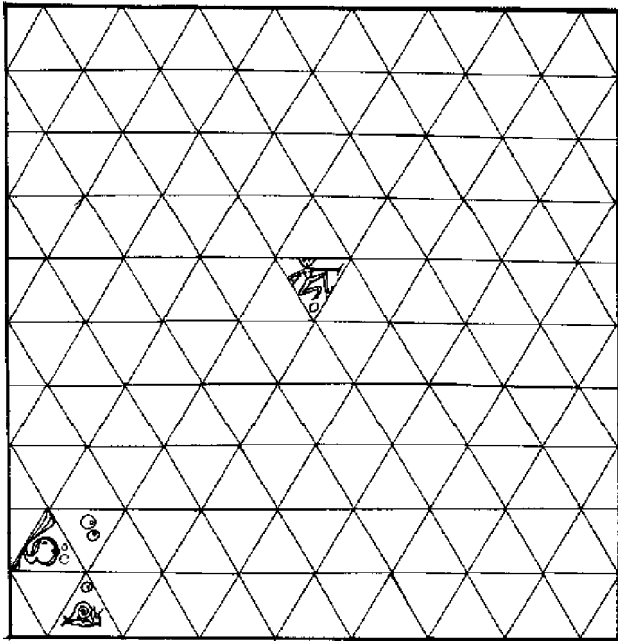


Figura 1

das:

a la *isla del César* (Espasa-Calpe, 1950). Fue allí, precisamente en el año 50 AC, donde los legionarios del genial Julio César hicieron escala antes de desembarcar - como señores y maestros-, en el actual condado de Kent, habitado entonces por coloridas tribus nativas de costumbres seminómadas.

Britania fue así generosamente incorporada a la Civilización de Occidente, cuando ésta tenía ya más de 2000 años documentados con añeja tradición y logros de toda índole. Por una humanitaria decisión imperial, fue incorporado como provincia a Roma, tomando su nombre del héroe troyano Félix Brutus, nieto del glorioso Eneas, honrándolo así para el resto de la eternidad (Monmouth, 1990; Richepin, 1927).

Se demostrarán en este trabajo, a continuación, dos propiedades de ciertas figuras planas muy conoci-

Propiedad 1: *los únicos polígonos regulares que cubren el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.*

Propiedad 2: *para una trama o tejido cuyas celdas tienen un área constante, la generada por el hexágono regular es la más económica de todas, en el sentido de que la longitud total de las fronteras de las celdas - exigidas para realizar un cubrimiento dado-, es la menor de los tres polígonos posibles citados en en Propiedad 1.*

3. CUBRIMIENTOS Y PARTICIONES REGULARES PLANAS

Sea S un plano. Un cubrimiento numerable es una familia $A(i)$ de conjuntos de puntos tal que:

Figura 2

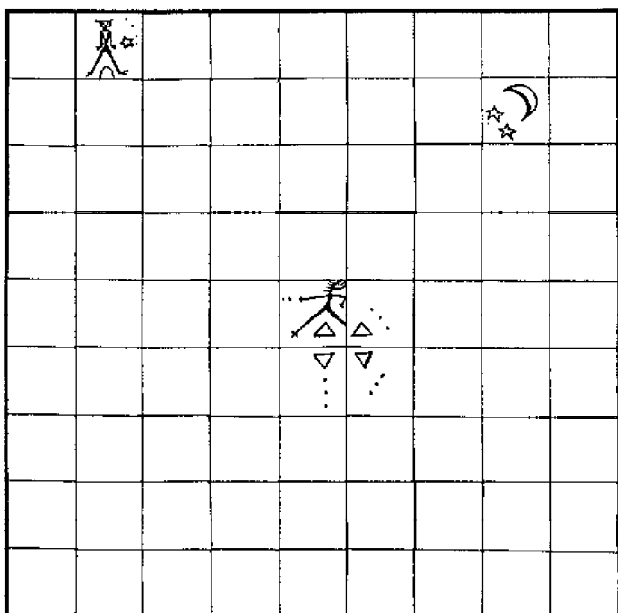
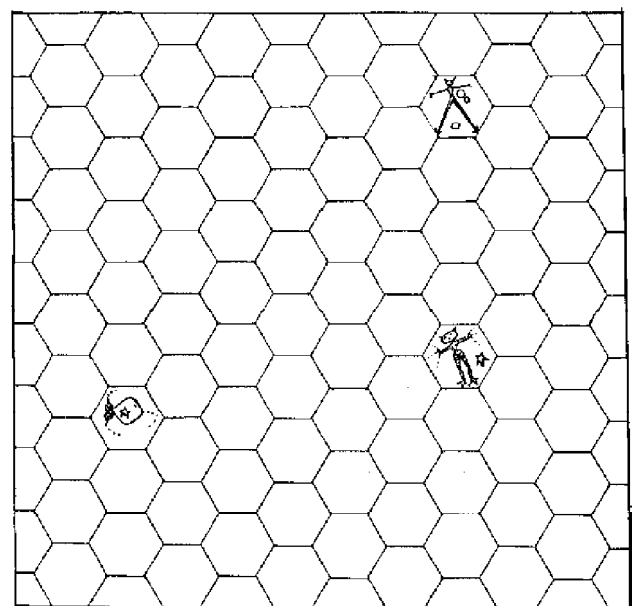


Figura 3



$$S = U A(i) \quad (i \in N).$$

Un cubrimiento numerable $A(i)$ se dice una partición, cuando dos cualesquiera $A(i)$ de la familia, distintos, tienen intersección vacía (Kelley, 1976).

Nos interesará analizar la estructura de particiones del plano realizadas con polígonos regulares: los $A(i)$ en este caso serán tales conjuntos de puntos.

Observemos en este preciso caso, los ángulos interiores de un polígono regular. Un resultado muy conocido -fácilmente deducible en el caso de no recordarlo-, muestra que si P_n es un tal polígono de n lados, entonces, siendo A_n un ángulo interior, vale que:

$$A_n = (1 - 2/n) \pi. \quad (1)$$

Dado que en un vértice perteneciente a un candidato poligonal regular se tendrán que fusionar un número entero k de candidatos congruentes ("idénticos"), se deberá forzosamente verificar que:

$$k A_n = k (1 - 2/n) \pi = 2\pi \quad (k \in N) \quad (2)$$

lo que obliga a detectar para qué valores de n la sucesión siguiente, emergente de (2), posee imágenes que son números naturales:

$$B(n) = 2n / (n - 2). \quad (3)$$

Recurrimos para tal fin al siguiente:

Lema: La sucesión B dada por (3) tiene imágenes naturales si, y solamente si, $n \in \{3, 4, 6\}$.

Demostrar que la sucesión B , explorada sobre el conjunto $\{3, 4, 6\}$ origina imágenes $B(n)$ naturales es sencillo, y basta para ello con hacer la cuenta.

¿Son éstos los únicos números naturales generados por la sucesión B ? Para convencerse de esto, basta calcular $B(5)$ y observar que no es número natural. Para los demás valores posibles de n , resulta crucial observar el comportamiento global de $B(n)$, que es decreciente, es decir que se verifica:

$$B(n+1) < B(n)$$

Entonces, para todo n mayor o igual que 7, es fácil mostrar que se verifica adicionalmente la siguiente acotación:

$$2 < B(n) < 3 \quad (n \text{ mayor o igual que } 7)$$

y el lema queda completamente demostrado (ver figura 4).

Por lo tanto, queda cerrada la cuestión que se enunciara en la **propiedad 1**: los únicos polígonos regulares que cubren el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono (figuras 1, 2 y 3).

Comportamiento de la sucesión $2n / (n-2)$:

Los únicos valores naturales se verifican para $n=3$ (triángulo), $n=4$ (cuadrado) y $n=6$ (hexágono)

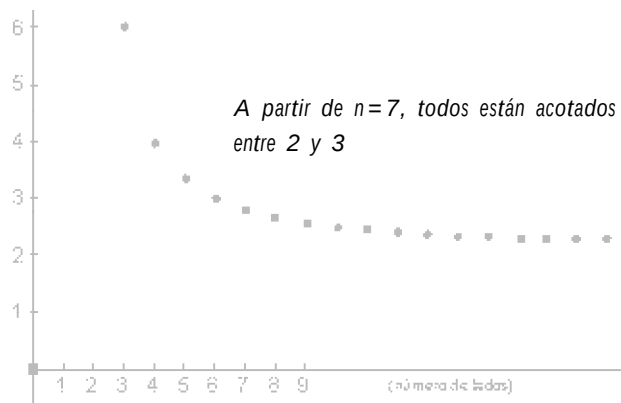


Figura 4

4. LA ECONOMÍA DE LA TRAMA HEXAGONAL

Supongamos tener un polígono regular de n lados con área unidad. La expresión analítica que describe tal circunstancia es, como se recordará:

$$1 = (\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}) / 2 = (n \cdot L_n \cdot A_n) / 2,$$

donde L_n es el lado y A_n es el apotema del polígono regular dado. Valiéndose de un dibujo sencillo (figura 5) se puede aplicar el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo formado por el radio, el apotema y la mitad de un lado del polígono considerado.

Será posible entonces expresar A_n en función del lado L_n de un tal polígono, con lo que se obtiene:

$$L_n = 2 [\text{tg} (p/n) / n]^{1/2} \quad (4)$$

donde p/n es la mitad del ángulo central determinado por el cruce de dos diagonales.

Luego, para demostrar el extenso enunciado expuesto en la **propiedad 2** (cuyo contenido semántico, no obstante, se espera sea claro), bastará ver que se cumplen dos proposiciones:

(i) El perímetro de un hexágono de área unitaria es menor que el perímetro de un cuadrado de la misma área:

$$6 L_6 < 4 L_4 \quad (5i)$$

(ii) El perímetro de un hexágono de área unitaria es menor que el perímetro de un triángulo de la misma área:

$$6 L_6 < 3 L_3 \quad (5ii)$$

La veracidad de (5i) como de (5ii), luego de un manipuleo sencillo de las expresiones analíticas asociadas, está sujeto a la veracidad de las siguientes desigualdades consecuentes: se comprueba sin dificultad que (5i) es equivalente a:

$$3 \text{tg}(p/6) < 2 \text{tg}(p/4) \quad (5i')$$

cuya legitimidad puede garantizarse con una calculadora de bolsillo:

$$1.732 < 1.999.$$

Asimismo, la desigualdad (5ii) está supeditada a la desigualdad final:

$$2 \text{tg} (p/6) < \text{tg} (p/3) \quad (5ii')$$

que también es cierta, ya que se comprueba que:

$$1.15466 < 1.73194.$$

Esto demuestra completamente el enunciado de la **propiedad 2**, con lo que se pretende que la naturaleza de la trama hexagonal, al menos en sus aspectos clásicamente conocidos, haya quedado razonablemente descripta.

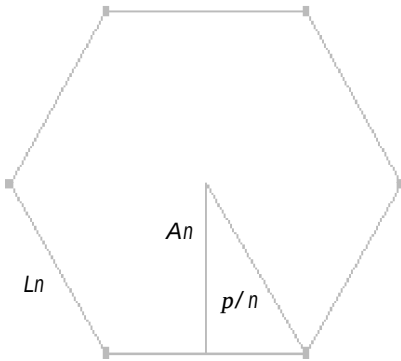


Figura 5



La trama o tejido a base de cuadrados tiene algunas curiosas propiedades vinculadas con las nociones de **medida** e **integral**, y será objeto de un próximo artículo.

5. CONCLUSIÓN

Como corolario de lo expuesto, debe recalcar que la economía de la trama hexagonal constituye un ejemplo muy notable asociado con el ahorro espontáneo que exhibe por sí sola la Naturaleza, cuando se produce en su seno un proceso de consumo o intercambio de energía.

El primero en observar este comportamiento fue el ingeniero greco-egipcio Herón de Alejandría (siglo II AC), quien pudo demostrar que la trayectoria adoptada por un rayo de luz reflejado en un espejo es la más corta, entre dos puntos dados, respecto de todas las demás trayectorias posibles (Taton, 1976).

Con algunas variantes, y utilizando métodos variacionales apropiados, puede decirse que el principio de Herón fue incorporado a la mecánica clásica mediante los trabajos de Maupertuis y, fundamentalmente, de Lagrange y de Hamilton.

Hoy día, el principio de Herón, con todos los refinamientos y elegantes abstracciones contemporáneas, pertenece al cuerpo fundante de elementos sobre los cuales descansa la teoría de la relatividad (Courant y Hilbert, 1953).



Ilustraciones: Catarina Spinetta

Bibliografía

1. Borges, J. L., "La biblioteca de Babel", *Obras Completas*, Emecé, 1979.
2. Courant, R. y Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, 1953.
3. Espasa Calpe, *Enciclopedia Universal Ilustrada*, 1950.
4. Kelley, J., *Topología General*, EUDEBA, 1967.
5. Le Courbeiller, P., "Crystals and the future of physics", *Scientific American*, 1955.
6. Monmouth, G., *Historia de los Reyes de Britania*, Siruela, 1990.
7. Richepin, J., *Nueva Mitología Ilustrada*, Montaner y Simón, 1927.
8. Semper, D., *Tejer con Dora Semper*, Utilísima con Patricia Miccio, 1990.
9. Taton, R., *Historia de la Ciencia*, Destino, 1976.