Aceptado para su publicación en la Sociedad Científica Argentina, 17/06/2000

PRINCIPIO DE MACH Y ORIGEN DE LA INERCIA
Homenaje a Enrique Loedel

Jorge Guala Valverde
Subsecretaría de Educación de la Provincia del Neuquén
Fundación Julio Palacios

Salta 326, (8300)Neuquén, Argentina
E.Mail: fundacionjuliopalacios@usa.net

RESUMEN

Comentamos en este artículo la pionera implementación matemática del Principio de Mach debida a Erwin Schrödinger (*Annalen der Physik,*1925), y la reciente contribución de Andrè Assis en su singular obra *Relational Mechanics* (*Apeiron,* Montreal, *1999*). Destacamos la importancia de este principio relativista para intentar una mejor comprensión del origen de la inercia.

Se dedica este trabajo a la memoria del Doctor Enrique Loedel, brillante intelecto que mucho contribuyó a la sólida formación científica de tantos estudiosos de habla hispana, tanto en los niveles superior como medio de la enseñanza.

ABSTRACT

The possible gravitational origin of inertia is discussed. The first implementation of the fully relativistic Mach´s Principle was, as far as we know, due to Erwin Schrödinger (*1925,Annalen der Physik*). Recently Andrè Assis (*1999, Apeiron*, Montreal) wrote a far reaching book in which the link between local inertia and distant matter is rigorously explored. The work is devoted, *in memoriam*, to the outstanding physicist Enrique Loedel.

1 DEDICATORIA

El espíritu crítico de Enrique Loedel trascendió el selecto ámbito de los científicos de primera línea, su terreno natural, para alumbrar otras parcelas de la actividad cultural. Nos referiremos aquí al empeño puesto por nuestro ilustre homenajeado en llevar a los niveles de la enseñanza media claros conceptos de lo que es hoy la ciencia física.

Loedel era plenamente consciente de que los años juveniles brindan la irrepetible posibilidad de conformar, en mente, un esquema del mundo físico, representación conceptual y simbólica que demandó milenios de esforzada labor a la Humanidad.

Y, cómo buen filósofo que fue, sostenía la necesidad de ofrecer el *mejor alimento* intelectual a las mentes juveniles, en pleno desarrollo.

Sólo al pasar recordaremos, en este ensayo, la brillante carrera que culminó Loedel en la Universidad de La Plata, por los años 25. También que fue discípulo de Planck y de Schrödinger, en Berlín. Que su original representación de la transformación de Lorentz-Einstein mereció beneplácito mundial[1,2,3] y que, en fin, nos permitió a tantos comprender muchas sutilezas de las teorías einstenianas de la relatividad, tanto especial como general, merced a su magistral tratado[4] *FISICA RELATIVISTA*.

Hoy ponderamos otra faceta, no menos importante, de la labor de nuestro sabio: su maestría en la transferencia del conocimiento en la enseñanza media.
Y nos ha parecido el honorable seno de la Sociedad Científica Argentina, el ámbito adecuado para hacerlo. Máxime a la vista de los recientes avances acaecidos en el dominio de las Ciencias Mecánicas, que robustecen y actualizan el paradigma defendido por Loedel en esta disciplina. Disciplina nacida, hace más de trescientos años, de Galileo y de Newton; llevada a su más alta expresión matemática por D´Alembert, Lagrange, Laplace, Euler y otros; y renovada, desde sus mismos cimientos, en el pasado siglo, por Einstein.

2. INTRODUCCION

El propósito de este artículo es comentar avances operados en la comprensión del posible origen de la inercia, gracias a la implementación del Principio de Mach. Las secciones 3 y 4 se destinan a destacar el rol de las fuerzas de inercia en el movimiento. La sección 5 recuerda las críticas que, desde los tiempos de Newton hasta nuestros días, se hicieron al *metafísico* espacio absoluto. En la sección 6 se bosqueja la primera implementación matemática del Principio de Mach, por parte de Erwin Schrödinger en 1925. La sección 7 se destina a describir aspectos básicos de la reciente y más rigurosa implementación del aludido principio. En las secciones 8 y 9 se revisan clásicos problemas a la luz de la nueva teoría. En la sección 10 se demuestra que las nuevas ideas guardan similitud formal con ciertas reglas generales de los equilibrios que gobiernan sistemas complejos.

3. LAS FUERZAS DE INERCIA Y EL MOVIMIENTO

En su obra[5] *ENSEÑANZA DE LA FISICA*, Loedel se vale del *Principio de D´Alembert* para la resolución de problemas dinámicos de cierta complejidad, que a la vez pueden ofrecerse en cursos de enseñanza media.

En la página 279 del mencionado libro nos recuerda que ...” *El gran matemático francés Juan D´Alembert estableció...el principio que hoy lleva su nombre, y el cual ya había aparecido en una memoria que presentara a la Academia de Ciencias de París, a fines de 1742.”* .

Agrega, en la página 284:

“ Por complicado que sea el mecanismo..., se comprende que si se hiciera actuar sobre cada cuerpo... <u>una fuerza igual al producto de la masa del cuerpo por su</u> <u>respectiva aceleración, pero de sentido opuesto al de ésta</u>, el sistema estaría en equilibrio”. Es obvio que las fuerzas a que se refiere Loedel no son otras que las de *inercia*, a las que, siguiendo la tradición, las califica de *ficticias*. Enuncia, finalmente, el principio de D´Alembert:

“Las fuerzas reales (se incluyen aquí las fuerzas de reacción provenientes de los vínculos) y las ficticias se encuentran en equilibrio, constantemente, en un sistema cualquiera”.

Aborda luego la detallada resolución de variados problemas, de los que la máquina de Atwood es un ejemplo, que, aunque resulte extraño, repetiremos ahora. Reiterar la descripción de una elemental y antigua máquina no tendría cabida en una sesión científica seria, de no ser por las profundas implicaciones que su comportamiento muestra a la luz de las modernas investigaciones.

La figura 1 muestra, como siempre, una polea de masa despreciable, por cuya garganta pasa un hilo, también de masa despreciable e inextensible, rematado, en sus extremos, por sendos cuerpos de masas m_1 y $m_2 < m_1$. Hemos incluido, en el gráfico, la tensión, T, que soporta el hilo por el hecho de sostener los cuerpos. Aquí $2T$ representa la fuerza con que el dispositivo solicita al anclaje de la polea, que bien puede ser el techo.

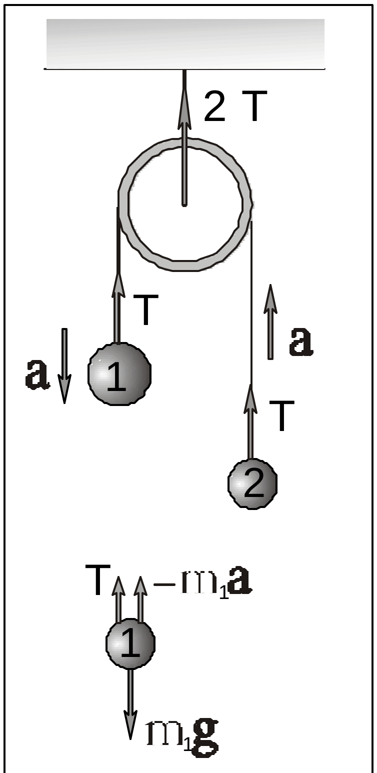

Fig. 1

Aplicando el principio de D´Alembert a los cuerpos 1 y 2 obtenemos,

$$\boldsymbol{T} + m_1\boldsymbol{a} - m_1\boldsymbol{g} = 0 \quad y \quad \boldsymbol{T} - m_2\boldsymbol{a} - m_2\boldsymbol{g} = 0$$

de las que surgen $a = g(m_1\text{-}m_2)/(m_1+m_2)$ y $T = 2m_1m_2g/(m_1+m_2)$. Para $m_1 = 2m_2$ resulta $a = g/3$ y $2T = (8/9)(m_1+m_2)g$. El vector $\boldsymbol{g}$ representa la aceleración debida a la gravedad. El techo es solicitado por una fuerza un noveno menor que la que soportaría si el sistema no se moviese, hecho fácilmente verificable sin más que intercalar, entre el techo y la polea, un dinamómetro.

Y es éste, precisamente, el punto que necesitamos destacar: las fuerzas de inercia *alivianan* el artificio, provocando una *disminución* aparente del peso del mismo.

Al describir, con el auxilio del principio de D´Alembert, artificios más complejos, no elude Loedel el cálculo de las tensiones en los hilos (fuerzas de ligadura), esenciales para lograr una genuina comprensión de la física del movimiento. Estas no aparecen en las avanzadas formulaciones de la Dinámica Analítica, de las que las ecuaciones de Lagrange son un buen ejemplo.

4. FICCIONES QUE AYUDAN AL FISICO, AL INGENIERO Y AL ESTUDIANTE

Con el propósito de enaltecer las virtudes del método preconizado por Loedel, esbozaremos ahora la descripción de una máquina de Atwood ligeramente complicada.

La figura 2 está tomada del ya clásico libro[6] *MECANICA CLASICA*, de Lord Rutherford, autor del modelo atómico-nuclear hoy vigente. Los números que identifican cada cuerpo son, asimismo, las medidas relativas de sus masas inerciales. Por ejemplo, la masa del cuerpo 1 bien puede valer 1 kilogramo, con lo que las masas de los cuerpos 2 y 3 valdrán 2kg y 3kg, respectivamente.

Rutherford resuelve el problema, como es ya habitual, valiéndose de las ecuaciones de Lagrange. Llega a la conclusión de que el cuerpo 1 asciende con la aceleración constante *7g/17*; 2 desciende con la aceleración *5g/17* y 3 también desciende con la aceleración *g/17*.

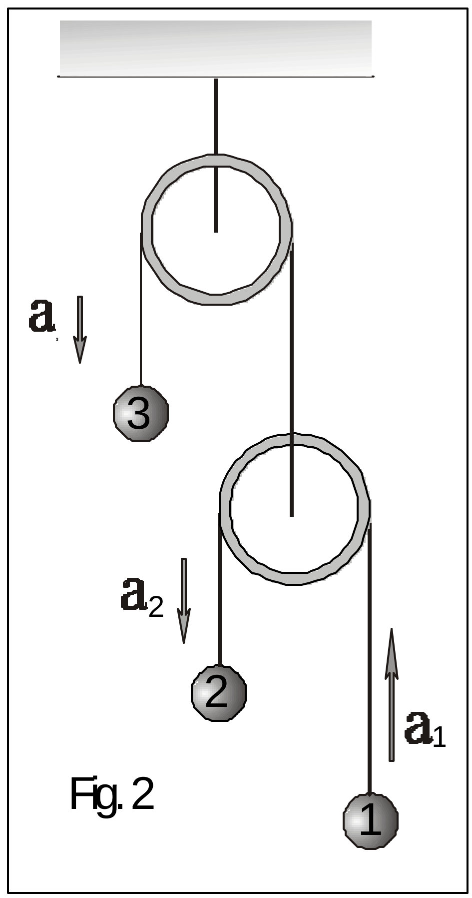

Fig. 2

El punto importante que queremos destacar aquí clava en la misma física del problema. *Cómo* se inicia el movimiento del dispositivo?

Es obvio que si cancelamos la rotación de la polea inferior, nada se moverá. El hilo de la polea superior soporta idénticos pesos, tanto en su extremo izquierdo como en el derecho. Basta liberar el freno en la polea inferior, que *instantáneamente* podemos considerar una máquina de Atwood simple, para que su *peso aparente* disminuya, en virtud de lo visto en el apartado anterior. Ahora la rama izquierda de la polea superior se ve solicitada por una fuerza mayor que la derecha. Se inicia entonces el movimiento.

Estos simples ejemplos muestran claramente la importancia de las fuerzas de inercia para lograr una cabal comprensión de los problemas dinámicos. Las mismas son habitualmente calificadas de *ficticias* para diferenciarlas de las fuerzas de *interacción*. Estas últimas reconocen la existencia de un sistema formado *al menos* por dos partes, nítidamente diferenciables entre sí, entre las cuales existe una *mutua* interacción. Tal es el caso de la interacción gravitacional.

El Sol atrae a la Tierra; simultáneamente, la Tierra atrae el Sol, con *la misma* fuerza que aquél a ésta, aunque con sentido contrario (III ley del movimiento de Newton, principio de acción y reacción, primera ley de simetría de la Naturaleza).

Para las fuerzas de inercia (*vis ínsita* en los tiempos de Newton), no se supo reconocer, durante siglos, su reacción, lo que equivale a *ignorar* una interacción con *algo* capaz de engendrarlas. Su carácter es ciertamente desconcertante y su existencia es, en cierto modo, efímera: aparecen tan sólo cuando un cuerpo material es acelerado y dejan de existir ni bien se uniformiza el movimiento.

Sus efectos son tan reales como los que dimanan de cualquier fuerza de interacción: producen deformaciones, cambian pesos aparentes, destruyen cuerpos en rápida rotación, provocan el ensanchamiento ecuatorial de nuestro planeta, encorvan la superficie del agua en el ya clásico experimento del balde de Newton, dejan exangüe el cerebro del piloto de caza que efectúa un *looping*...

Por todo lo antes dicho, resulta natural que el calificarlas de ficticias produjese cavilaciones en científicos críticos, y aún en el hombre de la calle. Tanto es así que, con prudencia, no pocos autores evitan tal adjetivo. Ejemplo de ello se da en la prestigiosa obra [7] *INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LA MECANICA....* de U. Ingard y W. Kraushaar (Massachusetts Institute of Technology). Al decir de estos autores, en el prólogo de la citada obra, *"<u>Existe</u> una fuerza que empuja a los pasajeros hacia atrás en un vehículo acelerado, y <u>existe</u> una cosa llamada fuerza centrífuga. Consideramos bien empleado el tiempo que se destine a hacer ver al alumno por qué, y desde qué punto de vista, son correctas las nociones que tenía preconcebidas."*

En fin, mientras no seamos capaces de encontrar *la otra parte* de un sistema que haga posible una cierta interacción con el cuerpo acelerado, podremos seguir calificando de ficticias las fuerzas de inercia, aunque con la reserva consistente en admitir que sus efectos son reales. Extraña situación que, desde luego, no alcanza a satisfacer nuestros hábitos de pensamiento.

5. DESDE LEIBNIZ Y BERKELEY HASTA HOY.UNA VIEJA CONTROVERSIA

Newton debió postular la existencia de un *espacio absoluto* (*anterior a* e *independiente de* todo cuerpo material) para poder comprender los fenómenos dinámicos asociados con las rotaciones. Al poner en rotación su famoso balde con agua, no podía encontrar ningún agente material tangible, o al menos imaginable, que fuese responsable de la concavidad observada en la superficie del fluido.

La metafísica presunción de Newton causó rechazos en no pocos pensadores. Los nombres de Leibniz y del obispo de Berkeley son conocidos por todos los físicos, matemáticos, filósofos e historiadores de la ciencia. Para ellos, el movimiento de un cuerpo material sólo cobra sentido físico cuando se lo refiere a otro u otros cuerpos materiales. Si bien se mira, se advierte que fueron Leibniz y Berkeley los precursores filosóficos del *Principio de la Relatividad*.

Más recientemente Ernst Mach (1838-1916) retomó con fuerza las concepciones relativistas de sus predecesores, rechazando de plano la metafísica implícita en la Mecánica de Newton. Dos hechos experimentales incontrovertibles intrigaron a Mach a lo largo de su existencia:

a) Los mejores sistemas inerciales (aquellos en que se verifica la II Ley del movimiento de Newton, $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, sin la introducción de términos adicionales) son aquellos anclados a la materia distante (estrellas fijas en aquellos tiempos, galaxias distantes hoy).

b) La estricta proporcionalidad existente entre las masas gravitatoria e inercial, válida para *toda* partícula material. Esta ley fue ya verificada, con una incerteza experimental relativa cercana a una parte en mil, por el mismo Newton, con la ayuda de péndulos construidos con diferentes sustancias. Hoy, la aludida incerteza se ha reducido por debajo de 10^{-11} , con lo que constituye una de las leyes de la física actual mejor verificadas.

Leemos en el aún vigente tratado *FISICA GENERAL* de J. Palacios,[8] sagaz físico español que supo puntualizar las diferencias entre ambas magnitudes:
“Esta pasmosa concordancia revela que no puede tratarse de un hecho fortuito, y uno de los grandes problemas de la Física teórica contemporánea es buscar la explicación de este notabilísimo hecho experimental”.

Compelido por estas verdades experimentales, no vaciló Mach en postular que las fuerzas de inercia deben su existencia a la *totalidad de la materia distante del Universo*. Dicho en otras palabras, el agua del balde de Newton no se encorvaría de no existir galaxias. Tampoco se deformaría la Tierra al girar sobre su eje, ni habría que consumir energía para acelerar un cuerpo. La inercia no tiene lugar, según Mach, para un único cuerpo en un Universo vacío. Paralela y simétricamente, quieto el balde de Newton en la Tierra, y puesto a girar, en su totalidad, el Universo, también se encorvaría el agua.

Tales son las ideas, *enteramente relativistas*, de Mach acerca del movimiento, que hoy conocemos con la denominación, un tanto vaga, de *Principio de Mach*.

También Einstein rechazaba los conceptos absolutistas de Newton, lo que lo llevó a suscribir las ideas de Mach, que ejercieron visible influencia en el desarrollo de su monumental teoría de la Relatividad General.

6. PRIMERA IMPLEMENTACION DE LAS IDEAS DE MACH

Por falta de una implementación matemática positiva, el principio de Mach pasó a ser, durante varias décadas, una de las tantas proposiciones de las que no puede afirmarse que sean verdaderas o falsas. Más aún, cuando postuló la existencia de una interacción partícula-Cosmos, ni siquiera aventuró Mach cuál podría ser su naturaleza.

Recién en 1925 E. Schrödinger, autor de la versión ondulatoria de la Mecánica Cuántica, publicó, en los célebres *Annalen der Physik* (1925) un notable, aunque poco conocido, artículo en el que se propuso implementar el Principio de Mach[9,10].

En primer lugar realizó una crítica de la Mecánica Clásica, puntualizando que sus fundamentos no podían dar explicación alguna al conocido hecho de ser los referenciales anclados a las estrellas fijas los mejores sistemas inerciales. Agrega luego que tampoco la teoría de la Relatividad General, en su forma actual, satisface las exigencias de Mach.

Refiriéndose a la precesión de la órbita de Mercurio, calculada por dicha teoría con asombrosa precisión, se pregunta (traducción libre) : *¿Con respecto a qué, de acuerdo con la teoría, tiene lugar tal precesión? Se sabe, empíricamente, que la misma ocurre con relación a las estrellas fijas, circunstancia sobre la que nada puede decir la aludida teoría, por el simple hecho de que la materia distante no está incluida en tales cálculos…Quizás resulte de interés indagar si la vinculación de los sistemas inerciales con la materia distante no pueda hacerse mediante una simple modificación de la Mecánica Clásica…*

Recuerda Schrödinger que la energía potencial newtoniana satisface ya los requerimientos de Mach, por cuanto sólo depende de la *separación relativa* de las partículas en interacción y no de su *posición absoluta*. Y que sería deseable expresar la *energía de interacción mutua* de dos masas puntuales, en términos de la separación entre ellas y de la velocidad de cambio de la misma.

Selecciona luego Schrödinger, valiéndose de consideraciones heurísticas, una de entre numerosas expresiones posibles,

$$W = (g\ m\ m'\ \dot{r}^{2})/r - (m\ m')/r\ , \qquad (1)$$

agregando que las masas son aquí medidas con una unidad tal que la constante gravitacional vale 1. Con esta elección, m y m' representan masas gravitatorias, responsables de la interacción[8]. La constante g, en principio indeterminada, resulta valer $3/c^2$, siendo c la medida de la velocidad de la luz en el vacío y $\dot{r} \equiv dr/dt$.

Considera luego una masa puntual, moviéndose en las <u>cercanías del centro</u> (subrayado nuestro) de una esfera hueca de radio R, provista de una densidad superficial de masa (gravitatoria) s. Con la ayuda de la energía potencial modificada, calcula la interacción entre la partícula móvil y la cáscara esférica. Obtiene la energía mutua gravitacional, que resulta coincidir con la energía cinética dada por la Mecánica Clásica, con la condición de que la *masa usual* (masa inercial) venga dada por $m = (8p\ s\ R/3)\ m$.

Integra luego el resultado de la cáscara para un "universo" de radio R_o, puntualizando que si se toman como densidad y tamaño los correspondientes a nuestra galaxia, entonces la constante de la gravitación sería 10^{11} veces menor que la realmente medida. Concluye entonces que la inercia de los cuerpos del sistema solar se debe, principalmente, a la presencia de materia extremadamente lejana.

Vemos así que Schrödinger logró un notorio avance sobre Mach ya que, además de ofrecer una implementación matemática del principio relativista que nos ocupa, arriesgó, por vez primera, que la inercia podría tener un origen gravitacional.

7. IMPLEMENTACION RECIENTE DEL PRINCIPIO DE MACH

En 1989 publicó el físico brasilero Andrè Assis , en la prestigiosa *Foundations of Physics Letters,* un artículo pionero en el que, con todo rigor y generalidad, logra construir un algoritmo capaz de dar forma positiva a las ideas relativistas de Mach[11]

En primer lugar enuncia Assis tres postulados, de los que el tercero nos trae a la mente el principio de D´Alembert, tal como fue empleado por Loedel:

a) La fuerza es una cantidad vectorial.
b) La fuerza que un cuerpo material puntual A ejerce sobre un cuerpo material puntual B es igual y opuesta a la que B ejerce sobre A.
c) La suma de *todas* las fuerzas que actúan sobre *cualquier* cuerpo es cero, en *cualquier* sistema de referencia.

A diferencia de Schrödinger, no recurre a métodos heurísticos, sino que se vale de la fuerza de Weber, formulada por este autor, hacia 1846, con la intención de unificar los fenómenos eléctricos dinámicos con los estáticos. Un excelente y exhaustivo tratamiento de la electrodinámica de Weber se encuentra en la referencia 12. La expresión de dicha fuerza, aplicada a la gravitación, es[11,12,13,14] :

$$\mathbf{F}_{ji} = -(m_{gi}m_{gj})(\hat{r}_{ij}/r_{ij}^2)\left[\ 1 - x\,\dot{r}_{ij}^2 / 2c^2 + r_{ij}\ddot{r}_{ij} / c^2\ \right] \qquad (2)$$

m_{gi} y m_{gj} son, respectivamente, las masas gravitatorias de las partículas i, j; $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$; $\hat{r}_{ij}$ es el vector unitario que apunta desde j hacia i; c es la medida de la velocidad de la luz en el vacío; x es un parámetro adimensional.

La propiedad matemática más importante de (2) es que su valor es *independiente* del sistema de coordenadas arbitrariamente elegido para medir posiciones y velocidades, pudiendo aún ser referenciales no inerciales[11,12,13]. Se dice, abreviadamente, que la expresión es *relacional*.

El parámetro x se determina al calcular la ecuación de las trayectorias planetarias con el auxilio de (2) , tomando en cuenta la precesión de la órbita, determinada mediante la observación astronómica. Se ve claramente que la ley de fuerzas de la teoría newtoniana de la gravitación no es sino el primer término de (2).

Consideremos (figura 3) una partícula material j de masa gravitatoria m_g que se mueve, en el interior de una cáscara material de radio R, espesor dR y densidad de masa gravitatoria $r_g(R)$, centrada en un sistema de referencia arbitrario,S, con relación al cual la partícula tiene la velocidad $\mathbf{v}_j$. La cáscara gira con la velocidad angular w con relación a S. La partícula no tiene porqué estar localizada en las proximidades del origen del sistema de referencia.

Las integraciones angulares de la ecuación (2) aplicada a este sistema conducen a [11,12,13,14]

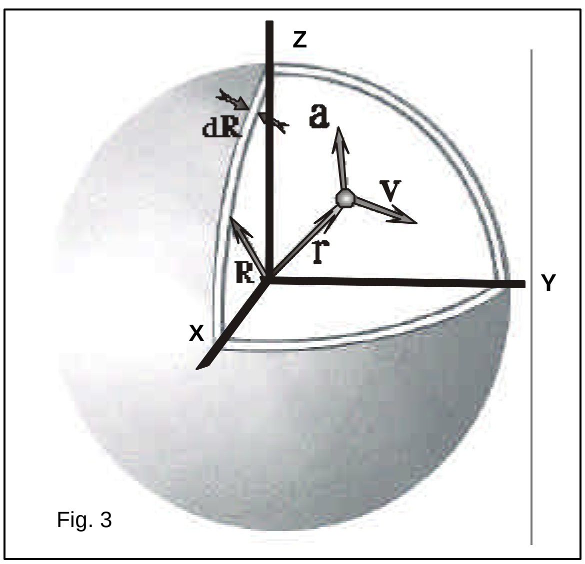

Fig. 3

$$d\boldsymbol{F}_{Cj} = -(4\pi\xi/3c^2)m_gR\,\rho_g(R)dR\left[\ \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}_j) + 2\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{r}_j\boldsymbol{x}(d\boldsymbol{\omega}/dt)\ \right] \qquad (3)$$

$d\boldsymbol{F}_{Cj}$ es la fuerza gravitacional que la cáscara ejerce sobre la partícula acelerada; $\boldsymbol{a}_j = d\boldsymbol{v}_j/dt$ es la aceleración de la partícula.

Puntualiza Assis que el Universo es remarcáblemente isotrópico, como lo indica el análisis de distintos tipos de radiación observable. Dado que la Tierra no ocupa un lugar privilegiado en aquél, es posible hablar de una homogeneidad sobre una escala espacial muy grande. Esto es, $\rho_g(R) = \rho_{go}$, con lo que la integración de (3), hasta un radio característico del Universo, dado por la ley de Hubble, $c = H_oR$, conduce a la fuerza que la totalidad del universo ejerce sobre m_g:

$$\boldsymbol{F}_{Ui} = -m_g\Phi_g(\boldsymbol{a}_j + \textit{términos rotacionales}) \qquad (4)$$

$$\Phi_g \equiv (2\pi\xi\,\rho_{go}/3H_o^2). \qquad (5)$$

Dado que la aceleración $\boldsymbol{a}_j$ fue, necesariamente, originada por la acción de una *fuerza local de interacción,* $\boldsymbol{F}_m$ *,* queda, en virtud del tercer postulado ($\boldsymbol{F}_{Uj}+\boldsymbol{F}_m = 0$) que en adelante llamaremos principio de D´Alembert-Assis,

$$\boldsymbol{F}_m = \Phi_g m_g(\boldsymbol{a}_i + \textit{términos rotacionales}) \qquad (6)$$

ecuación muy similar a la II ley del movimiento de Newton escrita para sistemas de referencia en rotación, si identificamos la masa inercial, m_i , de la partícula con el producto $\Phi_g m_g$ *.* Esto es, $m_i = \Phi_g m_g$. Dado que esta ecuación también debe vincular las densidades de masa gravitacional e inercial, $\rho_{io} = \Phi_g\,\rho_{go}$, podremos expresar la función Φ en términos de esta última[14]. Con ello resulta:

$$m_i = \Phi_g m_g = (2\pi\xi\,\rho_{go}/3H^2)m_g = \Phi_i m_g = (2\pi\xi\,\rho_{io}/3H_o^2)^{1/2}m_g \qquad (7)$$

ρ_{io} representa aquí la densidad másica inercial media del Universo, medida en unidades habituales, kg/m^3 , por ejemplo.

Con la identificación anterior, advertimos que la ecuación (6) tiene la misma forma que la II ecuación de movimiento de la dinámica clásica, válida para un sistema no inercial de referencia. Con el nuevo enfoque, las fuerzas centrífuga y de Coriolis aparecen como *fuerzas reales*, provenientes de la interacción gravitacional entre la partícula de prueba y el Universo, cuando tiene lugar una *rotación relativa* entre ambos [11,12,13].

Cuando no existe la rotación relativa antes dicha, las ecuaciones (5) y (6) permiten escribir

$$\boldsymbol{F}_m = (2\pi\xi\,\rho_{go}/3H_o^2)m_g\boldsymbol{a}_j \qquad (8)$$

expresión enteramente análoga a la II ley de Newton para sistemas inerciales.

Las ecuaciones (7) expresan que la masa inercial es una propiedad *mixta* de las partículas[14]:

- Tiene una componente intrínseca, local, que es la masa gravitatoria, similar a la carga eléctrica en cuanto a que es la responsable de la interacción gravitacional.
- Tiene componentes *no locales*, que reflejan propiedades del Cosmos, tomado a gran escala, como lo son un tamaño característico y la densidad media de materia.

La fuerza dada por (2) admite una función potencial que coincide exactamente con la dada por Schrodinger, ecuación (1). Esta función es válida *cualesquiera* sea la localización de la partícula dentro de la esfera, no tan sólo en las proximidades de su centro, como ya se conocía gracias a Helmholtz [13].

Compelido por el desarrollo de la Mecánica Ondulatoria, Schrodinger no prosiguió sus trabajos sobre el Principio de Mach. De haberlo hecho, resulta verosímil que hubiese arribado a los resultados presentados por Assis, más de medio siglo más tarde, particularmente a la importantísima igualdad (3).

Queda así logrado el propósito de Mach: *las fuerzas de inercia son fuerzas reales*, de origen gravitatorio, que se ponen de manifiesto cuando un cuerpo cualesquiera sufre un cambio de movimiento *con relación* a la totalidad del Universo distante.

8. REVALUANDO LAS FUERZAS DE INERCIA

Estamos ahora en condiciones de rever, con otra óptica, el rol de las fuerzas de inercia en cuanta ocasión de la vida real se nos presente. Sabemos que para arrastrar un bloque con velocidad uniforme debemos aplicarle una fuerza motriz, $\boldsymbol{F}_m$, que en todo momento, venza las debidas al rozamiento, $\boldsymbol{F}_r$. Se cumple, para cualquier instante, $\boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{F}_r = 0$.

Imaginemos ahora que un bloque de masa inercial m desliza sobre una superficie horizontal, sin rozamientos. Ninguna fuerza actúa sobre él. Ahora ingresa en una superficie, también horizontal, pero con rozamiento (figura 4).

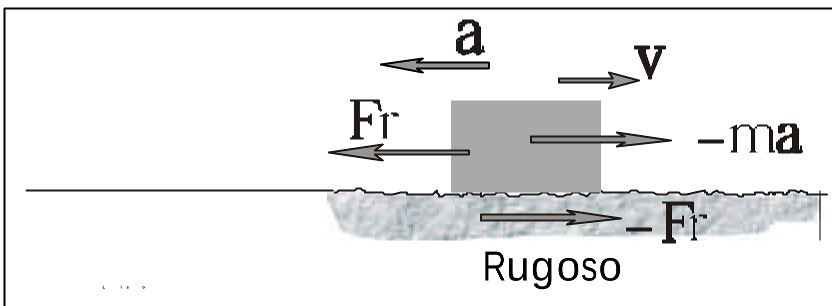

Fig. 4

El bloque *se decelera* debido a la fuerza de roce $\boldsymbol{F}_r$, con lo que aparece, sobre el mismo, la fuerza de inercia, $\boldsymbol{F}_i = -m\boldsymbol{a}$ que, en virtud de (7) podemos escribir como $F_r = (2p\ x\ r_{go} / 3H_o^2)m_g\ a$. Si el Universo tuviese una densidad de galaxias doble que la actual ($r_{go}' = 2\ r_{go}$) , entonces la aceleración debida al frenado se reduciría a la mitad, $a' = a/2$. Esto suponiendo que las fuerzas intermoleculares responsables de la fricción no dependen de las propiedades del Universo, considerado en gran escala. Si no se altera el mecanismo que pone en movimiento el bloque, en ambas situaciones adquirirá éste la misma energía cinética, de donde, $\Phi(r_{go})v^2 = \Phi(r_{go}')v'^2$.

Deducimos entonces que $v' = v(r_{go}/r_{go}')^{1/2}$. Es fácil demostrar que la distancia recorrida es la misma en ambos casos (también lo es el trabajo efectuado *contra* las fuerzas de rozamiento). Sin embargo, el tiempo de frenado resulta mayor en el segundo caso, $t' = t\ (r_{go} / r_{go}')^{1/2}$.

Vemos en este ejemplo cuán acertado estuvo Newton al llamar *vis ínsita* a este tipo de fuerzas, que parecen *dormir* en el interior de la materia, hasta tanto ésta sea acelerada. Se cumple el principio de D´ Alembert-Assis, $\boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_i = 0.$ El bloque ejerce, sobre la superficie, la fuerza $-\boldsymbol{F}_r$.

Otro ejemplo sencillo que nos hace recapacitar sobre la realidad de las fuerzas de inercia nos lo ofrece la elasticidad de un resorte. Sabemos que para deformar un resorte, dentro del límite elástico, debemos aplicar una fuerza proporcional a la deformación. La figura 5 muestra un resorte que es impactado por un móvil de masa *m*. Antes de la colisión ninguna fuerza actúa sobre éste. Durante la colisión, el resorte frena al cuerpo, éste se *decelera*, aparece sobre él la fuerza de inercia que lo comprime, de la misma manera que si una mano presionara sobre él (fuerza de interacción de contacto).

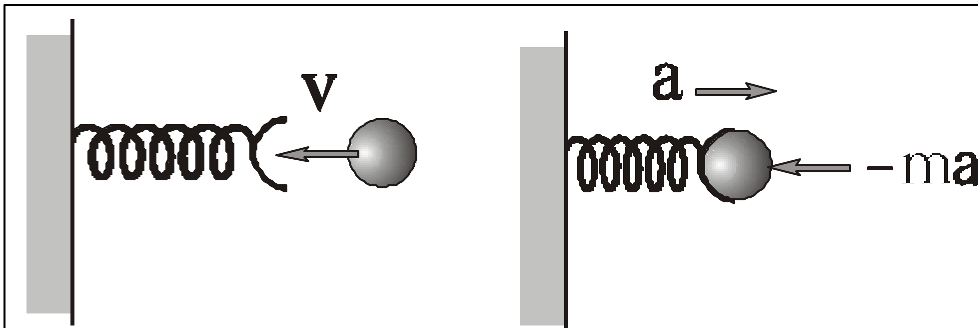

Fig. 5

La figura 6 muestra una esfera de masa m, en reposo, a la que se aproxima, según la recta que une sus centros, una esfera de masa M, dotada de la velocidad V. Al producirse la colisión, M se decelera, debido a la fuerza de contacto, $\boldsymbol{F}_{mM}$, dirigida hacia la izquierda, que m ejerce sobre M. Se engendra entonces la fuerza de inercia $\boldsymbol{F}_{iM}$ sobre M, dirigida hacia la derecha. Se cumple, *en todo momento* (equilibrio dinámico),

$$\boldsymbol{F}_{iM} + \boldsymbol{F}_{mM} = 0. \qquad (9)$$

Simultáneamente, y debido a la fuerza de contacto, $\boldsymbol{F}_{Mm}$, dirigida hacia la derecha, que M ejerce sombre m, ésta se acelera. Aparece sobre m la fuerza de inercia $\boldsymbol{F}_{im}$ Se verifica nuevamente el principio de D`Alembert-Assis,

$$\boldsymbol{F}_{im} + \boldsymbol{F}_{Mn} = 0. \qquad (10)$$

Dado que, en virtud de la III ley del movimiento de Newton es

$$\boldsymbol{F}_{Mm} = - \boldsymbol{F}_{mM} \qquad (11)$$

queda, sumando las dos ecuaciones de equilibrio dinámico,

$$\boldsymbol{F}_{iM} + \boldsymbol{F}_{im} = -M\boldsymbol{a}_M - m\boldsymbol{a}_m .= 0 \qquad (12)$$

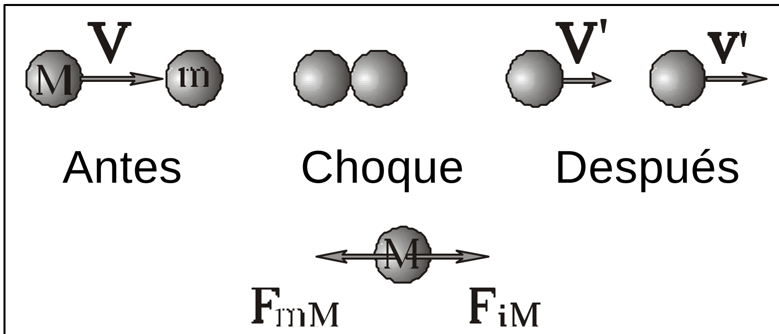

Fig. 6

Llamando V' a la velocidad de M tras la colisión resulta, para la aceleración experimentada por M durante el lapso t que duró el choque, $a_M = (V'-V)/t$. La aceleración que sufre m en el mismo lapso vale $a_m = (v'-0)/t$, siendo v' la velocidad con que se mueve m tras la colisión, y cero su velocidad inicial.

Reemplazando en (12) obtenemos el conocido teorema de conservación de la cantidad de movimiento lineal (ímpetu),

$$MV' + mv' = MV$$

Nos proponemos ahora averiguar el *trabajo* que, durante la colisión, realizó M sobre m. Este trabajo, W_{Mm}, es debido a la acción de la fuerza de contacto F_{Mm} que M ejerce sobre m, durante el lapso t que dura la colisión. Es una cantidad positiva, dado que F_{Mm} y el desplazamiento, L_m , que experimenta m, tienen el mismo sentido, esto es, de izquierda a derecha.

Recordando (10) tendremos,

$$W_{Mm} = F_{Mn}L_m = - F_{im}L_m = ma_mL_m = ma_m(a_m t^2/2) = (1/2)mv'^2 \qquad (13)$$

La cantidad mv'^2, doble de la *energía cinética*, se llamaba, antiguamente, *vis viva* (fuerza viva).

De una manera enteramente análoga, vemos que m realiza el trabajo W_{mM} sobre M, por acción de la fuerza de contacto F_{mM}, a lo largo del desplazamiento L_M de la esfera M durante la colisión. W_{mM} es una cantidad negativa, por cuanto aquí fuerza y desplazamiento tienen sentidos opuestos. Dado que $L_M = Vt + a_M t^2/2$ tendremos, recordando (9),

$$W_{mM} = -F_{iM}L_M = (1/2)\, M(V'^2 - V^2) \qquad (14)$$

En el caso particular en que las esferas recuperen, tras la colisión, sus estados internos iniciales, es decir, que no tengan lugar deformaciones permanentes ni transferencias de calor, es plausible admitir que ambas experimenten el *mismo desplazamiento*, en el lapso t . Esto es,

$$L_m = L_M = L \qquad (15)$$

con lo que $W_{Mm}+W_{mM} = L(F_{Mm}+F_{mM}) = 0$.-

Sumando (13) y (14) queda,

$$(1/2)MV^2 = (1/2)MV'^2 + (1/2)mv'^2 \qquad (16)$$

La ecuación (15) expresa el *teorema de conservación* de la energía cinética, para colisiones *perfectamente elásticas*. La energía cinética total antes del choque, $MV^2/2$, se reparte entre las dos esferas. La ecuación (13) enseña que el trabajo efectuado por M sobre m se invierte en vencer la fuerza de inercia F_{im}, resultando un incremento en la energía cinética de m, inicialmente nula. El trabajo efectuado por m sobre M también se invierte en vencer la fuerza de inercia F_{iM} y se traduce en una disminución de la energía cinética inicial de M.

Reescribiendo (15) en términos de las aceleraciones a_M y a_m queda $Vt + a_M t^2/2 = a_m t^2/2$, de donde se deduce, inmediatamente, que $V' - v' = -V$, ecuación que caracteriza los choques elásticos. Expresa que en una de tales colisiones, el vector *velocidad relativa*, de M con relación a m, $\mathbf{V}_{Mm} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$, *invierte su sentido* tras el choque, $\mathbf{V}'_{Mm} = -\mathbf{V}_{Mm}$.

Comprendemos ahora porqué se denominó vis viva a la energía cinética. En verdad, antes del choque no actúa fuerza alguna sobre las esferas. Al producirse el contacto se originan las fuerzas de inercia, que juegan un rol esencial en el *reparto* de la fuerza viva inicial.

En el caso particular de ser idénticas las masas, resulta $V' = 0;\ v' = -V$. Las esferas *intercambian* sus velocidades.

9. MOMENTO ANGULAR Y FUERZA DE CORIOLIS

Es común describir, en los cursos elementales de Mecánica, lo que ocurre a la bailarina que rota, inicialmente con los brazos extendidos, cuando encoge sus brazos. Por tratarse de un problema en el que sólo intervienen fuerzas internas, no ha de cambiar el momento angular, $L = Iw$, donde I simboliza el momento de inercia del cuerpo que rota y $w = dq/dt$ es la velocidad angular de rotación. Al encoger los brazos la bailarina, disminuye su momento de inercia y, consecuentemente, aumenta su velocidad de rotación.

Analizaremos ahora la situación desde un punto de vista más físico, esto es, considerando las fuerzas responsables del aumento de la velocidad angular.

La figura 7 muestra un cuerpo de masa m que rota, con la velocidad angular w_o , entorno de un eje fijo en el laboratorio. El cuerpo está vinculado el eje por medio de una varilla rígida de masa despreciable. El momento de inercia del sistema vale $I = mr^2$.

$$\begin{array}{ll} & \uparrow \mathbf{f}_{co} \\ x.\text{----------------}\ \mathbf{v} \leftarrow & O \qquad \uparrow w \\ & \downarrow \mathbf{f}_i \end{array}$$

Figura 7

Las fuerzas internas disminuyen, en el intervalo de tiempo Δt, la distancia r, en la cantidad Δr. La velocidad $v = dr/dt$ es responsable de la aparición de la fuerza de *Coriolis*, $\mathbf{F}_{co} = -2m(w\mathbf{x}\mathbf{v})$, que aviva el movimiento. El vector asociado con la velocidad angular $w = dq/dt$ es perpendicular al plano de rotación, y está dirigido hacia el lector. Esta fuerza es, en definitiva, la responsable de la aceleración tangencial, $\mathbf{a}_t$ que sufre la partícula, que cambia su velocidad tangencial de $w_o r_o$ a wr. *La reacción inercial* a la fuerza de Coriolis, $\mathbf{f}_i = -m\mathbf{a}_t$ tiene la misma dirección que ésta, pero sentido opuesto. Dado que $a_t = r(dw/dt)$ el principio de equilibrio dinámico, $\mathbf{f}_{co}+\mathbf{f}_i = 0$, conduce a: $2mw(dr/dt) + mr(dw/dt) = 0$, o, lo que es lo mismo a,

$$2(dr/r) + (dw/w) = 0$$

La integración de esta ecuación conduce a $\ln r^2 + \ln w = constante$. Esto es,

$$r^2 w = constante$$

Recordando que $I = mwr^2$, reconocemos en la última igualdad la expresión del teorema de conservación del momento angular, referido a la unidad de masa.

10. LE CHATÊLIER, VAN´T HOFF, LENZ Y OTROS

Deseamos cerrar este ensayo recordando el significado de algunas reglas cualitativas generales, útiles para indagar el sentido en que evolucionará un sistema complejo cuando, mediante una perturbación externa, se lo aparta del estado de equilibrio estable. Una de las tales reglas se conoce, genéricamente, como *Principio de Le Châtelier* , cuando aplicada al factor temperatura y de *Van´Hoff*, cuando referida a la presión.

Repetiremos, textualmente, el enunciado que de esta proposición hace L.Pauling, en su mundialmente difundido texto de *QUIMICA GENERAL*: *"Si se modifican las condiciones de un sistema, inicialmente en equilibrio, éste se desplaza en sentido tal que tiende a restablecer las condiciones iniciales, si tal desplazamiento es posible."*

El ejemplo de autoprotólisis del agua, tomado de la obra citada[15] , es muy instructivo. Un litro de agua líquida, a 25ºC, tiene alrededor de 10^{-7} moles de iones H^+ y OH^- , debido al equilibrio de ionización simbolizado por la expresión:

$$H_2O \leftrightarrow H^+ + OH^-$$

Sabiendo que la reacción indicada como directa, la disociación de la molécula de agua, consume energía, el principio de Le Châtelier permite predecir que, al bajar la temperatura, el sistema *se moverá* hacia la izquierda. Esto es debido a que la recombinación de iones de hidrógeno y oxhidrilo para formar moléculas de agua es un proceso que *libera* energía. Por lo tanto, este es mecanismo con el que el sistema *reacciona* ante la quita de calor (energía) producida al bajar la temperatura. De hecho, las concentraciones de equilibrio de las especies iónicas son de $0{,}83 \times 10^{-7}$ Mol/L a 0ºC y de $6{,}9 \times 10^{-7}$ a 100ºC.

La reacción de formación de amoníaco, a partir de sus elementos, da lugar a la aplicación del principio de Vant´Hoff,

$$N_2 + 3H_2 \leftrightarrow 2NH_3$$

La expresión de equilibrio indica que la formación de amoníaco va acompañada de una disminución de presión, por disminución del número de moléculas, al consumirse hidrógeno y nitrógeno. Si, alcanzado el equilibrio, se provoca un aumento de presión, el sistema *se mueve* hacia la derecha, esto es, promoviendo la formación de más amoníaco.

La regla de Lenz ofrece otro ejemplo de proposición general útil a la hora de determinar el sentido de la corriente eléctrica inducida en un circuito conductor cerrado, en virtud de la ley de Faraday-Henry, cuando cambia el flujo del campo magnético en aquél. En efecto, el circuito, inmerso en un campo magnético estático, está inicialmente, en reposo electrodinámico.

Basta producir una variación del flujo que lo atraviesa para que se induzca, en el conductor, una corriente eléctrica. El sentido de ésta es tal que el campo magnético asociado con la misma, se opone a la variación de flujo impuesta mediante agentes externos.

A la vista de los anteriores ejemplos, y habiendo encontrado un mecanismo de interacción responsable de las fuerzas de inercia, vemos que también en Dinámica se puede hablar de un principio general de equilibrio: Un cuerpo de masa inercial *m* está en equilibrio estable con la totalidad del Universo material mientras su velocidad permanece constante. Si, merced a agentes exteriores, se lo fuerza a *cambiar* su velocidad, entonces la materia distante *reacciona*, proporcionándole la fuerza inercial $-m\boldsymbol{a}$, de sentido opuesto a la fuerza perturbatríz.

Un bello ejemplo de lo expuesto lo constituye la caída libre, que confundió a la Humanidad por más de dos milenios, desde que Aristóteles sentenció que los cuerpos pesados debían alcanzar el suelo con más rapidez que los leves. La Historia es instructiva, ya que el griego sabía perfectamente que los cuerpos pesados son solicitados por nuestro planeta con *mayor fuerza* que los livianos, como podía deducir sin más que observar el distinto grado de deformación que, sobre sus apoyos, aquellos producían.

Galileo pudo, mediante la observación, corregir el error de Aristóteles, al demostrar que, liberados desde la misma altura, tocan el suelo simultáneamente el pesado y el liviano. Newton, como vimos, perfeccionó las observaciones de Galileo, llegando a establecer la proporcionalidad entre las masas gravitatoria e inerte. Ni el italiano ni el inglés sospecharon cuál podría ser el origen de la fuerza capaz de emparejar diferentes pesos.

Imaginemos un cuerpo cualquiera, de masa gravitatoria m_g , suspendido, mediante una cuerda, del techo. La fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo, esto es su peso, vale, en virtud de la ley de atracción universal de Newton,

$$P = (M_g m_g)/R^2 \qquad (17)$$

donde M_g representa la masa gravitatoria de la Tierra y R su radio.
Se cumple, desde luego, $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} = 0$, siendo $\boldsymbol{T}$ la tensión provista por la cuerda.

Se corta ahora la cuerda, con lo que desaparece $\boldsymbol{T}$ y, en su lugar, aparece la fuerza de inercia $-\Phi_g m_g \boldsymbol{g}$.

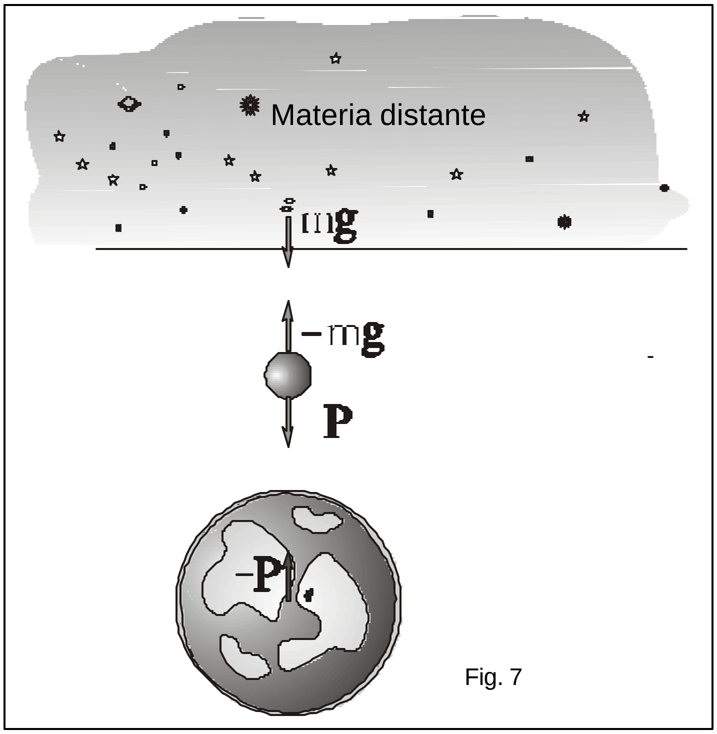

Fig. 7

El principio de D´Alembert-Assis (equilibrio dinámico) y las ecuaciones (7) y (17) conducen a

$$(M_g m_g)/R^2 = (2\pi \times \rho_{go}/3H_o^2)m_g g \qquad (18)$$

Se ve claramente que la aceleración debida a la gravedad, *g*, no depende de la masa del cuerpo que cae. Además, si se duplicase el número de galaxias del Universo, con lo que $\rho_{go}´ = 2\rho_{go}$, la aceleración quedaría reducida a la mitad de su valor actual. En términos de la densidad de masa usual (masa inercial) tendremos, en virtud de la ecuación (7) y (18), $g´/g = (\rho_{io}/\rho_{io}´)^{1/2}$. Este resultado, característico de toda formulación que tome cuenta de las ideas relativistas de Mach, no puede aparecer en la Mecánica de Newton porque en la estructura conceptual de ella la materia distante no tiene cabida.

Se ve claramente cómo, ante la aceleración del cuerpo que cae, el Universo distante *reacciona* engendrando una fuerza de inercia que es proporcional a la masa gravitatoria del cuerpo . Como el peso de éste es también proporcional a su masa gravitatoria, la compensación ocurre de idéntica manera para todo cuerpo material, sin importar su tamaño ni su constitución.

La ecuación (18), expresada, como es habitual en cualquier libro, en términos de masas inerciales ($m_g = \sqrt{G}\ m_i$), permite vincular la constante universal de la gravitación[14] con propiedades cosmológicas. Resulta $G \approx H_o^2 / \boldsymbol{r}_{io}$.

Paul A.M. Dirac, creador de la Mecánica Cuántica Relativista, llegó a la misma dependencia funcional, apoyado en consideraciones numerológicas[16], sin valerse del Principio de Mach.

En la figura 7 hemos incluido la materia distante, sobre la que distribuye la reacción a la fuerza de inercia $-m\boldsymbol{g}$ que *estabiliza* la caída del cuerpo por acción de su peso $\boldsymbol{P}$. Ahora *todas* las fuerzas involucradas son de interacción[17,18] y satisfacen la III ley del movimiento de Newton. El lector podrá apreciar, recordando la figura 4, que la fuerza de inercia, $-m\boldsymbol{a}$, tiene también su reacción en el Universo distante.

Al volver a considerar la máquina de Atwood, advertimos que actúan dos fuerzas de inercia antagónicas: una sobre el cuerpo 1, que contribuye a r*educir* la tensión en el hilo; la otra sobre el cuerpo 2, que obra en sentido opuesto. Al predominar la primera, la tensión disminuye. El enfoque de nuestro ilustre homenajeado resulta así rigurosamente fundamentado.

Cerramos este ensayo destacando que la teoría aquí esbozada puede calificarse de *fenomenológica*, por cuanto se ocupa de la descripción de los fenómenos sin buscar causas últimas. En tal sentido puede calificarse como una legítima extensión de la doctrina newtoniana *(hipótesis non fingo)*. Es altamente probable que las modernas investigaciones (espacios no euclideanos, cuerdas, supercuerdas, gravitones, neutrinos) arrojen luz, en un futuro próximo, sobre la singular naturaleza de la inercia. Ocurrirá entonces algo similar a lo que tuvo lugar cuando la teoría molecular de la materia permitió comprender el origen de la presión de un gas. Esta última es una variable macroscópica que interviene, junto con la temperatura, el volumen, y el número de partículas, en una ley fenomenológica (la ecuación de estado del gas). La teoría cinético-molecular reconoce en los numerosísimos choques, por unidad de tiempo, de las partículas con las paredes del recipiente, el origen de la presión

Reconocimiento
Al árbitro que entendió en este trabajo, por sus valiosas sugerencias.

REFERENCIAS

1. E. Loedel (1948).*Anales de la Sociedad Científica Argentina,* **145**,3.

2. E. Loedel (1957).*American Journal of Physics*. **25**, 327.

3. A. Shadowitz (1968).*SPECIAL RELATIVITY*. (Dover.Pub.Inc.N.Y.)

4. E. Loedel (1955). *FISICA RELATIVISTA*. (Ed. Kapelusz, B. Aires)

5. E. Loedel (1949).*ENSEÑANZA DE LA FISICA*. (Ed. Kapelusz, B. Aires).

6. D.E. Rutherford (1950). *MECANICA CLASICA*. (Ed. Dosat. B.Aires).

7. U.Ingard y W.Kraushaar (1966). *INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LA MECANICA, MATERIA Y ONDAS* .(Ed.Reverté, Barcelona).

8. J. Palacios (1965). *FISICA GENERAL*. (Espasa Calpe, Madrid).

9. E. Schrödinger (1925). *Annalen der Physik*, **77**, 325.

10. J. B. Barbour y H. Pfister (1995). *FROM NEWTON BUCKET TO QUANTUM GRAVITY*. (Birkhauser, London).

11. A.K.T. Assis (1989). *Foundations of Physics Letters*, **2**, 301.

12. A.K.T. Assis(1995).*WEBER´S ELECTRODYNAMICS*. (Kluwer, London, Boston, Dordrecht).

13. A.K.T. Assis (1999).*RELATIONAL MECHANICS*. (Apeiron, Montreal).

14. J.Guala Valverde (1999).*Apeiron*, **6**, 202.

15. L.Pauling (1977).*QUIMICA GENERAL*. (Aguilar, Madrid).

16. P.A.M.Dirac (1938).*Proc. of the Royal Society of London*,**165**, 199.

17. T.E.Phipps,Jr. (1978).*Speculations in Science and Technology*, **1**, 449.

18 P.Graneau and N.Graneau (1993).*HOW MATTER INTERACTS WITH MATTER* (Carlton Press Inc. New York)

Ilustró: Cristina N. Gagliardo
Revisó: Raúl A. Rapacioli