CUANDO LA NATURALEZA JUEGA A LOS DADOS

LA ENSEÑANZA DE LA LEY DEL DECAIMIENTO RADIACTIVO A TRAVÉS DE UNA EXPERIENCIA LÚDICA

Ricardo Pasquali

UNIVERSIDAD CAECE
Departamento de Biología

Existen núcleos atómicos donde una adecuada relación entre las cantidades de protones y neutrones asegura su estabilidad. La mayor parte de los núcleos atómicos conocidos, sin embargo, son inestables y a través del fenómeno de la radiactividad buscan estabilizarse mediante distintos tipos de mecanismos, como la fisión espontánea o la emisión de radiaciones alfa (núcleos de helio), beta negativa (electrones), beta positiva (positrones), gama, neutrones, protones y hasta núcleos atómicos de carbono 12.

Ya los primeros estudiosos de la radiactividad notaron una curiosa característica en el decaimiento radiactivo, que también había sido observada en la cinética de las reacciones químicas de orden 1. Después de un cierto tiempo, al que se denomina período de semidesintegración (***T***), la cantidad de una especie radiactiva (radionucleido) se reduce a la mitad. Al transcurrir dos períodos de semidesintegración queda la cuarta parte de la cantidad inicial del radionucleido; después de tres períodos, la octava parte; y así sucesivamente. Si N_0 es el número inicial de átomos de una especie radiactiva cuyo período de semidesintegración es T, la cantidad de átomos N que quedan después de un cierto tiempo t será (ver cuadro 1)

$$N = N_0\, 2^{-n}$$

donde n es el número de períodos de semidesintegración que transcurrieron durante el tiempo t. Como este valor es igual al cociente entre el tiempo y el período de semidesintegración, la ley del decaimiento radiactivo se puede expresar también de la siguiente forma

$$N = N_0\, 2^{-t/T}$$

Si se aplica logaritmos naturales a la ley del decaimiento radiactivo se llega a que

$$\ln N = \ln N_0 - t/T \ln 2$$

Como $\ln e = 1$, resulta que

$$\ln N = \ln N_0 - t/T \ln 2 \cdot \ln e$$

Al hallar antilogaritmos naturales, llamando al factor **ln 2 / *T*** *constante de decaimiento radiactivo* *l*, se llega a otra forma de expresar la ley del decaimiento radiactivo, que aparece con mayor frecuencia en la bibliografía.

$$N = N_0\, e^{-\frac{t \ln 2}{T}}$$

o bien

$$N = N_0\, e^{-lt}$$

Esta forma de la ley del decaimiento radiactivo responde a lo que en

Períodos de semidesintegración transcurridos	Fracción de átomos que no decayeron (N/N_0)
0	1
1	$1/2 = 1/2^1$
2	$1/4 = 1/2^2$
3	$1/8 = 1/2^3$
4	$1/16 = 1/2^4$
n	$1/2^n$

Cuadro 1
La fracción de átomos de un radionucleido que queda después de cada período de semidesintegración decrece exponencialmente con el tiempo.

estadística se denomina un proceso aleatorio (al azar) de Poisson. La función de probabilidad de Poisson describe situaciones en las que el número de eventos a observar tiende a infinito (puede decaer un átomo en cualquier instante de tiempo a partir de un instante inicial) y la probabilidad de un suceso (como el decaimiento de un átomo en particular) tiende a cero. Si en un tiempo t ocurren en promedio $\bar{n}$ sucesos (decaimientos), la probabilidad P_n de que ocurran n sucesos en ese tiempo está dada por

$$P_n = (\bar{n})^n e^{-\bar{n}} / n!$$

donde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3.2.1$

Por lo tanto, y si se tiene en cuenta que el factorial de cero es igual a uno, la probabilidad P_o de que no se produzca ninguna desintegración en el tiempo t es

$$P_0 = e^{-\bar{n}}$$

Pero el número medio de decaimientos radiactivos es proporcional al tiempo, siendo l la constante de proporcionalidad. Reemplazando en la ecuación anterior

$$P_0 = e^{-lt}$$

Como la cantidad de átomos presente en una muestra radiactiva es extraordinariamente grande, se puede reemplazar la probabilidad de que no decaiga ningún núcleo por el cociente entre N y N_0, llegándose de esta forma a la misma ecuación obtenida empíricamente, lo que demuestra que el decaimiento radiactivo obedece a un proceso aleatorio del tipo Poisson.

$$N/N_0 = e^{-lt}$$

N_0	$\frac{\tau}{T}$
10	0,9661
20	0,9829
30	0,9886
40	0,9914
50	0,9931
60	0,9942
70	0,9951
80	0,9957
90	0,9962
100	0,9965

Cuadro 2
El verdadero período de semidesintegración T de una muestra radiactiva depende de la cantidad de átomos N_0 que la componen. Cuando la muestra se hace infinitamente grande, t *y* ***T*** *coinciden.*

Cuando los átomos no son tantos

En realidad, la ley del decaimiento radiactivo es válida para una muestra formada por un número infinitamente grande de átomos de radionucleido. Cuando la cantidad de átomos es pequeña, el proceso de decaimiento está mejor descripto por el esquema de Bernoulli, por el cual la probabilidad de que decaigan n átomos (P_n) en un cierto tiempo t, en una muestra formada por N_0 átomos iniciales, está dada por la siguiente ecuación

$$P_n = \frac{N_0!}{n!(N_0 - n)!} p^n (1 - p)^{N_0 - n}$$

Si se tiene en cuenta que la probabilidad p que decaiga un átomo en particular en el tiempo t está dada por el cociente entre lt y N_0, y que la constante de decaimiento es igual al cociente entre el logaritmo natural de **2** y el período de semidesintegración T del radionucleido, se llega a que la probabilidad de que en ese tiempo no decaiga ningún átomo será

$$P_0 = \left(1 - \frac{\ln 2 \cdot t}{T \cdot N_0}\right)^{N_0}$$

Por lo tanto, el decaimiento radiactivo, cuando el número de átomos de radionucleido no se puede considerar infinitamente grande, obedece a la ecuación siguiente

$$N = N_0 \left(1 - \frac{\ln 2 \cdot t}{T \cdot N_0}\right)^{N_0}$$

o bien

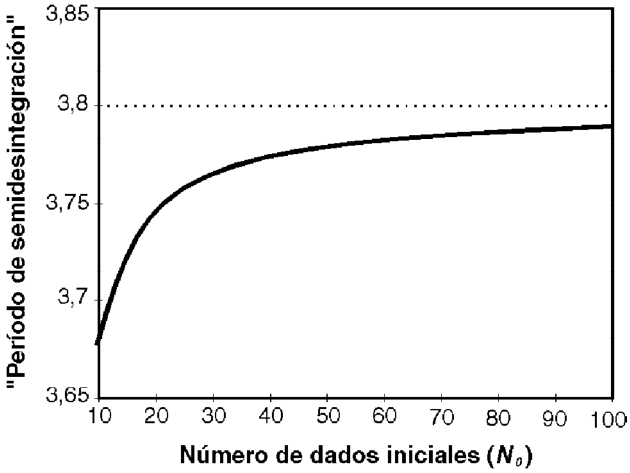
$$N = N_0 \left[1 - \frac{\lambda t}{N_0}\right]^{N_0}$$

Si se tiene en cuenta que el límite de $\left[1+\frac{a}{x}\right]^{x}$ para cuando x tiende a infinito es e^a, se llega a que cuando la cantidad inicial de átomos de radionucleido es infinitamente grande es válida la ley del decaimiento radiactivo

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}$$

¿Qué valor tendrá el cociente entre N y N_0 en una muestra finita cuando el tiempo de decaimiento es igual al período de semidesintegración? A partir de la ecuación obtenida para el esquema de Bernoulli, haciendo $t = T$, se llega a que dicho cociente es dependiente de la cantidad de átomos iniciales del radionucleido.

$$\frac{N}{N_0} = \left[1 - \frac{\ln 2}{N_0}\right]^{N_0}$$



El "período de semidesintegración" de la simulación del decaimiento radiactivo con dados (y con átomos también) tiende a 3,801784 unidades arbitrarias de tiempo cuando el número de dados (o átomos) iniciales tiende a infinito.

Este cociente tiende a 0,5 cuando N_0 tiende a infinito. Cuando el número de átomos iniciales toma los valores 10, 100, 1.000 y 10.000, el cociente toma los valores 0,48756, 0,49879, 0,49988 y 0,49999 respectivamente.

Haciendo el cociente entre N y N_0 igual a 0,5 se obtiene el verdadero período de semidesintegración τ de una muestra finita de átomos radiactivos, que es función del número de átomos iniciales, N_0 . Luego

$$\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{\ln 2 \cdot \tau}{T \cdot N_0}\right)^{N_0}$$

Los valores de τ se pueden hallar numéricamente fijando N_0 . El cuadro 2 da los valores del cociente entre τ y T para una cantidad de átomos iniciales comprendida entre 10 y 100.

Parte experimental

Se puede simular el decaimiento radiactivo tirando una cantidad N_0 de dados. Cada tirada equivale a una unidad de tiempo y los dados que caen con un cierto número hacia arriba, por ejemplo el 1, o una marca de pintura, equivalen a átomos que sufrieron decaimiento radiactivo. Después de cada tirada se separan los dados que representan a átomos que decayeron y se anota el número de dados restantes (N), que representan a los átomos que no decayeron.

Si se parte de una cantidad relativamente grande de dados, para un tiempo (representado por las tiradas) igual al período de semidesintegración, el cociente entre N y N_0 no difiere mucho de 0,5, el valor correspondiente a una muestra infinitamente grande. Así, para 40 dados este cociente es igual a 0,497. Por lo tanto no se comete un error muy grande si se emplea la ley del decaimiento radiactivo deducida para una muestra infinita de átomos radiactivos.

La probabilidad de que en la primera tirada no salga ninguna cara marcada es **5/6**, quedando teóricamente **5/6** N_0 dados para la próxima tirada. Después de la segunda tirada, el valor teórico de dados que quedan es $(5/6)^2 N_0$ y después de la tirada t quedan teóricamente

$$N = N_0\, (5/6)^t$$

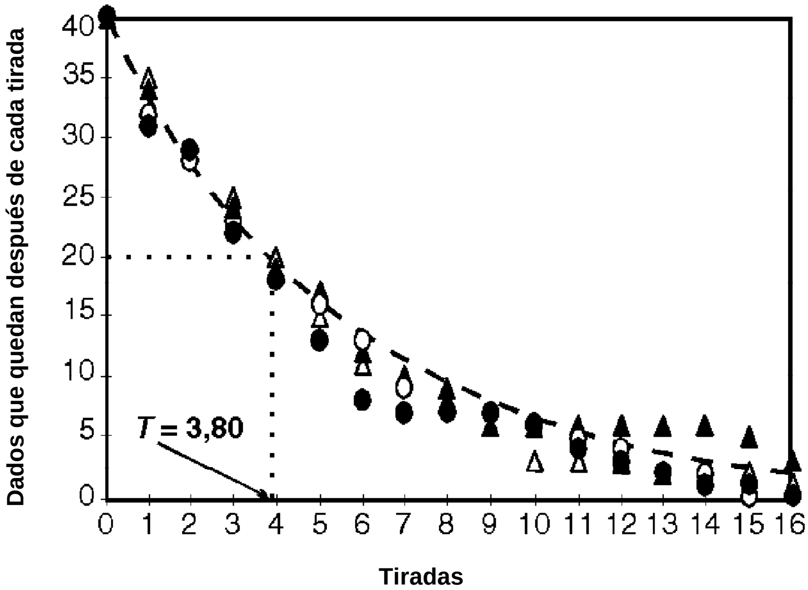
Si $t = T$, $N = 0{,}5\,N_0$. Por lo tanto el “período de semidesintegración” de los dados es

$$T = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{5}{6}} = 3{,}801784$$

y la “constante de decaimiento”, l, es igual **ln 6/5 = 0,18232**.

En la experiencia con dados se puede verificar que los valores de N experimentales son bastante próximos a los calculados con la ley del decaimiento radiactivo. Gráficamente se puede determinar el valor de T para los dados, que será cercano a 3,80.

$$N = N_0\, e^{-0{,}18232t}$$



Mediante la tirada de dados se puede simular un decaimiento radiactivo de un hipotético radionucleido cuyo período de semidesintegración es igual a 3,80 unidades arbitrarias de tiempo. Cada unidad arbitraria de tiempo está representada por una tirada de dados.

Bibliografía

Ricardo Pasquali, "La ley del decaimiento radiactivo", *Educación en la Química*, Vol. 1, nº 1, Set. 1990, p. 41 - 45.