

**07**

# Derivada de una función

**Segundo Ciclo, Cuarto Año**

Asignatura	Tema	Libro Asociado
Matemática	Derivada de una función por definición	



Material elaborado por el Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación.

**Autora:** Prof. Ing. Haydee Noceti.

**Diseño Gráfico:** Carolina Macedra y Federico Timerman.

[www.inet.edu.ar](http://www.inet.edu.ar)

## Orientaciones para el/la docente

El material que aquí les presentamos hace referencia a una forma de enseñar y aprender derivadas.

El primer tema corresponde a lo que se denomina "razón promedio de cambio o tasa promedio de cambio".

¿Qué se entiende por razón promedio de cambio?

Vivimos en un mundo de permanente cambio. Ante los cambios importa saber, cuán rápidos o a qué razón están cambiando.

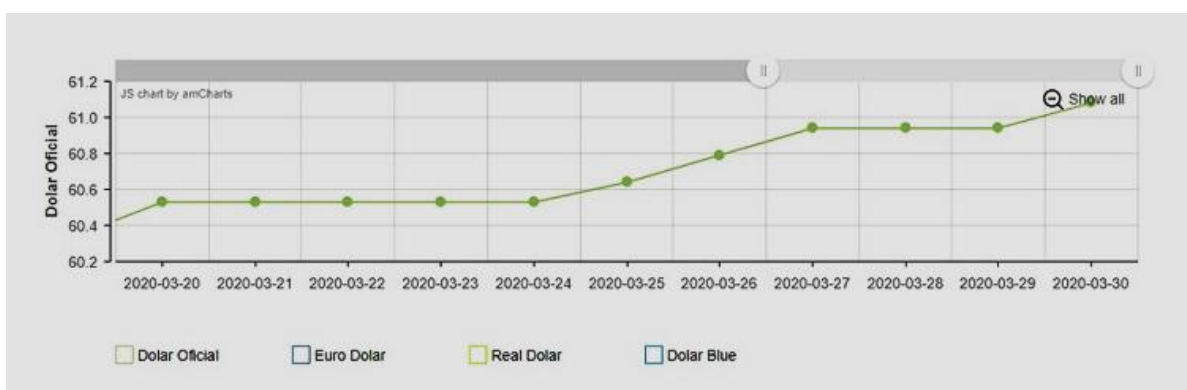
Esta situación de la realidad la podemos modelizar desde la Matemática. Un modelo matemático es el que expresa una situación real. Es decir, dada una situación de la realidad se puede transformar en un formato matemático con el propósito de organizar y comunicar de manera clara los elementos que constituyen esa realidad y sus relaciones.

Los modelos matemáticos pueden estar expresados mediante: gráficos, tablas o en forma de fórmula.

### A modo de ejemplo

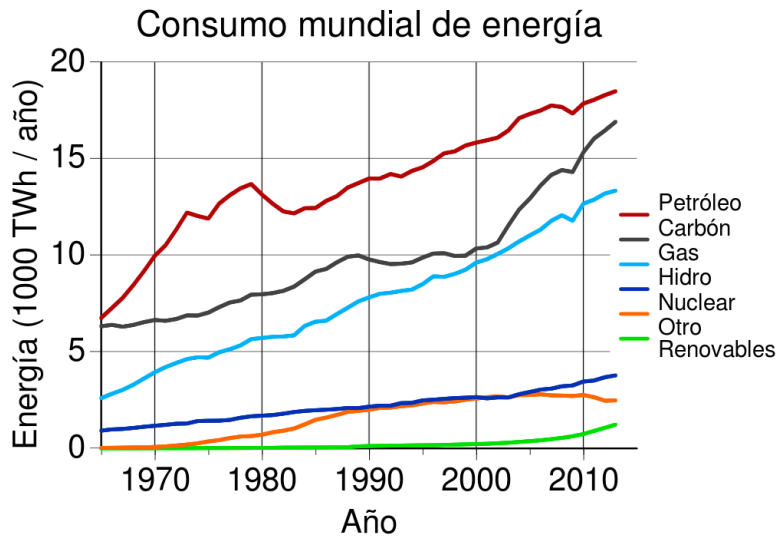
#### Mediante gráficos

1) Podemos observar mediante un gráfico en coordenadas cartesianas la variación del dólar oficial en Argentina desde el 20-03-2020 al 30-03-2020.



Fuente: <https://www.dolarsi.com/graficos-estadisticas/>

2) Otro modelo es el gráfico de la variación del consumo de energía mundial en el período comprendido entre 1970 y 2010 (intervalos de 10 años).



Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Consumo\\_y\\_recursos\\_energ%C3%A9ticos\\_a\\_nivel\\_mundial#/media/Archivo:World\\_energy\\_consumption\\_es.svg](https://es.wikipedia.org/wiki/Consumo_y_recursos_energ%C3%A9ticos_a_nivel_mundial#/media/Archivo:World_energy_consumption_es.svg)

### Mediante tablas

Otra forma de modelizar es mediante tablas.

Por ejemplo, la tabla que muestra la cantidad de partidos que jugó Lionel Messi desde la temporada de fútbol 2014-2015 hasta 2019-2020 en la Champions League.

Año	Jugados
2019-20	6
2018-19	10
2017-18	10
2016-17	9
2015-16	7
2014-15	13

Otro ejemplo de modelo mediante tabla es la que muestra la cantidad de goles que hizo Lionel Messi desde la temporada de fútbol 2014-2015 hasta 2019-2020 en la Champions League.

Año	Goles
2019-20	2
2018-19	12
2017-18	6
2016-17	11
2015-16	6
2014-15	10

Fuente:

[https://www.google.com/search?sxsrf=ALeKk0266Pw3M4VNjo6VkJAk6SN\\_w\\_4HNmg%3A1585707087852&soce=hp&ei=T\\_iDXr3HMBjF5OUPs\\_up8AE&q=estad%C3%ADsticas+de+messi&oq=estad%C3%ADsticas+de&gs\\_lcp=CgZwc3ktYWlQARgCMgIIADIFCAAQgwEYAggAMgIIADICCAyAggAMgIIADICCAyAggAMgIIADoECCMQJ1BPWPkhYKhEaABwAHgAgAGnAYgB4QmSAQM1LjaYAQCgAQGgAQdnd3Mtd2l6&scIent=psy-ab](https://www.google.com/search?sxsrf=ALeKk0266Pw3M4VNjo6VkJAk6SN_w_4HNmg%3A1585707087852&soce=hp&ei=T_iDXr3HMBjF5OUPs_up8AE&q=estad%C3%ADsticas+de+messi&oq=estad%C3%ADsticas+de&gs_lcp=CgZwc3ktYWlQARgCMgIIADIFCAAQgwEYAggAMgIIADICCAyAggAMgIIADICCAyAggAMgIIADoECCMQJ1BPWPkhYKhEaABwAHgAgAGnAYgB4QmSAQM1LjaYAQCgAQGgAQdnd3Mtd2l6&scIent=psy-ab)

### Mediante fórmulas

También los modelos matemáticos se pueden expresar mediante fórmulas.

Por ejemplo, los ingresos anuales para una aerolínea desde 1991 a 1997 se pueden modelar mediante la siguiente función:

$$I(t) = -0.13t^2 + 0.54t + 5.22 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

### Determinación de la razón promedio de cambio

Consideramos la tabla de la Champions League que muestra los goles de Messi en el período 2014-15 / 2018-19.

Durante ese período, ¿cómo varió la cantidad de goles de Messi?

Período 2014-15: 10 goles

Período 2018-19: 12 goles

¿Cuál es el cambio que se produjo en el intervalo de tiempo 2014-15/2018-19?

La respuesta es:  $12 - 10 = 2$

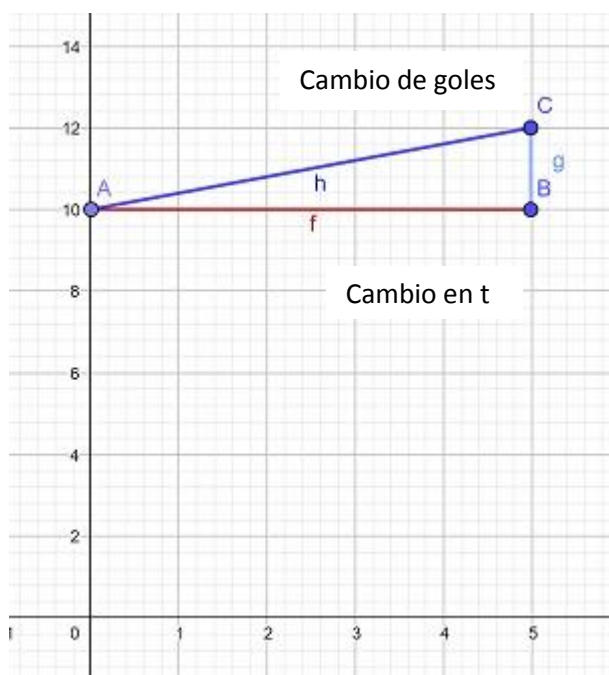
Esto significa que la cantidad de goles de Messi ha aumentado en 2 goles en 5 años. La razón promedio de cambio por año es: 0.4 goles por año.

La razón promedio de cambio es la pendiente de la recta que pasa por A y C.

Los cálculos se pueden expresar del siguiente modo:

$$\text{Razón promedio de cambio de goles} = \frac{\text{cambio de goles}}{\text{cambio de tiempo}}$$

$$= \frac{12 - 10}{5} = 0.4 \text{ goles por año.}$$



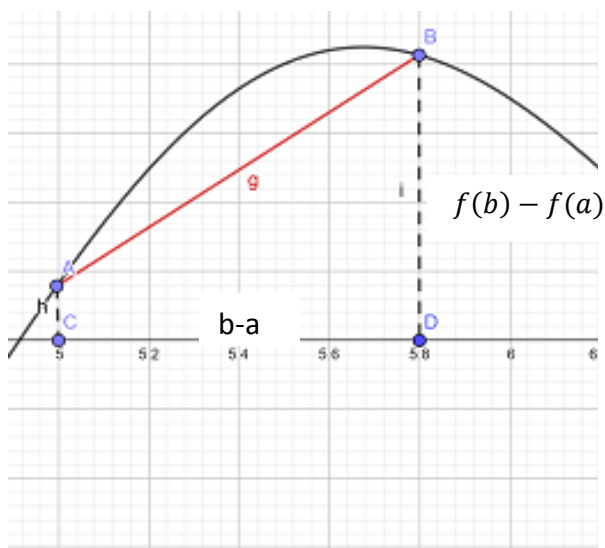
Esto significa que en el período de 5 años la cantidad de goles aumentó con una razón promedio de 0.4 por año.

Otra forma de expresión matemática es la siguiente:

$$\text{Razón promedio de cambio de goles de Messi} = \frac{\Delta G}{\Delta t}$$

## Definición formal de la razón promedio de cambio

Consideramos el gráfico de una función genérica:

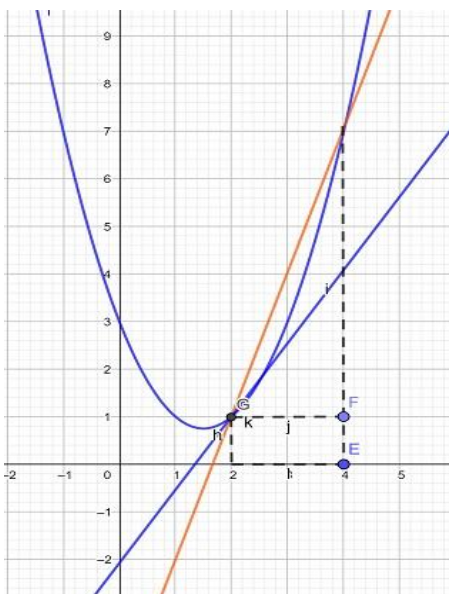


Razón promedio de cambio de  $f$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pendiente de la recta que pasa por A y B

## Razón instantánea de cambio



Graficamos la función  $f(x) = x^2 - 3x + 3$ . Queremos estimar la inclinación de la curva en  $x = 2$ .

Pendiente de la recta secante = razón promedio de cambio:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Pendiente de la recta tangente = razón instantánea de cambio

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h \rightarrow 0}$$

Es una forma, mediante el método geométrico, de definir la derivada

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h \rightarrow 0}$  esta expresión se escribe en forma general para cualquier función del siguiente modo:

$$f'(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x \rightarrow 0} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{Escribimos en lugar de } h, \Delta x$$

Las investigaciones y las experiencias acerca del proceso de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo en la escuela secundaria muestran la existencia de dificultades en los/as estudiantes durante el proceso de aprendizaje.

Una de las dificultades muy marcada se observa en el aprendizaje del concepto y del trabajo con límites. El símbolo **lím** por sí mismo trae inconvenientes en la comprensión por parte de los/as alumnos/as, porque es considerado como un "procepto", es decir, como objeto y proceso al mismo tiempo. Por eso una estrategia didáctica que se usa en la enseñanza de la derivada es la de comenzar antes que la enseñanza del límite. Expresado de este modo pareciera una metodología alocada, pero la experiencia indica que la comprensión del límite de este modo resulta más accesible. En realidad, lo que se hace es, a través de la enseñanza de derivadas, incluir simultáneamente el conocimiento de límite, pero desde el saber intuitivo, aquí reside la diferencia.

Por ello, en este material se trabaja la definición de derivada sin el uso del símbolo límite. Se desarrolla el conocimiento de la derivada mediante el aprendizaje del concepto de límite, en forma intuitivo, por aproximaciones.

A continuación, se plantea una actividad desarrollada como ejemplo de tal metodología.

### Actividad: Estimando pendientes de curvas

La imagen que se presenta corresponde a una puerta. Como se puede apreciar en su parte superior tiene una forma parabólica.

Mediante el uso del *GeoGebra* realizamos la siguiente actividad (para insertar imagen es necesario que se trabaje con computadora).

- 1) Insertamos la imagen.
- 2) Trazamos la parábola que se aproxime lo mejor posible a la curva de la puerta que queremos indagar.
- 3) Trazamos una recta secante por dos puntos de la parábola.
- 4) Determinamos las coordenadas de los puntos de intersección de la recta secante con la curva. Observamos, en la Vista algebraica las coordenadas de dichos puntos. Los puntos de intersección son: D y H, con coordenadas: (0.7 , 2.59) y (2.74 , 0.72)
- 5) Con los datos anteriores estimamos la razón promedio de cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.59 - 0.72}{0.7 - 2.74}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.87}{-2.04}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0.916$$

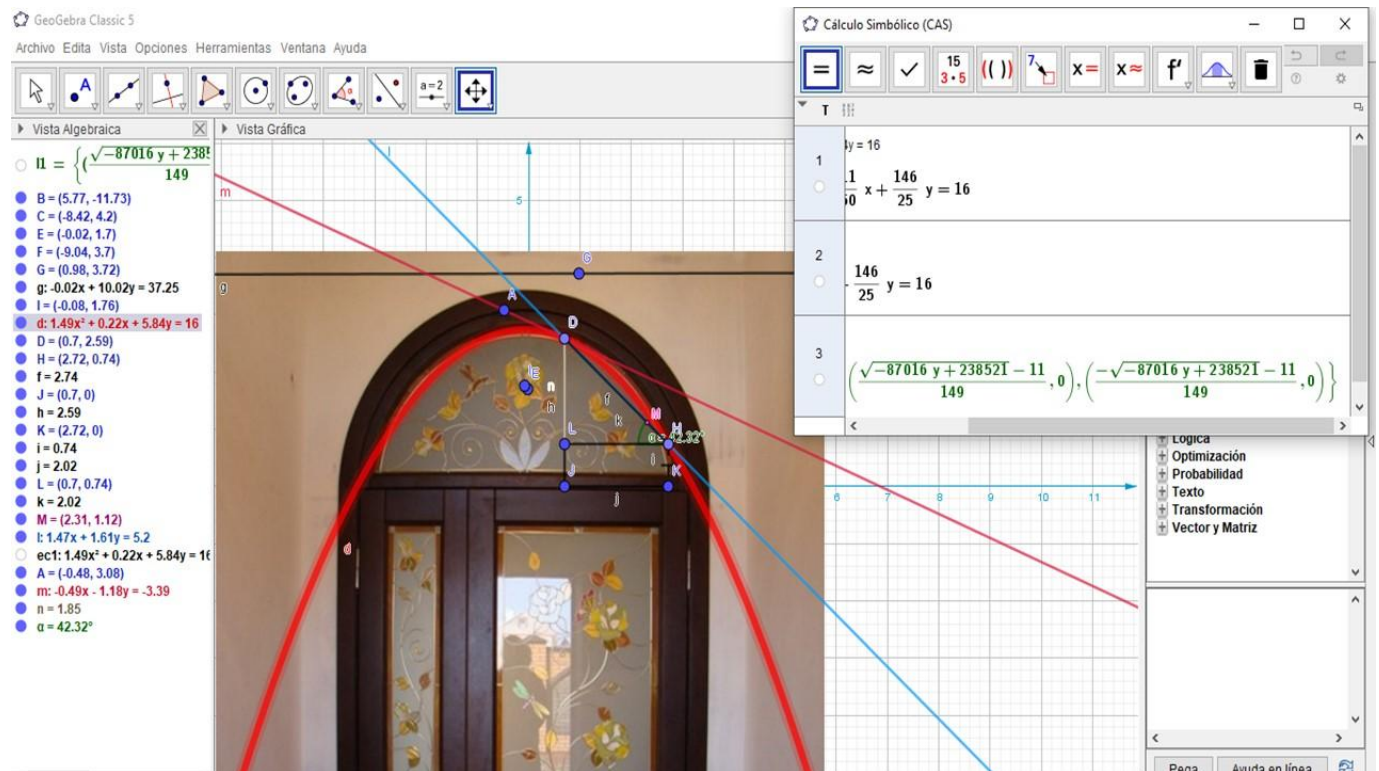
¿Qué nos está diciendo este valor?

Nos dice que la pendiente es negativa, lo podemos verificar en el gráfico

Si queremos estimar el valor del ángulo de inclinación, ¿cómo hacemos?

Recordemos que el ángulo se obtiene como el  $\text{arc tan}(-0.916) = 42^\circ 29'$ . Este es el valor que aparece en la pantalla de la calculadora, pero el valor tiene signo negativo, esto significa que el ángulo está en el segundo cuadrante o en el cuarto. En este caso pertenece al segundo cuadrante. Entonces el valor del ángulo de inclinación es:  $180^\circ - 42^\circ 29' = 137^\circ 31'$ .

En el *GeoGebra* el valor indicado es:  $42,32^\circ = 42^\circ 19'$



Para estimar el valor de la razón de cambio instantánea utilizamos otra función y su representación a los efectos de una mejor visualización (se puede trabajar con la aplicación del *GeoGebra* del celular).

Representamos en *GeoGebra* la función  $y = 0,1x^2$ .



Estimamos la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos: D y E. En la Vista Algebraica, la ecuación aparece en forma implícita:  $-3.2x + 4y = -4.81$

Llevamos esta expresión a la forma explícita:  $y = 0.8x - 1.2025$

Estimamos la razón de cambio instantánea en  $x = 2$ . Este valor nos dará la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de  $x = 2$ .

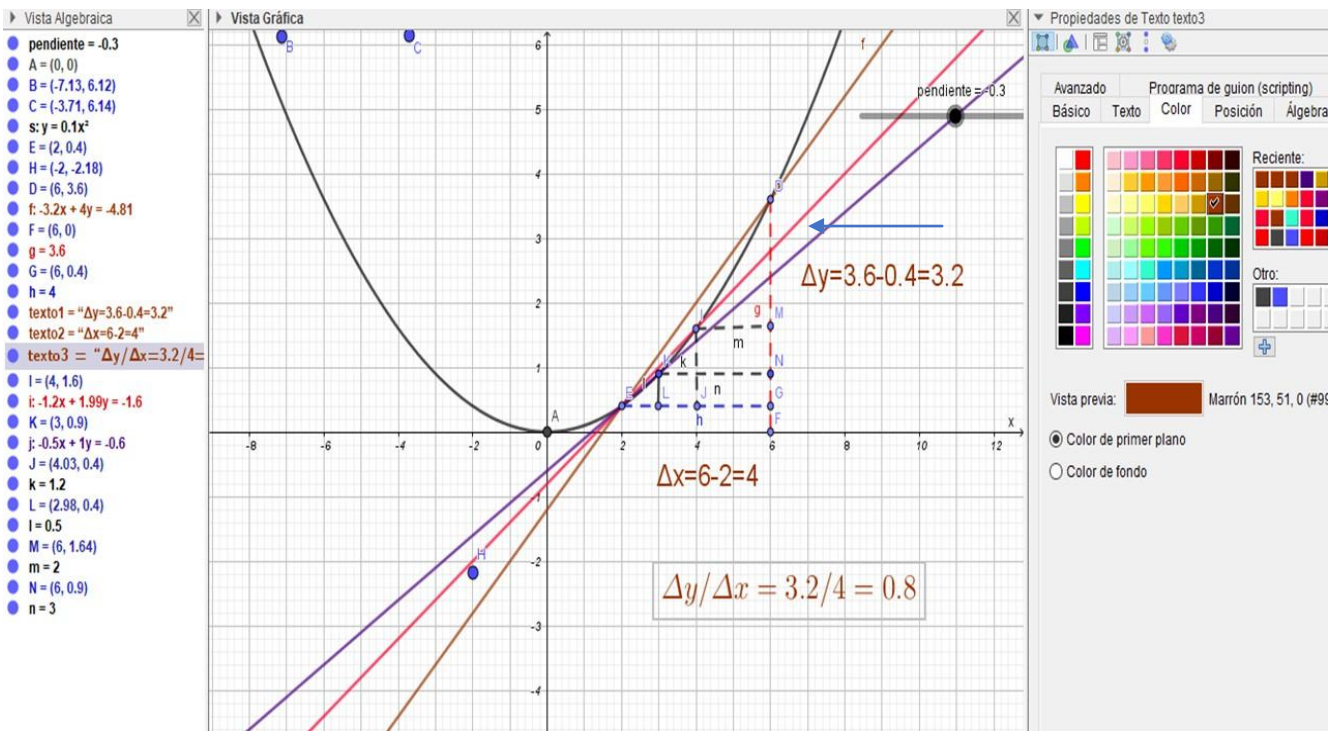
Lo hacemos por aproximaciones para valores cercanos a  $x = 2$  por la derecha y por la izquierda del número.

Armamos una tabla para una mejor apreciación:

x	0	0.3	0.6	1	2	2,5	3	4	6
y	0	0.009	0.036	0.1	0.4	0.625	0.9	1.6	3.6
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	0.03	0.09	0.16	0.3		0.45	0.55	0.7	1



Representamos mediante el GeoGebra (puede hacerse con la aplicación del celular)



La visualización de la gráfica y de los valores del cuadro permiten inferir que para valores próximos a 2 o sea para cuando  $\Delta x$  tiende a cero el valor de  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  tiende a 0.4. Este es el valor estimado de la pendiente de la recta tangente a la parábola en  $x = 2$ .

En símbolos lo indicamos así:  $\frac{\Delta y}{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

La expresión matemática anterior nos da una aproximación rápida a la derivada, por ello también la podemos escribir así:

$$f'(2) = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

En general, podemos escribir la expresión anterior del siguiente modo:

$$f'(a) = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (\text{derivada de } f \text{ en } x=a)$$

Usando la notación de límite, la expresión es la siguiente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

### A modo de síntesis

- 1) Llegamos a los límites por intuición (en esta etapa del aprendizaje)
- 2)  $f'(a)$  es un valor que se puede calcular o aproximar.
- 3) Decimos que  $f'(a)$  es la derivada de  $f$  evaluada en  $x = a$ .

Cuando los/as alumnos/as hayan afianzado este conocimiento y aprendan las técnicas de derivación, el cálculo se simplifica. Se hará de este modo:

Dada  $f(x) = 0,1 x^2$  la derivada es  $f'(x) = 2 \cdot 0,1x \rightarrow f'(x) = 0,2x$

Evaluada en  $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0.4$  es el mismo valor que habíamos obtenido por aproximación.

En el próximo ítem presentamos propuestas de actividades para que las realicen los/as estudiantes.

### Evaluación

Esta temática se puede evaluar usando la plataforma *Kahoot*. Para ello, se debe preparar por lo menos diez preguntas con respuestas verdadero - falso o para responder la respuesta correcta.

## Actividades para los/as estudiantes

### TEMA

Derivada de una función.

### MODALIDAD

Estas actividades pueden realizarse en forma presencial o a distancia. Si las realiza a distancia, puede hacerlo mediante Google Classroom 2020. Puede obtener información sobre su aplicación en: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLclJ8nSI2c7KrzlQ3kkHARAvyWgFe9g1v>

### CONOCIMIENTOS PREVIOS

Función, representación gráfica, uso del software *GeoGebra*.

### OBJETIVOS

- 1) Aplicar la definición de derivada en un punto mediante aproximaciones.
- 2) Resolver situaciones problema mediante la aplicación de la derivada en un punto.
- 3) Aplicar el cálculo de la derivada en un punto mediante la pendiente de una recta tangente en un punto de una curva.

### RECURSOS

Software: *GeoGebra*, *Word*, *Editor de ecuaciones del Word* (constituye una herramienta digital que facilita a los/as docentes y a los/as estudiantes escribir en lenguaje matemático). *Internet*. *Kahoot*.

### ORGANIZACIÓN DEL ALUMNADO

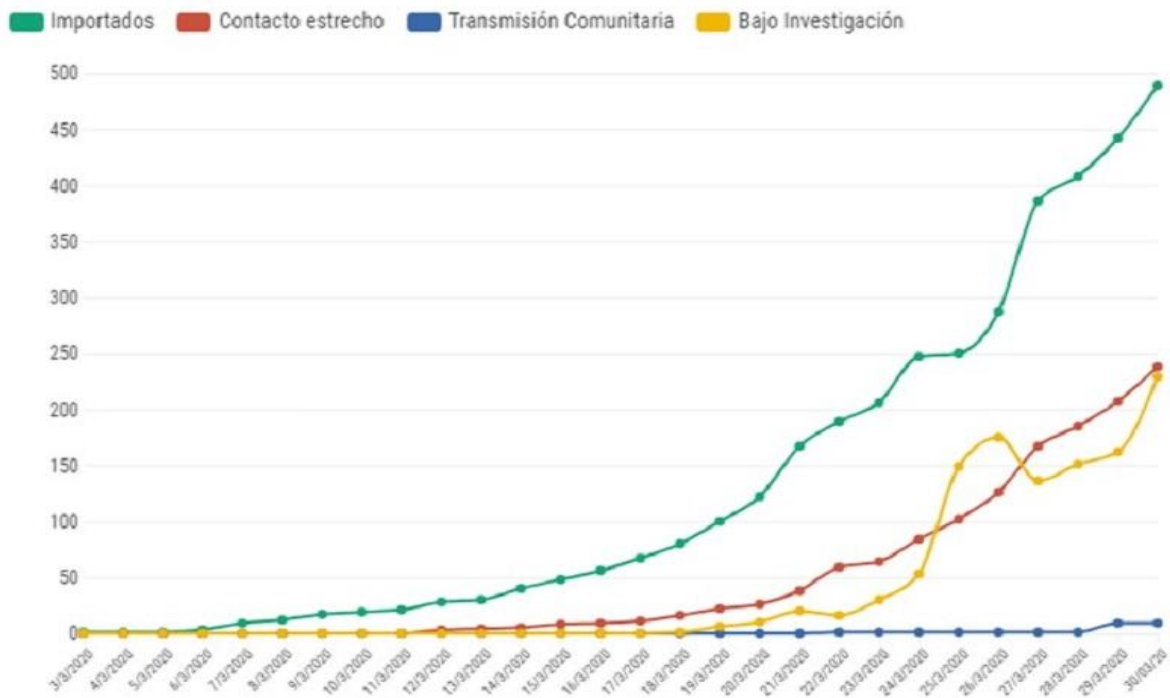
En forma de equipos.

## ACTIVIDAD 1

En esta época, lamentablemente vemos y escuchamos permanentemente en la TV a los periodistas usar términos de la Matemática, tales como, "el aislamiento permite que el crecimiento de la cantidad de personas infectadas no sea en forma exponencial".

Al término de cada día se da un parte con datos estadísticos de la Argentina y del mundo. En la comunicación escrita esos datos se vuelcan en forma de gráficos.

La gráfica que se visualiza en la siguiente página muestra la evaluación del coronavirus en nuestro país desde el 3 de marzo hasta el 30 de marzo.



Fuente: <https://www.infobae.com/politica/2020/03/31/coronavirus-en-la-argentina-todas-las-estadisticas-de-la-evolucion-de-la-enfermedad-desde-el-dia-cero/>

## Consignas

Mediante el uso del *GeoGebra* les solicitamos realizar la siguiente actividad (para insertar la imagen es necesario que se trabaje con computadora).

- 1) Inserten la imagen. Se sugiere sacar la numeración de los ejes para poder ver los datos de la imagen.
- 2) Usen solo la Vista Gráfica.
- 3) Consideren como unidad en el eje  $x$  la separación entre fecha de cada día y en el eje  $y$  los valores que figuran en la imagen.
- 4) Estimen la razón promedio de cambio (pendiente de la recta secante) entre el 17 y el 27 de marzo para cada una de las situaciones graficadas: importados, contacto estrecho, transmisión comunitaria y bajo nivel (trabajen en archivos separados cada uno de los casos).
- 5) Estimen la pendiente de la recta a la curva, en cada caso, en el punto de abscisa 17 de marzo (trabajen cada uno de los casos en archivos separados).
- 6) Compartan los resultados y saquen las conclusiones que consideren.

## ACTIVIDAD 2<sup>1</sup>

### Situación problema

Los micros de larga distancia tienen instalado un dispositivo con indicador lumínico y sonoro que alerta a los/as pasajeros/as si el chófer excede la velocidad máxima permitida.

En las terminales, los supervisores controlan el dispositivo de manera especial cuando se produce el cambio de temporada.

En una de las supervisiones realizadas en la terminal de Villa Gesell, se detectó en uno de los micros que llegó procedente de la Ciudad de Buenos Aires que el dispositivo estaba desactivado.

Los agentes de control interrogan a los choferes sobre los motivos de tal situación. La respuesta que ambos dieron fue que ese era el primer viaje que hacían y que no controlaron el equipo en Buenos Aires antes de la salida del micro.

Asimismo, cada uno señaló que ningún/ninguna pasajero/a reclamó por el no funcionamiento del aparato. Manifestaron también que no superaron la velocidad máxima permitida.

### En la hoja de ruta se lee:

- 1) Horario de salida de la estación de Retiro: 17.30 h.
- 2) Horario de llegada a Villa Gesell: 22.35 h.
- 3) Paradas en peajes y a los 210 km, en Dolores para el control de las cubiertas.

Los peajes se encuentran en las siguientes localidades y según la hoja de ruta el micro pasó por ellos en los siguientes horarios:

Localidad	Horario
Dock Sur	18 - 18.10
Hudson	18.28 - 18.38
Samborombón	18.58 - 19.08
General Conesa	21.20 - 21.25

La parada a los 210 km en Dolores se hizo entre las 20.38 y 20.53.

Con los conocimientos que ustedes tienen pueden hacer un estimado de las velocidades a las que fue el micro en cada uno de los tramos que recorrió hasta llegar a Villa Gesell.

<sup>1</sup> Fuente: Díaz M, Moroni M, Restrepo F (2017). Un camino hacia la derivada: secuencia de actividades para construir el concepto de velocidad media. Córdoba. Revista de Educación Matemática. V 32 N° 2. FAMAFA.

## Consignas

- 1) Busquen en Internet los km existentes entre Buenos Aires y cada uno de los peajes.
- 2) Busquen en Internet las velocidades máximas permitidas por tramo.
- 3) Estimen las velocidades medias por cada tramo.
- 4) Anoten en el cuaderno de trabajo los valores hallados.
- 5) Representen en diagrama cartesiano la distancia recorrida, por tramo, en función del tiempo (usar *GeoGebra*, puedes utilizar la aplicación del celular).
- 6) Representen en coordenadas cartesianas la velocidad media, de cada tramo y del tramo total, en función del tiempo (usar *GeoGebra*).
- 7) Verifiquen los valores de los kilómetros recorridos por tramo con las áreas de los rectángulos que han quedado dibujados en el diagrama anterior.
- 8) Verifiquen el área del tramo total con la suma de las áreas de cada tramo.
- 9) Intentamos encontrar la gráfica de la función velocidad.

En el gráfico de las velocidades medias, mediante el Comando Poligonal del *GeoGebra*, dibujen por tramo un polígono para cada intervalo de tiempo.

Cada polígono debe cumplir con las siguientes características: un lado es el intervalo de tiempo del tramo, el área del nuevo polígono debe ser igual al área del rectángulo que da la distancia recorrida en cada tramo.

- 10) Analizar en cada gráfico si en cada tramo se excedió la velocidad máxima permitida.
- 11) En cada tramo expresen en qué tiempo la función velocidad toma el valor de la velocidad media.
- 12) Seguramente los diagramas obtenidos por los/as estudiantes serán muy diferentes entre sí. Presentar en plenario todas las propuestas y compararlas entre sí.
- 13) Con los valores obtenidos, ¿pueden determinar si el micro superó la velocidad máxima permitida en cada tramo? Justifiquen la respuesta.
- 14) ¿Qué información o informaciones les parece debieran tener para saber si los choferes superaron la velocidad máxima en algún momento? ¿Será posible?
- 15) Desde el punto de vista de la Física, ¿el valor de qué magnitud se debe calcular para encontrar la respuesta buscada? ¿Cómo se calcula ese valor desde la Matemática?

## Evaluación final

Mediante la plataforma *Kahoot*.

¡ÉXITOS!