

TRAYECTORIAS USUALES EN LA NAVEGACIÓN AÉREA DE LARGA DISTANCIA

Ricardo Miró

CORTE SUPREMA
DE JUSTICIA DE LA NACIÓN
Área de Procesamiento de Datos.

Es posible que el tema de esta colaboración pueda parecer en principio muy técnico para el estilo de una revista como *Educación en Ciencias*. Mas todavía si es esbozado en el espacio habitual destinado por la Dirección de la misma para aportes de carácter matemático.

Sin embargo, estimo que son las componentes algebraica y analítica contenidas en las consideraciones y resultados aquí expuestos, las que justifican a mi juicio su inclusión. Tales componentes, en conjunto con algunos conceptos básicos de Geometría Diferencial, constituyen un ejemplo muy ilustrativo acerca de las consecuencias geométricas que subyacen bajo la llamada Teoría de la Representación Conforme, capítulo extenso de una disciplina clásica y fascinante: el Análisis de Variable Compleja.

Las revistas científicas - en general - piden a sus colaboradores abstenerse de adjetivaciones. Una reflexión prudente hará ver lo atinado de esta sugerencia, que sin embargo he pasado aquí por alto de manera obvia. Luego de la excusa, expresaré que las circunstancias previamente apuntadas, no impiden mostrar con la necesaria sencillez un problema aplicado usual - tal es el caso de la trayectoria más adecuada en un vuelo aéreo de larga distancia -, mediante el empleo de las herramientas citadas. Esto mostrará que los desarrollos exhibidos, se adaptarán bien al tipo de contenido pensado para el público lector de esta revista.

Parece indudable que un piloto aficionado decidido a probar su avión ultraliviano desde Apeadero Bancalari hasta Aldo Bonzi y viceversa, necesitará casi como sus únicos instrumentos de vuelo tener una vista pasable y un poco de intuición. Es decir: los suficientes elementos como para no estrellarse de boca contra las frondosas arboledas de la Facultad de Agronomía, o carretear sin esperanzas hasta el fondo de un zanjón polucionado de la zona Oeste, que como se sabe, alimentan todos a nuestro tristísimo y olvidado Riachuelo.

Se comprenderá al instante que es muy distinta la situación encarada por el Comandante responsable de un costoso Jumbo 747. Podrá

aceptarse sin dificultad que unir a horario las capitales de Buenos Aires con Bonn, es bastante más complicado que las situación descripta más arriba. Se trata de realizar vuelo sin escalas, con altitud promedio de 10.000 metros sobre el nivel del mar, y a una velocidad crucero de 900 kilómetros por hora. En este caso, el consumo de combustible y el mantenimiento de la

aeronave resultarán comprensiblemente críticos. Luego, la elección de una trayectoria óptima -que como veremos se realiza de manera automática-, será de importancia crucial.

Describir la naturaleza de las trayectorias citadas, su carácter geométrico, y su definición tanto algebraica como analítica, constituyen el objetivo preciso de este trabajo.

1. LA ESFERA DE RIEMANN Y LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.

La Historia de la Ciencia parece mostrar recurrentemente un hilvanado continuo que captura las ideas brillantes, para aplicarlas y mejorarlas luego cada vez con mayor efectividad. Tal es el caso de la llamada Esfera de Riemann, emparentada de algún modo con el antiguo instrumento de observación conocido como astrolabio. Quizás convenga proponerle al Dr. Miguel de Asúa, una

colaboración futura sobre los usos y aplicaciones náuticas o terrestres de este instrumento, que incluya el tema de su posible construcción por parte de aquellos lectores que sean, además, aficionados a las prácticas de taller caseras.

Bernard Riemann (1826-1866), uno de los matemáticos más eminentes del siglo XIX (Bell, 1995), mostró que es posible establecer una correspondencia biyectiva entre una esfera y su plano ecuatorial, supuesto este último infinitamente extendido.

Tal correspondencia, llamada proyección estereográfica, consiste en irradiar

rectas desde el polo norte de la esfera atravesando con esos rayos las dos entidades geométricas dadas. Como se observa en la Fig. 1, a cada punto de la esfera -con excepción del polo norte-, le corresponde un único punto en el plano ecuatorial y viceversa. Esta definición es intrínseca: no hay coordenadas de ninguna clase, por lo que su comprensión inmediata resultara fácilmente asimilable.

Aprovechare ahora este hecho para introducir coordenadas, una vez anestesiado el terror hacia las mismas. Para tal fin, supóngase que el plano ecuatorial E es el plano de ecuación cartesiana $z = 0$, y piénsese al eje polar como la recta real ordinaria R (Ahlfors, 1970 y Markushevich, 1976).

La esfera S^* (a la que se le ha extirpado el polo norte) será un modelo para nuestro planeta con radio unidad, donde cada punto Z de su superficie se asocia con una terna ordenada de números reales,

$$Z = (x, y, z)$$

sujetas a la exigencia esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{1}$$

Tomando ahora el polo norte

$$N = (0, 0, 1)$$

y un punto genérico de la esfera Z, la recta definida por los puntos dados puede escribirse como el conjunto de ternas reales (x, y, z) tales que

$$(x, y, z) = N + \mu (Z - N), \quad (\mu \text{ es un número real})$$

expresión cuyo segundo miembro, dado en coordenadas cartesianas, queda determinado ahora de la siguiente manera:

$$(x, y, z) + [(\mu x, \mu y, \mu(z - 1) + 1)] \tag{2}$$

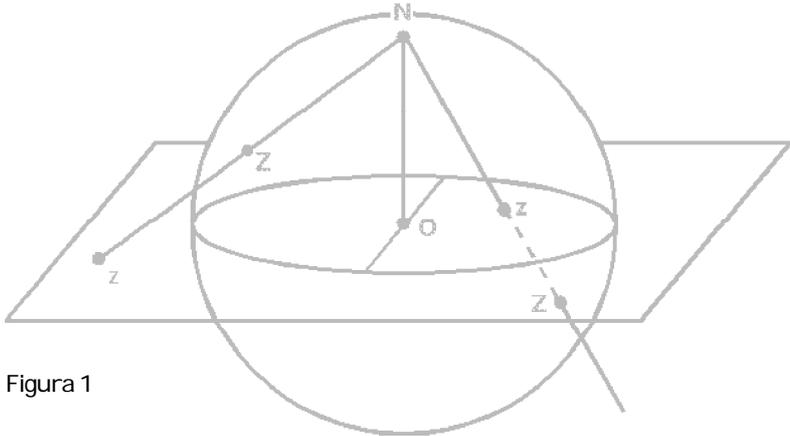


Figura 1

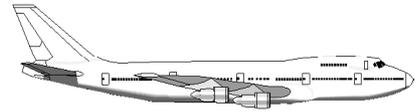
de donde surge claramente que

$$\mu = 1 / 1-z \quad (3)$$

Por lo tanto, el punto del plano ecuatorial perforado por el rayo (2) tendrá el sencillo aspecto siguiente, una vez efectuado el reemplazo de (3) en (2):

$$(x / 1 - z , y / 1 - z , 0) \quad (4)$$

Observando la Fig. 1, vemos entonces que la proyección estereográfica se establece:



$$Pe : S^* \textcircled{R} E \quad (5)$$

definida como

$$(x, y, z) \textcircled{R} (x / 1 - z , y / 1 - z , 0)$$

Se afirma luego que la correspondencia dada establecida entre S^* y el plano ecuatorial E dada por la proyección estereográfica es biyectiva.

Para tal fin se proclama calurosamente que la siguiente aplicación es la inversa de Pe :

$$Pe^{-1} : E \textcircled{R} S^* \quad (6)$$

definida como

$$(x, y, 0) \textcircled{R} (2x / x^2 + y^2 + 1 , 2y / x^2 + y^2 + 1 , x^2 + y^2 - 1 / x^2 + y^2 + 1)$$

Cabe aclarar que (6) se establece de un modo análogo al utilizado para la obtención explícita de (5), pero tomando ahora como vectores datos conocidos, el vector del plano ecuatorial genérico $(x, y, 0)$, luego de efectuar una cuenta similar para la determinación efectiva de Pe . El paso siguiente consiste obligatoriamente en verificar que la asignación anterior está bien definida, o sea que la terna ordenada de salida $(x, y, 0)$ es enviada de verdad a la esfera S^* . Para eso, basta con verificar que:

$$| Pe^{-1}(x, y, 0) | = 1$$

lo que constituye una comprobación inmediata y sencilla.

Como se sabe, la naturaleza biyectiva de Pe quedará garantizada si se demuestra que:

$$Pe^{-1} [Pe(x, y, z)] = (x, y, z) \quad (7)$$

y que

$$Pe [Pe^{-1}(x, y, 0)] = (x, y, 0) \quad (8)$$

Las dos verificaciones, (7) y (8) se llevan a cabo sin dificultad.

A partir de la definición verbal que motiva la Fig. 1, resulta intuitivamente evidente que

la proyección estereográfica inyecta el conjunto de meridianos de la esfera terrestre en el haz de (9)

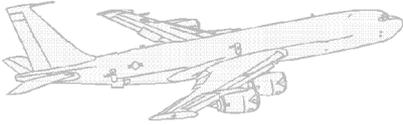
rectas que pasa por el origen de coordenadas (0, 0, 0).

2. ALGUNOS CONCEPTOS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL.

Si consideramos un vector en el plano ordinario \mathbb{R}^2

$$\mathbf{C} = (x, y)$$

y a cada componente la pensamos como una función de t , obtendremos en principio una curva plana



$$\mathbf{C}(t) = [x(t); y(t)] \quad (10)$$

donde se supone que t pertenece al intervalo cerrado $[a, b]$. Si se pide que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tengan suficientes condiciones de regularidad, tiene sentido considerar el vector de derivadas correspondiente:

$$\mathbf{T} = [x'(t); y'(t)] \quad \textcircled{R}$$

Ahora bien: lo interesante del asunto es que el vector \mathbf{T} resulta ser tangente a la curva $\mathbf{C}(t)$ en todos los puntos en que la derivada está definida. Es posible, sin embargo, que su módulo varíe caprichosa y sin control al variar el parámetro t -de manera análoga a como lo hace el carácter femenino-, lo que en verdad resulta harto fastidioso. Esto, por suerte, tiene remedio. Remedio que al menos en este caso subordina felizmente la ciencia a la cultura preexistente.

La situación es así porque en realidad, una curva es una entidad intrínseca, que manifiesta filosóficamente independencia respecto de su esquema descriptivo. Estos objetos ya habían sido pintados en las paredes de las cuevas habitadas ancestralmente (Hawkes, 1977) y también bulleron en la mente de artistas y filósofos mucho antes de que Newton, Leibnitz y luego Gauss introdujeran los conceptos usuales del Análisis en este tema (Newton, edición de 1977, y Bell, 1996). Por eso, lo correcto es afirmar que la expresión (10) constituye una parametrización específica de la curva \mathbf{C} . Cada curva es única, pero en principio puede ser descrita por muchas parametrizaciones diferentes, (Pogorelov, 1984, y Noriega, 1978).

Se demuestra que bajo condiciones muy generales, dada una curva que admite intrínsecamente tangente, siempre es posible elegir una parametrización $\mathbf{C}(t)$ de modo tal que su vector tangente \mathbf{T} no se anule en un punto de tangencia elegido por algún motivo particular. En tal caso, tiene sentido definir al vector tangente \mathbf{T}_c (vector de módulo unidad) como

$$\mathbf{T}_c = (x'(t) / |x'(t)|; y'(t) / |x'(t)|) \quad (11)$$

Esto resulta de interés al estudiar la manera con que dos curvas \mathbf{C} y \mathbf{D} se cortan en un punto dado \mathbf{P} . En tal caso el ángulo de corte β se detecta al recordar que

$$\cos(\beta) = \langle \mathbf{T}_c; \mathbf{T}_d \rangle \quad (12)$$

donde \mathbf{T}_c y \mathbf{T}_d son los versores tangentes de las curvas \mathbf{C} y \mathbf{D} calculadas en el valor de t correspondientes al punto de corte \mathbf{P} , y « $\langle ; \rangle$ » denota al producto interno usual entre vectores del plano.

3. LA ESPIRAL LOGARÍTMICA.

No entiendo muy bien por qué, pero las espirales parecen tener una componente misteriosa vinculada con alguna extraña simbología esotérica bastante complicada de rastrear. Al respecto, Jacques Bernoulli (1654 - 1705), un matemático suizo de tremenda importancia histórica y técnica, tiene un trabajo clásico sobre las espirales en donde las asocia con la resurrección de las almas (Espasa Calpe, 1950). Mas recientemente, el naturalista inglés sir Andreas Cook (1867 - 1928) empleó casi 20 años de labor para compilar un extenso tratado sobre el papel de las espirales en la Naturaleza: desde las galaxias constituidas según ese esquema, hasta la caparazón del caracol marino conocido como nautilus (Cook, 1916).

Además, en muchas películas de los años cuarenta, cada vez que el protagonista sueña o es sometido a sesión de hipnosis, aparece en la pantalla una espiral borrosa que gira y gira hasta que la cámara entra en el sueño o en el estado hipnótico inducido por ese giro incesante: los expertos en cine clásico no me dejarán mentir respecto de este preciso y sutil detalle.

Yo, en mi ignorancia, -más allá de las espirales de piretro que aún se usan para ahuyentar a los mosquitos en las pegajosas noches porteñas, o de aquellas cuerdas aceradas que propulsaban los autitos de latón con los que jugaba en mi niñez -, nunca supe que tuvieran otra utilidad o aplicación. Al menos hasta ahora, ya que en verdad, hay un montón de clases de espirales, (Carmichael- Smith, 1962).

Por ejemplo, usando coordenadas polares, la denominada espiral logarítmica es la curva que se define según esta parametrización:

$$R(t) = [a \cdot \exp(bt) \cdot \cos(t) ; a \cdot \exp(bt) \cdot \sin(bt)] \quad (13)$$

donde $a > 0$ y b son ambas constantes reales. En la Fig. 2 se muestran varias espirales logarítmicas, en la misma escala, para distintos valores de los parámetros a y b .

Es interesante observar que la circunferencia es una curva que tiene la propiedad que por obvia, resulta pocas veces citada: su versor tangente forma un ángulo constante con el radio vector que la dibuja. En este caso, como resultara conocido, el ángulo es de $\pi/2$ (Fig. 3). Ahora bien, sucede que la espiral logarítmica tiene la misma propiedad: su versor tangente también forma un ángulo constante con el radio vector que la dibuja, pero que es por supuesto distinto de $\pi/2$.

De hecho, si en la espiral definida por (4) se pone $b=0$, se obtiene una circunferencia de radio a , por lo que esta tradicional curva queda involucrada dentro de la familia de las espirales logarítmicas como caso degenerado. Esto resultará de utilidad más adelante, cuando se describan propiamente las trayectorias aéreas de larga distancia.

Se verifica el siguiente

Lema 1: La espiral logarítmica (13) define un ángulo constante con su radio vector, en todos los puntos en los que está determinada.

Dem: Basta efectuar el producto interno (12) entre el radio vector (13) normalizado como es usual así:

$$V = R(t) / |R(t)|$$

y el versor tangente Tr a la espiral (13) en un punto cualquiera de su definición. Como para un vector cualquiera (x, y) es

$$|(x, y)| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

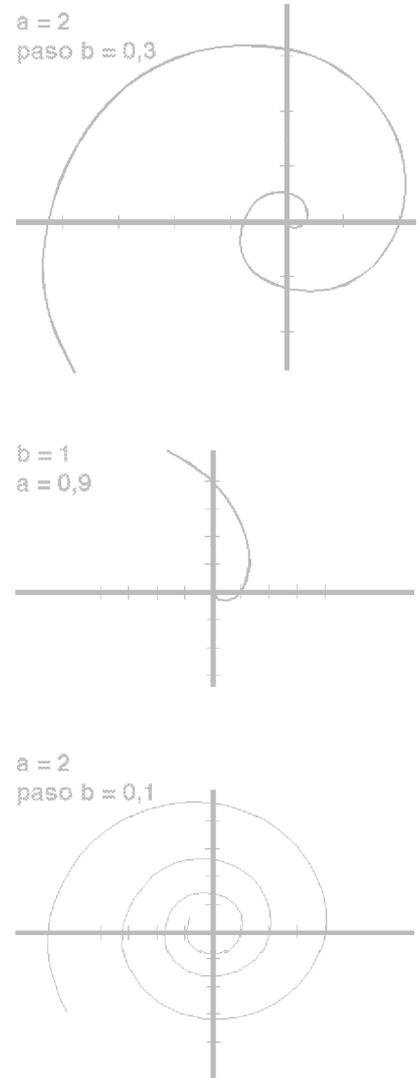


Figura 2

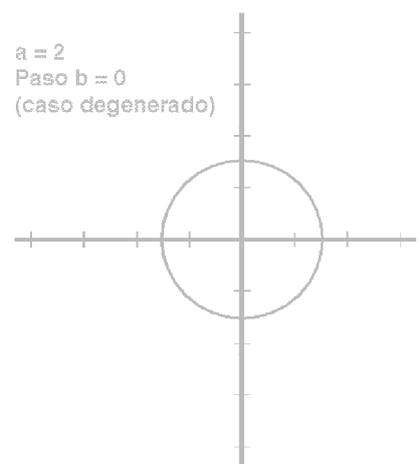


Figura 3

se observará luego de inmediato que

$$|V| = \exp(bt)$$

Ahora bien, como

$$R'(t) = [ab \exp(bt) \cos(t) - a \exp(bt) \sin(t) ; \\ ; ab \exp(bt) \sin(t) + a \exp(bt) \cos(t)]$$

surge que

$$|R'(t)| = (1 + b^2) \exp(bt)$$

Entonces, el versor tangente a la espiral (13) será luego

$$Tr = R'(t) / (1 + b^2) \exp(bt)$$

Por lo tanto, al tener en cuenta que la expresión cartesiana del producto interno (12) está dada por

$$\langle (x; y); (r; s) \rangle = xr + ys$$

se tendrá, luego de hacer la cuenta, que el ángulo de corte β del versor tangente Tr a la espiral con su radio vector V normalizado, se detecta a partir de

$$\cos(\beta) = \langle V; Tr \rangle = b / (1 + b^2)^{(1/2)} \quad (14)$$

en donde se observa que el ángulo investigado β es independiente del parámetro descriptivo t , y depende únicamente de la constante individual b , que regula el paso de la espiral considerada. (-qed-).

Se comentó más arriba que si $b = 0$, la espiral degenera en una circun-

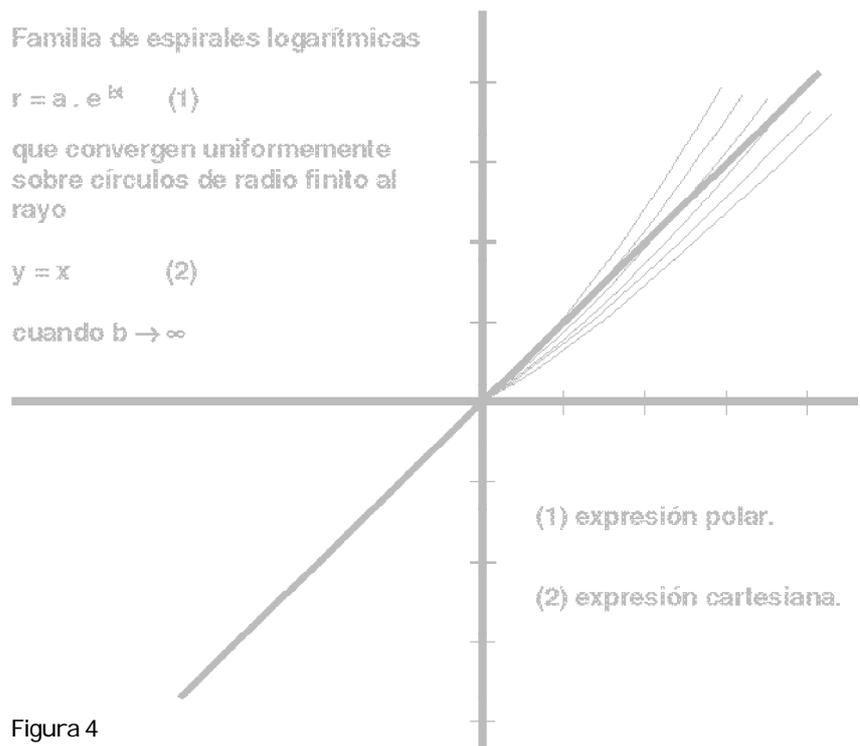


Figura 4

ferencia de radio a . ¿Qué sucede cuando b es desmesuradamente grande, es decir técnicamente cuando « b tiende a infinito»?

Constituye un ejercicio muy instructivo de Análisis I comprobar que en ese caso

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \langle \mathbf{V}; \mathbf{Tr} \rangle = 1 \quad (\text{para } b \text{ tendiendo a infinito})$$

pero esto a su vez informa que en tal situación, el ángulo β se va cerrando paulatinamente hasta anularse del todo ($\beta = 0$). Luego, en esta hipótesis extrema, la espiral tiende a confundirse con su radio vector.

La situación resulta un poco pesada a primera vista. Pero una vez asimilado el fenómeno, parece interesante darse cuenta que cada elemento del haz de rectas por el origen, puede considerarse como el

límite de una familia monstruosa de espirales que se van enderezando brutalmente a medida que b crece, (15) adosándose como serpientes de pesadilla a su radio vector trazante.

Una imagen rudimentaria del fenómeno descrito en (15) puede intuirse en la Fig. 4.

4. EL VUELO AÉREO DE LARGA DISTANCIA Y LA CURVA LOXODRÓMICA.

Antes de volar, los hombres conocieron el mar navegándolo.

Y al respecto, puede decirse que la tecnología de la navegación en alta mar es hoy extraordinaria, tanto por su nivel teórico como por el desarrollo histórico de sus elementos. El origen de esta realización debe haber sido no obstante algo modesto: de carácter lacustre o mas bien fluvial. A no dudar, un troglodita brillante, montado sobre un tronco ahuecado, tuvo la idea de impulsarse sobre el mismo para llegar a la orilla opuesta de algún lago o arroyo que obstaculizaba su camino. Pudo no haber sobrevivido a la empresa. O pudo haber descubierto tras su desembarco, un banano pletórico de frutos, una manada de bisontes apetecibles, o una tribu de mujeres extraviadas, solitarias, bellísimas , y también quizás super anhelantes.

Muchas culturas han intervenido en la riqueza que hoy exhibe la tecnología comentada, mostrándola como verdadero patrimonio común de la humanidad. En Occidente, valen la pena citar los aportes prácticos de los navegantes vikingos y de humildes relojeros como el ingles Harrison (Sagas Islandesas, anónimo, y Brown, 1993). Se sabe que los primeros utilizaban la calcita de Islandia, cortada en láminas delgadas, que al polarizar la luz, permitían detectar el sol en días nublados. Por su parte, el británico John Harrison fue el primero en resolver de un modo preciso y totalmente confiable, el difícil problema de la determinación de la longitud en alta mar. Esto lo hizo mediante la construcción artesanal de varios modelos de relojes con suspensión cardanica, entre 1725 y 1762, que demostraron sus habilidades marineras. al ser probados en reiterados viajes organizados por el Amirantazgo bajo condiciones sumamente adversas.

La teoría, por su parte, forma un extenso cuerpo de doctrina que comienza en el año -200 con los fundadores de la Geodesia: Eratóstenes e Hiparco. Sigue con cartógrafos matemáticos de la talla de Mercator (1620-1687) y Lambert (1728-1777). Y culmina por ahora con la pléyade de tecnólogos responsables de sistemas actuales como el GPS (Global Positioning System). Este adminículo le permite a un exitoso y bronceado ejecutivo - flotando en su pileta sobre un pato de goma inflable -, saber su posición geográfica

mirando de reojo un visor adosado a su teléfono celular (Taton, 1990, Dörrie, 1965, y Revista Week End, 1996).

Dominaron el mar. Y después, algunos hombres privilegiados aprendieron a volar.

Como es harto sabido, la navegación aérea es un fenómeno contemporáneo largamente postergado, tras la frustrada aventura de Icaro y los deslumbrantes intentos de Leonardo, (Da Vinci, edición de 1996). En esta cadena de maravillosas circunstancias, también es necesario colocar en la categoría de héroes máximos a los inolvidables ciclistas de Kitty Hawk, en Carolina del Norte: los hermanos Orville y Wilbur Wright (1874-1948 ; 1867- 1912) responsables todos, en última instancia, del tramo final vinculado con este artículo (American Heritage, 1992).

Entonces, ahora sí, resulta pertinente retomar esta pregunta: ¿Qué hace un Comandante a cargo de un Jumbo 747 cuando sale de Ezeiza y encara efectivamente su nave rumbo a Bonn?

En realidad, no hace nada.

Es decir: leerá El Gráfico, y galanteará con las monísimas auxiliares de a bordo, quienes le servirán sonrientes café o bocaditos especialmente preparados para él. De vez en cuando, además, no tendrá mas remedio que atender a ciertos pasajeros cargosos - quienes insistentes -, presionarán para acceder a la cabina de mando. Esto es ya sabido: se extasiarán como niños con la multitud de controles analógicos o digitales que por doquier atiborran el recinto, para contar luego la experiencia, cual expertos, en rueda de amigos .

Los hechos sucederán reiteradamente así, porque el proceso está automatizado casi en un cien por ciento. La computadora de a bordo, una vez que el navegante ha introducido las coordenadas geográficas de Buenos Aires y Bonn, literalmente ordenará clavar los comandos electrohidráulicos que gobiernan los dispositivos aerodinámicos de dirección de la nave, fijándolos con rumbo inamovible. Esto provocará que en todo momento, el avión corte a cada meridiano en un ángulo constante. Si las condiciones meteorológicas son evaluadas a priori como algo pesadas, el navegante podrá introducir coordenadas intermedias a los efectos de reducir el previsible desplazamiento lateral, denominado «bando». Pero en principio, esto último es teóricamente innecesario.

Yo siempre pensé que estos vuelos se desarrollaban a lo largo de círculos máximos con el objetivo de ahorrar combustible, pero ciertamente estaba equivocado. Como se sabe, un círculo máximo es aquel que divide a una esfera en dos mitades iguales. De hecho, la trayectoria mas corta que une dos puntos dados sobre una esfera -trayectoria geodésica -, está dada por el menor arco de círculo máximo que los une. Siempre existen dos de esos arcos, y son iguales únicamente en el caso en que los puntos sean antípodas.

Pero atención: los arcos de círculo máximo no cortan a los meridianos en un ángulo constante, salvo que se trate del ecuador o de un mismo meridiano. Esto se puede demostrar rigurosamente de manera analítica, o bien uniendo con un piolín dos puntos arbitrarios sobre un globo terráqueo para ver que es lo que pasa. Esto último, también es una demostración rigurosa, aunque de carácter analógico: el folklore de los hombres del aire dice que así procedió Charles Lindbergh (1902-1974), antes de encarar su famoso vuelo solitario sobre el Atlántico, uniendo en 1927 a Nueva York con Paris (Britannica, 1997).

Ahora bien, si el Jumbo desarrollara su vuelo intercontinental sobre una trayectoria geodésica, la computadora instalada tendría que trabajar incesantemente con los mecanismos y comandos que dirigen aerodinámicamente la nave, someténdolos a un excesivo uso - y por lo tanto -, a un desgaste peligroso. Por el contrario, fijando el rumbo de una vez para siempre, el desgaste será casi nulo.

La trayectoria que tiene esta propiedad, (Fig. 1), aquella que corta a los

meridianos según un rumbo o ángulo constante, es una curva esférica llamada «loxodrómica» (del gr. Loxos, oblicuo y Dromos, rumbo, Corominas-Pascual, 1980 y Comellas, 1991).

La longitud de un arco de loxodrómica que une dos puntos sobre una esfera, es en general algo mayor que la que corresponde al arco de una trayectoria geodésica, según lo observara por primera vez el cartógrafo portugués Pedro Nunhes (1492-1577) (Dörrie, 1965), cuyo análisis y demostración quedará para otro trabajo que complementa lo aquí tratado.

Queda claro, luego que la tecnología del vuelo aéreo civil prefiere emplear algo más de combustible en un viaje de gran distancia, pero minimizando al mismo tiempo el desgaste de los costosos y vitales mecanismos que gobiernan el rumbo de la nave. Naturalmente, los aparatos de uso militar, no tienen esta restricción, y ante la exigencia de un vuelo extenso y urgente, lo desarrollarán casi siempre sobre geodésicas.

Lo interesante ahora, desde el punto de vista matemático, es señalar la relación que existe entre las espirales logarítmicas planas - ya vistas-, y las curvas loxodrómicas sobre la esfera de Riemann. Ambas familias son imágenes isomórficas unas de otras vía la biyección provista por la proyección estereográfica.

Finalizo este trabajo demostrando la observación anterior. Se trata de una cuenta análoga a la realizada para la espiral logarítmica, pero bastante más desesperante. A propósito, deseo traer a colación un valioso comentario formulado por el muy recordado y querido Federico Manuel Peralta Ramos, quien en una época muy dolorosa para el país, tuvo el coraje de afirmar que «la felicidad consiste en bancarse la desesperación» (Peralta Ramos, F. M., 1975).

Surge luego el

Lema 2: Si L es una espiral logarítmica cualquiera del plano ecuatorial $z = 0$, y Pe es la inversa de la proyección estereográfica definida en (6), entonces

$Pe^{-1}(L)$ es una curva loxodrómica sobre S^* .

Dem: Para ahorrar espacio, simplemente transcribiré los resultados parciales, indicando luego los pasos a seguir y dando el resultado final obtenido.

Sea entonces L una espiral logarítmica tal como la definida en (13). Entonces usando la expresión de

Pe^{-1} dada en (4) se tendrá que

$$\begin{aligned} Pe^{-1}(L) &= [x(t), y(t), z(t)] = [2a \exp(bt) \cos(t) / 1 + a^2 \exp(2bt) ; \\ &; 2a \exp(bt) \sen(bt) / 1 + a^2 \exp(2bt) ; \\ &; b^2 \exp(2bt) - 1 / 1 + a^2 \exp(2bt)] \end{aligned}$$

Ahora bien, un rayo G por el origen del plano ecuatorial es un conjunto de puntos $(x, y, 0)$ tal que si F es un ángulo fijo entre «-p» y «p», entonces

$$G = \{ (x, y, 0) = [t \cos(F) ; t \sen(F) ; 0], \text{ con } t \in \mathbb{R} \}$$

Al tener en cuenta lo dicho en la expresión verbal (9), entonces se tendrá que la notación analítica de un meridiano estará dada por:

$$\begin{aligned} Pe^{-1}(G) &= [a(t) ; b(t) ; c(t)] = \\ &= (2t \cos(F) / t^2 + 1 ; 2t \sen(F) / t^2 + 1 ; t^2 - 1 / t^2 + 1) \end{aligned}$$

Luego, lo único que resta por hacer es efectuar la misma cuenta de siempre, para el caso particular de las curvas dadas. Es decir, calcular el cose-

Agradecemos las precisas observaciones recibidas por parte del Comandante Alberto Güeli, prestigioso piloto internacional de Aerolíneas Argentinas con vasta experiencia en la conducción de grandes aparatos: desde los míticos Caravelle anglofranceses, hasta los ya mencionados Jumbo 747 norteamericanos. Destacamos además el apoyo en software recibido por dos jóvenes amigos: Luis Biolcati, (UBA Agronomía), en sus aspectos generales, y Julián Villanueva Blejer, en sus aspectos geográficos, a lumino del Instituto ORT, apasionado por los temas científicos y gran seguidor del legendario Racing Club.

no del ángulo de corte entre el meridiano esférico (16) y la candidata a loxodrómica (17). Para lo cual, habrá que calcular la siguiente expresión:

$$\cos(a) = \frac{x'a' + y'b' + z'c'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} (a'^2 + b'^2 + c'^2)^{1/2}}$$

evaluada en el valor del parámetro t_0 donde las curvas efectivamente se cortan.

Como dije antes, la cuenta es desesperante, pero en lo esencial, el trabajo requerido no implica ningún melodrama del otro mundo.

Si se tiene paciencia, se llega a la expresión buscada:

$$\cos(a) = \frac{b}{(1 + b^2)^{1/2}}$$

con lo que el lema queda completamente demostrado (-qed-)

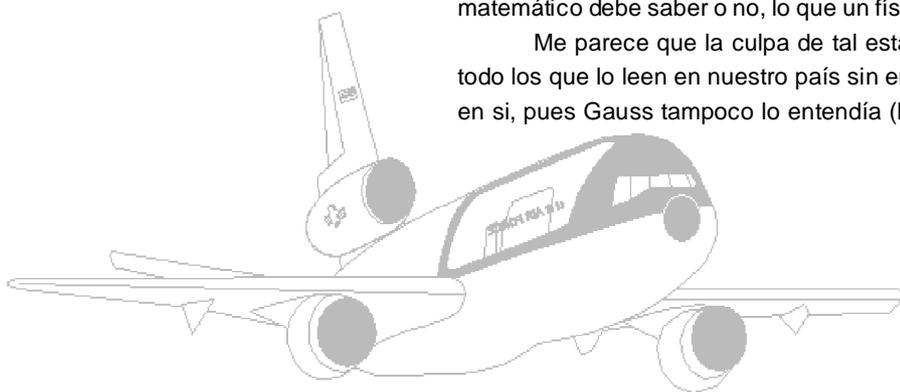
5. CONCLUSIÓN.

Tanto la proyección estereográfica como su inversa respetan los ángulos que definen las curvas que se interesan entre sí. Ambas ejemplifican lo que se entiende por transformación conforme. La inversa asigna una loxodrómica propiamente dicha a cada espiral logarítmica no degenerada y viceversa. Si la espiral es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas (0, 0, 0), entonces la loxodrómica será un paralelo (con el ángulo de corte igual a $\pi/2$). De acuerdo con lo expresado en (15), un rayo a través del origen puede también concebirse como una espiral logarítmica degenerada. Y en virtud de la observación hecha en (9), su imagen será un meridiano (con ángulo de corte nulo), inventario que completa las diversas loxodrómicas posibles sobre el globo terrestre.

La teoría que estudia específicamente las transformaciones conformes, tiene hoy día un altísimo nivel de abstracción algebraica y topológica, sobre todo en el amplio campo de las llamadas superficies de Riemann (Cohn, 2976). Pero tal estado de cosas no impide que al mismo tiempo esta disciplina posea también otro inmenso terreno de aplicaciones en Mecánica de Fluidos, Viscoelasticidad, Resistencia de Materiales y varias otras ramas de la Física y las Matemáticas con incidencia tecnológica: tal es el caso de la aplicación vista, cubierta por la Teoría de la Navegación Marítima y Aérea.

Lo expuesto muestra cuán lamentable y subdesarrollado es el esquema vigente en ciertos ámbitos universitarios locales, donde en vez de diseñar y enseñar a desarrollar algoritmos o aprender a usar el Cálculo de Variaciones, se discute interminablemente desde hace décadas la división supuestamente epistemológica entre disciplinas fácticas, formales, aplicadas, puras, lo que un matemático debe saber o no, lo que un físico debe saber o no, y así *ad infinitum*.

Me parece que la culpa de tal estado de cosas la tiene Hegel, y sobre todo los que lo leen en nuestro país sin entenderlo. Esto último no es tan grave en sí, pues Gauss tampoco lo entendía (Bell, 1995).



BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA.

- 1) American Heritage Dictionary, Boston, Houghton Mifflin, 1992, Third Edition, artículo «Kitty Hawk».
- 2) Anónimo: «La Saga de Erik el Rojo y Otras Sagas Islandesas», Madrid, Siruela, 1989, Introducción, pgs I/XLVI.
- 3) Ahlfors, L.: «Complex Analysis», New York, Mc Graw Hill, 1966, pgs. 18/20.
- 4) Bell, E.T.: «Historia de las Matemáticas», México D.F., FCE, 1995. Riemann, Gauss y otros matemáticos descolantes, son tratados en casi todos los capítulos, tal vez de manera muy técnica. En cuanto a la opinión de Gauss sobre Hegel, se sugiere analizar la carta enviada por el princeps mathematicorum a su amigo Schumacher, en la obra Sigma (de Newman, J.), pg.240, citada a continuación. (5).
- 5) Brown, L.: «La Longitud», (de la compilación Sigma, preparada por Newman, J.), Barcelona, Grijalbo, 1990, Vol. II, pgs. 58/98.
- 6) Carmichael, R., Smith, E.: «Mathematical Tables and Formulas», New York, Dover, 1962, pgs. 226/237.
- 7) Comellas, J. L.: «El Cielo de Colón», Madrid, Tabapress, 1991, capítulo sobre «Técnicas de Navegación».
- 8) Cook, T.A.: «The Curves of Life», New York, Dover, 1979, pgs. 1/40.
- 9) Cohn, H.: «Conformal mappings on Riemann Surfaces», New York, Dover, 1967, pgs. 67/100.
- 10) Corominas, J. Pascual, J.: «Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico», magna obra conocida por la gente de Letras como «Corominas Grande» (en oposición a una versión «chica» o resumida del mismo trabajo), artículo «loxodrómica».
- 11) Dörrie, H.: «100 Great Problems of Elementary Mathematics», New York, Dover, 1990, pgs. 310/321.
 - 12) Enciclopædeia Britannica, London, 1997, artículo «Lindberg, Charles»
- 13) Espasa Calpe: «Enciclopedia General Ilustrada», Madrid, Espasa Calpe, 1950, artículo «loxodrómica».
- 14) Hawkes, J.: «El desarrollo Cultural y Científico de la Humanidad», Buenos Aires, Unesco-Sudamericana, 1977, vol. I, capítulos I y II.
- 15) Leonardo Da Vinci: «Cuaderno de Apuntes», Madrid, Er, 1994, nota sobre «La Máquina de Volar».
- 16) Markushevich, A.: «Teoría de las Funciones Analíticas», Moscú, Mir, 1976, Vol. I, pgs. 68/84.
- 17) Newton, I.: «Principios Matemáticos de la Filosofía Natural», Madrid, Editora nacional, 1982. Se recomienda analizar el material expuesto en el extenso prólogo de esta obra clave escrito por su primer traductor al castellano, Antonio Escohotado.
- 18) Noriega, R. J.: «Apuntes de Geometría III», Buenos Aires, FCEyN-UBA, curso de 1978: capítulo de Teoría de Curvas.
- 19) Peralta Ramos, F. M.: «Soy un Pedazo de Atmósfera», EMI Records Arg., 1975 (lado A)
- 20) Pogorelov, A.: «Geometría Diferencial», Moscú, Mir, 1977, capítulo sobre Teoría de Curvas.
- 21) Revista Week -End: anuncio publicitario interno, Buenos Aires, 1996.
- 22) Taton, R.: «Historia de la Ciencia», Barcelona, Destino, 1975, Vols. II y III, capítulos sobre la evolución de las matemáticas durante los siglos XIX y XX.

Figura 5

