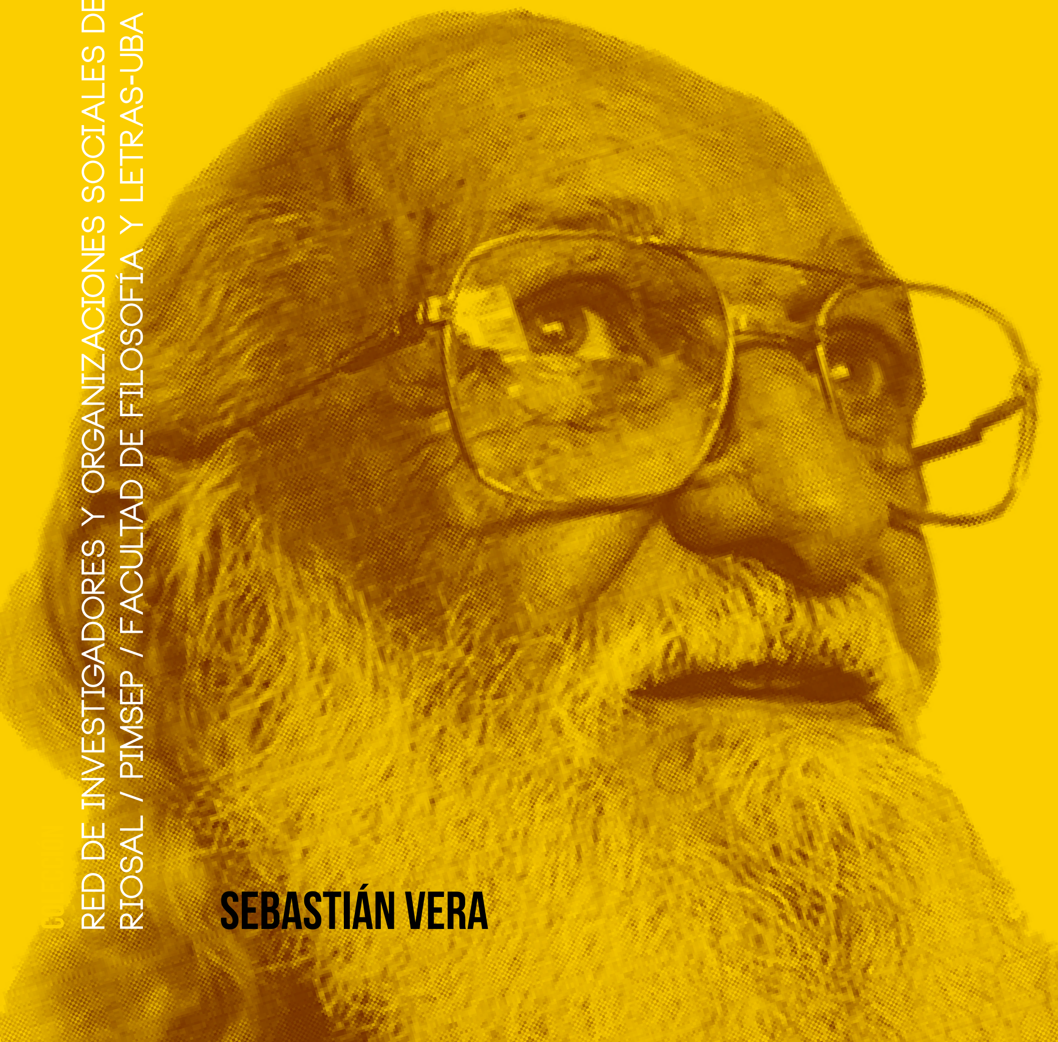
EDUCACIÓN POPULAR DE JÓVENES Y ADULTOS

Matemáticas

SOBRE NÚMEROS, MEDIDAS Y FÓRMULAS



RED DE INVESTIGADORES Y ORGANIZACIONES SOCIALES DE LATINOAMÉRICA

RIOSAL / PIMSEP / FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS-UBA

SEBASTIÁN VERA

Sebastián Vera

Matemáticas: Libro de texto para la educación popular de jóvenes y adultos * Primera edición Septiembre de 2018 * Buenos Aires, Argentina * Ediciones (RIOSAL)-PIMSEP.

168 pág. * 14x20 cm.

ISBN * En trámite.

Diseño y maquetación de cubierta e interior * **Martín Cossarini**

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en Argentina * *Printed in Argentina*
Impreso en **Imprenta Chilavert** * Cooperativa gestionada por sus trabajadores y trabajadoras.

imprentachilavert@gmail.com

Libro de texto

Matemáticas

Sobre números, medidas y fórmulas

Sebastián Vera

Equipo de coordinación
Roberto Elisalde-Joaquin Calvagno-Marina Ampudia

Colección
Red de Investigadores y Organizaciones Sociales de Latinoamérica
(RIOSAL)-PIMSEP/Facultad de Filosofía y Letras-UBA

índice

Presentación

Libros de texto y educación popular de jóvenes y adultos

Pensar en la elaboración de libros de texto para la educación de jóvenes y adultos (EDJA) representa una iniciativa poco habitual. Comúnmente estos materiales de aula son ampliamente desarrollados para otros niveles formativos de la educación: escuelas primarias, secundarias tradicionales, e incluso inicial. En muchos casos los libros o manuales son organizados por empresas editoriales privadas, las más de las veces por corporaciones, y en algunos pocos casos, por iniciativas de cooperativas.[1]

¿Por qué ocurre esto? Simplemente porque la mayoría de las editoriales consideran que la educación de jóvenes y adultos no es un nivel educativo redituable en ventas de libros de texto. Se admite la necesidad, pero se desiste ante las proyecciones acotadas de que sus ediciones obtengan suficientes beneficios económicos.

A partir de este panorama fue que decimos publicar libros de texto para la Educación de Jóvenes y Adultos. En este caso para las áreas de Lengua y Literatura, Ciencias Exactas y Naturales (Matemática y Biología) y Ciencias Sociales, correspondientes al 1er año de cursada. Quienes los producimos y escribimos nos basamos en una larga tradición de trabajo en este campo, desde la producción de materiales propios, hasta la creación y el diseño pedagógico y curricular de escuelas populares[2]. En este caso, impulsamos un proyecto que

---

1 En la mayor parte de Latinoamérica la organización de libros de texto esta en manos del sector privado, incluso, con iniciativas muy costosas, como es el caso de Chile y/o con una participación destacada en el diseño de contenidos y curriculas como ocurre en Brasil. Asimismo, hay excepciones, como México y Cuba, en el que es el mismo Estado el que impulsa y coordina la preparación de textos para las escuelas, con universidades y profesorados públicos.

2 Muchos de los quienes integramos este equipo de trabajo fuimos parte fundadora de los primeros Bachilleratos populares de jóvenes y adultos, surgidos hacia los inicios del segundo milenio como resistencia a las

incorpora necesidades –contar con libros de trabajo para las aulas de la EDJA- y decisiones epistemológicas, pedagógicas y didácticas, que se enmarcan en la experiencia colectiva surgidas de la rica tradición de la educación popular latinoamericana.
En ese sentido, entendemos por educación popular al posicionamiento critico frente al orden social vigente y del papel funcional que ha cumplido, la concebimos como una opción transformadora y de construcción liberadora (Paulo Freire[3]), promoviendo el desarrollo de sujetos políticos, y concebida como una práctica promotora de procesos de transferencia de poder educativo-cultural hacia las personas tradicionalmente excluidos u oprimidos, que aspira ampliar los espacios de participación, desburocratizando la toma de decisiones y generando vínculos de diálogo en la enseñanza y aprendizaje[4].
Elaborar, diseñar y editar Libros de texto para escuelas de jóvenes y adultos tiene como meta contribuir al mejoramiento, la formación y la sistematización de los saberes de los docentes y estudiantes. Esta producción propone ser construida desde una perspectiva que favorezca el intercambio y el abordaje interdisciplinario de problemáticas educativas propias de este campo de estudio. A la vez, busca promover un espacio textual de articulación, reflexión y apropiación de herramientas pedagógicas y conceptuales que colabore con los equipos de trabajo de los bachilleratos de jóvenes y adultos, a

---

políticas neoliberales y como propuestas alternativas en clave de educación pública y popular. Ver. Ampudia, Marina, y Elisalde, Roberto, La estrategia de los Bachilleratos Populares en Movimientos sociales y sindicales (2001-2017).Editorial Biblos Buenos Aires.(publicación marzo 2019).

3 El educador popular brasileño, Paulo Freire (1921- 1997) representa, desde los años ´60, una perspectiva educadora que entiende la educación como campo de politicidad necesaria y de formación para la liberación de los opimidos. Su texto emblemático fue Pedagogía del Oprimido, publicado en 1970 y con numerosas reediciones hasta la actualidad.

4 El concepto de educación popular tiene una larga historia y con referentes teóricos múltiples, especialmente en América Latina. En esta investigación rescatamos la vasta producción de Paula Freire, así como también las reinterpretaciones y revisiones producidas por diferentes movimientos sociales desde el segundo milenio.

fin de sistematizar y revisar las estrategias de enseñanza aprendizaje con las que se desempeñan en estas escuelas.
Construir una propuesta pedagógica y de transposición didáctica de los contenidos fue el resultado de la elaboración conjunta entre docentes e integrantes de los equipos de trabajo del presente proyecto, que se posicionó en atender , especialmente, las particularidades de la cursada de los estudiantes de la EDJA, ritmos de presencia y participación, formaciones heterodoxas, autonomía en los contenidos de cada clase, saberes previos/experienciales, y en la trayectoria de sus profesores en este terreno formativo.
Contar con libros de texto abiertos a la reelaboración y aportes por parte de la comunidad educativa, como pretende ser esta iniciativa, se inscribe en la necesidad de fortalecer la formación y organización de saberes pedagógicos basados en los principios de una educación emancipadora y solidaria.[5]
Por ultimo, destacamos que los libros de texto presentados fueron posibles gracias a la aprobación del proyecto UBANEX (2017) de la Universidad de Buenos Aires, e inscripto en el Programa de investigación, docencia y articulación social: Movimientos sociales y educación Popular (PIMSEP-SEUBE-FFyL ,UBA) y de la Red de Investigadores y Organizaciones Sociales de Latinoamérica (RIOSAL-CLACSO).
También agradecemos a los profesores y estudiantes del Bachillerato de Jóvenes y adultos El Telar y del Bachillerato Popular Raíces, de la Provincia de Buenos Aires, Partido de Tigre. Los profesores y estudiantes de ambas escuelas fueron de manera directa e indirecta, los verdaderos artífices de la propuesta presentada.
La edición de los textos fue realizada en la empresa Chilavert, imprenta cooperativa recuperada por sus trabajadores y perteneciente al Movimiento Nacional de Empresas Recuperadas (MNER) y que cuenta en muchas de sus fábricas con Bachilleratos Populares de la EDJA.

Roberto Elisalde, Marina Ampudia, Joaquin Calvagno
Coordinadores del Proyecto PIMSEP-UBANEX/RIOSAL

---

5 Paulo Freire, Documentos de la Secretaria Municipal de San Pablo, 1989.

PRÓLOGO

Desarrollar una educación popular de jóvenes y adultos supone concebir una educación para la liberación, una educación que sirva a la formación integral del sujeto y que permita la apropiación de diferentes saberes. No se debe perder de vista que en nuestro caso, el educando es el sujeto joven y adulto, entendido como un sujeto atravesado por una experiencia negativa de su educación, producto tanto de los "fracasos escolares" como de sucesivas discontinuidades en su trayectoria escolar vinculadas a múltiples factores: problemas económicos, de salud, de trabajo, desmotivación, etc.

Consideramos que la educación debe ser entendida como un diálogo entre el educador y el educando. Es por eso que a la hora de diseñar una propuesta de trabajo para los estudiantes del Bachillerato Popular, es fundamental tomar como punto de partida los saberes previos de todos los estudiantes para trabajar con ellos colectivamente. Desde esta perspectiva, la matemática se presenta como una herramienta de análisis imprescindible en la educación de jóvenes y adultos, pues como ciencia emergente de un proceso social, como construcción humana surgida del interés y la necesidad, y como un conocimiento abierto a la revisión, la matemática no constituye un saber dado, sino una actividad y un proceso comunitario. Es importante entonces tener en cuenta los intereses y motivaciones de los estudiantes. Este debe ser el punto de partida para pensar actividades y situaciones matemáticas que permitan que estos elementos se articulen para ayudar a que los estudiantes adquieran gradualmente un conocimiento matemático formal.

Basado en estos presupuestos, el presente libro de texto brinda algunos de los posibles contenidos de matemática que pueden ser trabajados con los estudiantes que cursan su primer año en el Bachillerato Popular. Los temas que se desarrollan abarcan cuestiones vinculadas a los números naturales, cálculos de porcentajes, perímetro de figuras planas, nociones básicas de álgebra elemental y el trabajo con fracciones. Por cuestiones de tiempo y extensión no se ha incluido el trabajo con números negativos, contenido que creemos que debería trabajarse en forma gradual en primer año del Bachillerato.

Sobre la base de los fundamentos expuestos anteriormente, los contenidos se presentan a partir de situaciones concretas. Intentamos no abundar en tecnicismos, más allá de lo que resulte necesario para el desarrollo y comprensión del tema. Cada capítulo consta de una situación introductoria del tema a desarrollar. A partir de esta situación inicial, en la siguiente sección se despliega la teoría. Luego se propone una guía de actividades y ejercicios para la práctica de los estudiantes. Además, cada capítulo contiene una sección donde se desarrollan cuestiones vinculadas a la historia de la matemática, problemas o curiosidades que permiten reflexionar y profundizar sobre el contenido matemático planteado. Por último, se propone un trabajo integrador con diferentes actividades de cierre e investigación para el estudiante.

Los autores

Matemáticas

Sobre números, medidas y fórmulas

Capítulo I
El juego del Sudoku, una forma de pensar con lógica

“Todos nosotros sabemos algo. Todos nosotros ignoramos algo.
Por eso, aprendemos siempre.”
Paulo Freire

El Sudoku es un juego numérico que ha aparecido en periódicos de todo el mundo y se ha llegado a describir como el rompecabezas que más rápido ha crecido en el mundo. El nombre de este juego proviene de Japón: “su” significa número o dígito y “doku” único o solitario. Seguramente muchos de ustedes lo han jugado ya que actualmente aparece en páginas de Internet, revistas, diarios, computadoras, netbook, celulares,... Hasta hay clubes de Sudoku, libros de estrategia, videojuegos, chats, torneos e incluso se han realizado programas de televisión.

Las reglas son sencillas:

Hay que completar con números, los casilleros vacíos dentro de un cuadrado. Comencemos jugando un Sudoku de 4x4. Se denomina así porque el cuadrado está formado por 4 filas (horizontales) y 4 columnas (verticales) que conforman en total 16 casillas. Como pueden observar en el cuadrado de abajo, algunas casillas ya tienen un número que viene de entrada con el juego y otras están en blanco, estas casillas son las que tenemos que completar. En este caso, para este tipo de Sudoku, se utilizan solo los números 1, 2, 3 y 4.

¿Cómo se completa?

	3	1	
2			4
3	2	4	
		2	

La idea es llenar los casillas vacías sin que se repitan los números 1, 2, 3 y 4 en las filas (horizontales) y tampoco en las columnas (verticales). Pero eso no es todo, tampoco pueden repetirse estos números dentro de los 4 cuadrados más pequeños que quedan marcados dentro del cuadrado grande.

El juego finaliza cuando completamos todos los casilleros vacíos, cumpliendo con todas estas reglas.

¿Por donde empezamos a completar? ¿Se anima usted solo?

Una ayuda: Podemos comenzar por donde se nos ocurra y si nos equivocamos siempre podemos volver a empezar. Pero si miramos bien hay casillas vacias que nos permiten descartar varios números de los cuatro posibles, y entonces tenemos más chances de ubicar el número correcto.

Por ejemplo en esta casilla las opciones comienzan a descartarse

	3	1	
2			4
3	2	4	
		2	

El 1 y el 3 quedan descartados porque ya están ubicados en esa fila. El 2 también queda descartado porque ya está en la columna, y además se ubica dentro del cuadrado más pequeño.

Por lo tanto, en esta casilla solo podemos ubicar el número 4 que es el número que faltaba de las cuatro opciones iniciales.

4	3	1	
2			4
3	2	4	
		2	

Observemos que esta forma de pensar las opciones nos permite ahora completar de manera directa la primera fila, ya que en el último casillero vacío de esta fila la única opción posible es el número 2.

4	3	1	2
2			4
3	2	4	
		2	

Ahora solo nos queda completar los demás casilleros vacíos y eso corre por cuenta suya. ¡Manos a la obra!

Sugerencia: Utilice lápiz y goma, es habitual equivocarse al principio, será necesario borrar lo escrito y habrá que retroceder en el juego.

Importante:
¿Para que nos sirve el Sudoku?
Además de ser un buen pasatiempo, el Sudoku potencia nuestras habilidades mentales de razonamiento lógico y cálculo. Y nos permite reforzar tres herramientas fundamentales para el trabajo en matemáticas:

1) Concentración 2) Estrategia 3) Paciencia

Dicho todo esto pongámonos a trabajar. En la página siguiente hay varios Sudokus para completar. No se apresure, comience por los más sencillos, y vaya con paciencia. De a poco comenzará a encontrar algunas estrategias, cada jugador tiene las suyas.

1.2 SUDOKUS PARA JUGAR

1) Completar los siguientes Sudokus de 4x4

Fáciles

1

2	1		
	3	2	
			4
1			

2

1		3	4
	3		
2			
			1

7

		1	2
	1		3
4		2	

8

	2	3	
	3		
			1
2		4	

3

4	2		
1			
	1	2	
			3

4

			3
4			
	1	3	
3		2	

9

	3	2	
			4
1			
		1	2

10

4			
		1	
	2	4	
		2	1

5

	2		
		2	
3		4	
2			1

6

			1
4			2
2			4
		2	3

11

4			
			2
2		1	4
	4		

12

	2	1	
		3	2
	1		
2			1

Difíciles

1

3			1
1			
		2	

2

4			
		4	
			3
	2		

7

		1	
	4		
2			
			1

8

			3
	3		
4			
		1	

3

		1	
3			
	3		
			4

4

4			3
	2		
2		4	

9

	2		
		2	
			3
4			

10

2			
			3
	2		
		1	

5

		4	
1			
	2		
			3

6

2			
			3
	4	1	

11

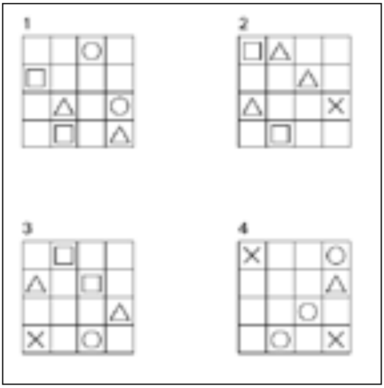
	4		
			2
		2	3

12

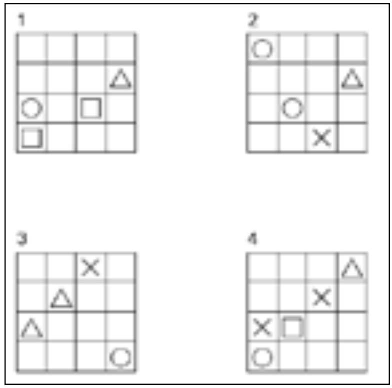
	4		
3			
		1	4
		2	

2) Para los que se aburrieron de los números también existen Sudokus con Símbolos.

Fácil



Difícil



3) ¡Ahora si! Los clásicos Sudokus de 9 x 9. Solo que en este caso los casilleros vacíos se completan con los números del 1 al 9. ¡Suerte!

Fáciles

1

7	2	3				1	5	9
6			3		2			8
8				1				2
	7		6	5	4		2	
		4	2		7	3		
	5		9	3	1		4	
5				7				3
4			1		3			6
9	3	2				7	1	4

2

		7	1	5		9		
		9	4	3				
5					2		1	3
		6	5		4		2	9
4	3			8			5	7
9	7		3		1	4		
7	6		2					5
				9	6	2		
		3		4	5	6		

Nivel Medio

1

	2		5	1	9			
	5		7				1	
	6		2			9		
6	8	5		2	3			
						8		2
	7		1	4				
7		1					5	9
					1			7
	3		4	9			2	1

2

2				3	6			
					8		1	7
		4			5			3
		7		2	9	1		
		1	3			9	6	4
	3	8			1			
	1		7	5				
		3		9			4	
	4	9					7	

Nivel Difícil

1

2						9	5	1
								7
8	7	6			5	2		
3		4		2	8			
						5		9
		5			1	3		4
	2			8	4		1	
				1			9	8

2

			8	1	5			
	5						7	6
	3		2					
							9	8
2				5				
4	7	3			2			
	8	1	3			4		2
		4				1		9
		5		2	4			

Muy difícil

1

4	5							
		2		7		6	3	
							2	8
			9	5				
	8	6				2		
	2		6			7	5	
						4	7	6
	7			4	5			
		8			9			

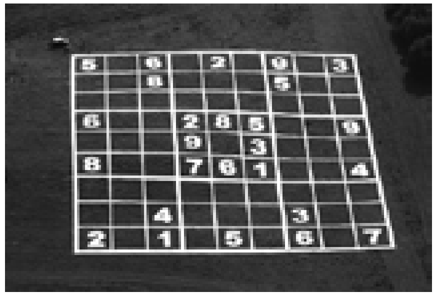
2

	4	2	7					3
				9				
				6		8		7
	6					2	5	
5							7	
				7			1	
		5	3		6	4	2	
8		4	2					
6			1					

1.3 Historias, anécdotas y curiosidades

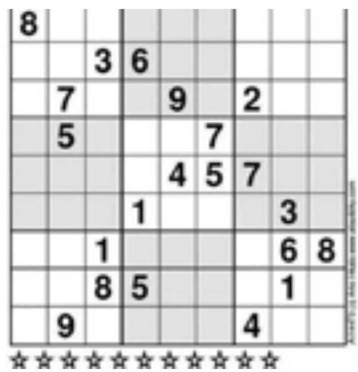
Dos Sudokus muy particulares

El mas grande



Según la pagina especializada en sudokus www.kakuro.com.ar[1] la imagen de la derecha corresponde al sudoku más grande del mundo. Fue construido sobre una enorme ladera cerca de Astillar Sodbury, en Inglaterra, y mide 83 metros por 83. Se ha registrado en el Guinness de los récords como el rompecabezas más grande del mundo. ¿Será muy difícil resolverlo?

El más difícil del Mundo[2]



En el año 2012 el matemático Arto Inkala diseñó el siguiente Sudoku, que fue considerado por él y por otros tantos matemáticos que han tratado de resolverlo como el más difícil del mundo

¿Se atreven a resolverlo?

Ojo que sea el más difícil no quiere decir que sea imposible de resolver ¡Adelante!

---

1 http://www.kakuro.com.ar/curiosidades-sudoku.htm

2 https://omicrono.elespanol.com/2016/09/sudoku-mas-dificil-del-mundo/

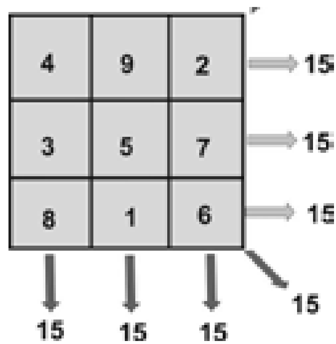
Pasado y presente de los sudokus

Buscando un Origen

La mayoría de las fuentes indican que el juego de Sudoku aparece por primera vez publicado en una revista especializada en problemas y rompecabezas matemáticos en Nueva York (Estados Unidos) en la década de los ‘70. Y si bien no sabemos con seguridad quién fue el primer diseñador de este juego, lo más seguro es que el Sudoku se pensó a partir de los trabajos de Leonhard Euler (1707-1783), famoso físico y matemático suizo. Se cree que Euler fue el que dio origen al juego creando una serie de pautas para el cálculo de probabilidades para representar una serie de números sin repetir. Esto descarta la teoría de que el Sudoku se inventó originalmente en Japón. Lo único del Sudoku actual que tiene origen japonés es el nombre. Por otro lado, si bien Euler no jugaba al Sudoku, es probable que se haya entretenido en sus ratos libres con un pasatiempo similar al Sudoku muy antiguo conocido como “cuadrado mágico”.

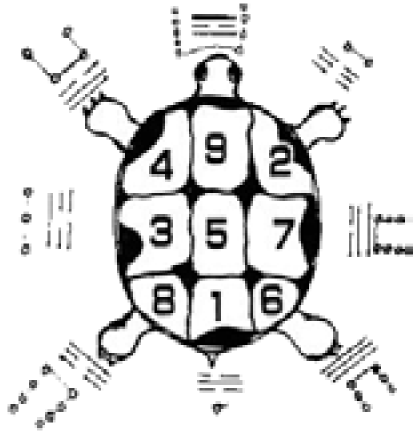
¿Qué es un cuadrado mágico?

Un cuadrado **mágico** es un conjunto de números dispuestos en un cuadrado de forma tal que la suma de cada fila, columna y diagonal da como resultado un mismo número.
Por ejemplo, el cuadrado de la derecha[3] es mágico, y su constante mágica es **15** ya que la suma en vertical, horizontal y diagonal siempre da como resultado el número 15.



3 https://aprendiendomate.wordpress.com/2010/05/21/sobre-los-cuadrados-magicos/cuadradomagico2

El origen de los cuadrados mágicos es algo incierto debido a que aparecen en varias épocas y culturas muy antiguas. Hay registros de su uso en los sacerdotes egipcios, en los indios, árabes, griegos y chinos. Y algunas de estas culturas hasta le han atribuido propiedades astrológicas y adivinatorias.



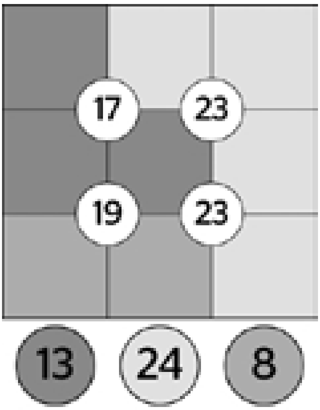
Por ejemplo, en China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el III milenio a. C . Una antigua leyenda China, nos cuenta que un día el río Lo estaba a punto de desbordarse. Los habitantes de la zona hicieron varias ofrendas al dios del río. Cada vez que lo hacían, una tortuga aparecía en la orilla y despreciaba la ofrenda como si ésta fuera insuficiente.
Un día se dieron cuenta de que en el caparazón de la tortuga aparecían los números naturales del 1 al 9. Tras varios intentos dieron con la clave. Sumaron los números en horizontal, en vertical y en diagonal. El resultado fue 15 y esa fue la ofrenda que hicieron al dios del río. Con ello se acabaron los problemas de inundaciones. Al parecer es por esta leyenda que en China a los cuadrados mágicos se les llama Lo Shu (Shu= rio).

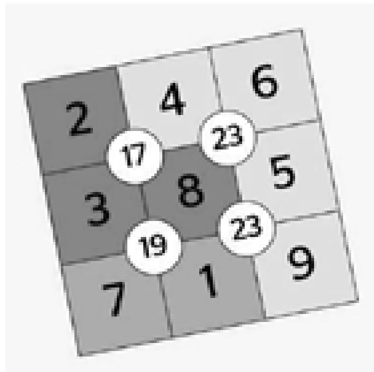
El Suko: La evolución de los Sudokus

Actualmente existen muchas variaciones del Juego del Sudoku. Entre los últimos podemos mencionar a los Suko Según el portal Juegos y matemáticas[4], “estos puzzles numéricos, herederos de los Sudokus, se están actualmente publicando en grandes diarios de todo el mundo”.

4 https://anagarciaazcarate.wordpress.com/los-puzzles-numericos-tipo-sujiko-y-suko

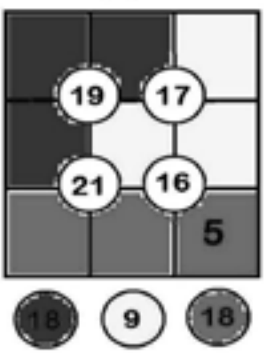
En este caso se trata de colocar un número del 1 al 9 en los recuadros de un cuadrado de 3 x 3, de modo que el número en cada círculo sea equivalente a la suma de los cuatro recuadros adyacentes. Pero, además, la suma de los cuadrados de colores iguales debe encajar también con el resultado facilitado en tres círculos complementarios.



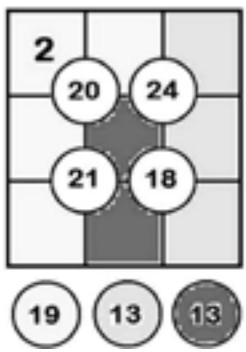


A continuación, dejamos dos juegos Zuko [5] para completar. Lo bueno es que ya vienen con un dato, con lo cual hay menos números para completar. ¿Se animan?

Ejemplo 1



Ejemplo 2



[5] file:///C:/Documents%20and%20Settings/User/Escritorio/Telar%20Matrial%20de%20adultos/sukonivelialum%20dos%20ejemplos.pdf

1.4 Trabajo integrador

1) Cuadrados Mágicos:

Complete con números las casillas vacías para que cada cuadrado resulte mágico.

A)

7		
2	4	6

B)

6		
	5	9
		4

C)

2	12	
	8	
	4	

G)

6	5	11	8
13			3
	9	7	
		0	15

H)

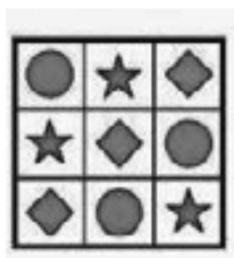
11			6
14	9	8	
		17	
	10	7	13

I)

8		11	1
	12	13	
9	5	4	
		6	

2) Para investigar en grupo:

Los cuadrados latinos han sido estudiados durante siglos. Sin embargo, fue en 1779 cuando Leonhard Euler los definió formalmente. Redacten una breve investigación sobre “Los cuadrados Latinos”
¿Qué son?
¿Qué relación tienen con los Sudokus?
¿Cuáles son sus aplicaciones en otras áreas de la matemática?



3) Para seguir pensando...

Intente responder las siguientes preguntas, y por qué no, anotar otras que hayan surgido al trabajar con este capítulo. Y luego comparta sus respuestas y preguntas con sus compañeros.
La solución a la que uno llega cuando completa un Sudoku, ¿siempre es única?
¿Qué es lo que lo que hace fácil o difícil un juego de Sudoku?
¿Hay un número mínimo de datos que tienen que darnos?
¿Y un número máximo?
¿Hay algún método para resolver Sudokus? ¿Cuál es el suyo?

Capítulo 2
Números para contar y ordenar

"Lo que oyes lo olvidas, lo que ves lo recuerdas, lo que haces lo aprendes "

Proverbio Chino

Combinaciones a la carta

En el comedor de una empresa se lee la siguiente lista con las opciones para combinar el menú del día:

Menú	Opciones del día
Entrada:	***Arrollado de Pollo*** ***Berenjenas en escabeche*** ***Ensalada del Cheff*** -------------------------
Plato principal:	***Carne al horno con papas*** ***Filet de merluza con puré*** ---------------------------
Bebidas:	***Agua mineral*** ***Jugo*** ---------------------------
Postre:	***Ensalada de frutas*** ***Flan casero*** ---------------------------

Supongamos que sus compañeros de trabajo le piden que haga una lista con todas las posibles opciones (Completas) del menú del día

¿Cómo hacemos una lista de todas las posibles combinaciones?

Inténtelo usted solo a ver que sale. Y luego compare su respuesta con lo que se explica más abajo.

2.1 El diagrama de Árbol

Un recurso gráfico para ordenar y contar combinaciones.

En la situación anterior nos piden que confeccionemos una lista con todas las posibles combinaciones de almuerzos. Una forma directa es escribirlas una por una, teniendo en cuenta que un menú está compuesto por 4 partes:

Entrada, Plato principal, Bebidas y Postre

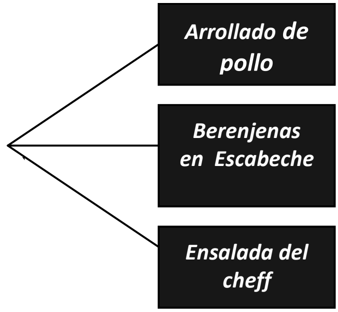
Entonces algunas de las posibles combinaciones son:

1- Arrollado de pollo - Carne al horno con papas - Agua Mineral - Ensalada de frutas
Otra podría ser:
2- Berenjenas en escabeche - Carne al horno con papas - Agua Mineral - Ensalada de frutas
Otra:
3- Ensalada del cheff - **Carne al horno con papas - Agua Mineral - Ensalada de frutas**
Otra:
4- Arrollado de pollo - *Filet de merluza con puré de calabaza* - Agua Mineral - Ensalada de frutas
5-....

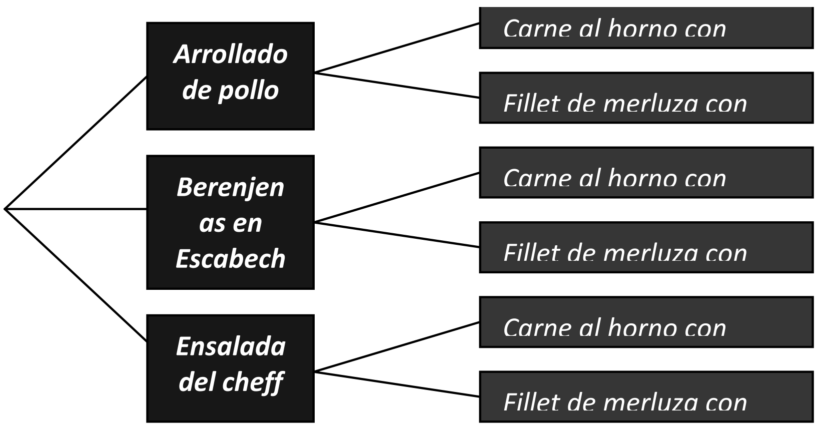
Y así podríamos seguir combinando las diferentes opciones de almuerzos, aunque tal vez esta forma de contar todas las combinaciones posibles resulta algo larga y si no somos cuidadosos es probable que nos perdamos en el proceso y repitamos o nos olvidemos de alguna opción.

Una forma de registrar visualmente todas las posibles combinaciones es construir un “Diagrama de Árbol”. Para ello tenemos que considerar cada una de las posibilidades como las “ramas” de un árbol que luego se abrirá en más “ramas” según las posibles combinaciones.

Por ejemplo, para la opción **Entrada** tenemos 3 ramas diferentes:



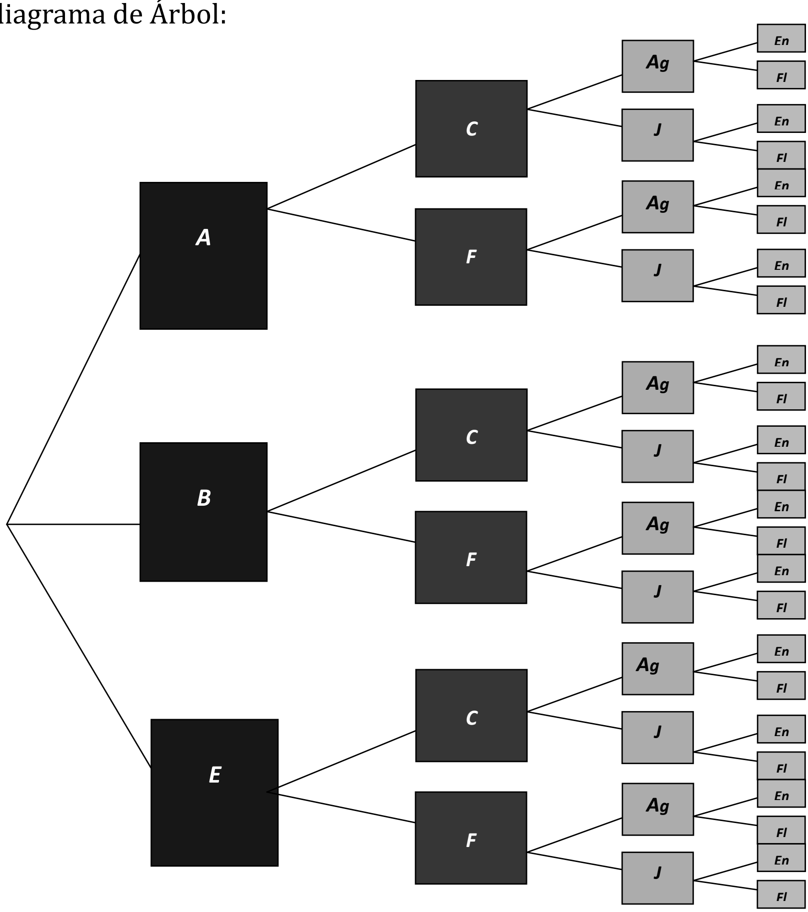
Cada una de estas “ramas” puede combinarse con dos tipos de plato principal, entonces para cada una abrimos dos ramas más:



Luego continuamos abriendo “ramas” para las opciones de bebidas y postres. Pero para no perder tanto tiempo en escribir todas las palabras, podemos representar cada opción con una letra, en este caso elegiremos la primera, y si se repite podemos agregar la segunda letra. Entonces las opciones a combinar nos quedarían con las siguientes letras:

Arrollado de Pollo	***A***
Berenjenas en escabeche	***B***
Ensalada del Cheff	***E***
Carne al horno con papas	***C***
Fillet de merluza con puré	***F***
Agua mineral	***Ag***
Jugo	***J***
Ensalada de frutas	***En***
Flan casero	***Fl***

Reemplazando estas letras por cada opción nos queda el siguiente diagrama de Árbol:



Observemos que al finalizar el diagrama tenemos 24 “ramas” finales, estas son todas las posibles combinaciones de menús que se pueden armar.

El diagrama de árbol es una herramienta gráfica que se puede utilizar en diferentes problemas de conteo. Nos permite visualizar de una manera ordenada todas las posibles combinaciones. Es como una especie de “mapa” donde se pueden observar todas las combinaciones.
Pero tiene la desventaja de que si el número de elementos a contar es demasiado grande, dibujar todas las ramas puede hacerse engorroso y resulta poco eficiente. En ese caso hay que recurrir a otras técnicas de conteo que no abordaremos en este capitulo.

Algunas cuestiones para seguir pensando

I) ¿Cómo quedaría el árbol si cambiamos el orden en que ubicamos los menús? ¿Cambia el resultado final de combinaciones?
Ejemplo: Comenzar con los Almuerzos en vez de las Entradas.

II) Si agregamos al menú una opción más de bebida y otra para el postre, ¿cómo varía el resultado? Explique la respuesta mostrando todos los cálculos propuestos para llegar al resultado.

III) Si en el comedor se puede elegir entre tres primeros platos, tres segundos y cuatro postres, ¿cuántos menús diferentes se pueden pedir?

2.2 UN POCO DE TEORÍA

Los números para contar y ordenar

En la actividad anterior trabajamos con números enteros positivos como: 1 ; 2 ; 3 ... A este tipo de números en matemática los denominamos números naturales o enteros (positivos). Los puntos suspensivos indican que esta sucesión de números sigue y nunca termina, es decir, que son infinitos. El conjunto de todos estos números se denota con la letra N.

Es posible representar el conjunto de números naturales mediante una recta que denominaremos “recta numérica”. Para ello trazamos una línea, y sobre la misma marcamos un punto. Este será nuestro primer número, en nuestro caso el 1. A la derecha de éste estará el 2, y así sucesivamente con los demás números. Obviamente, no podemos representar en nuestra recta a todos los números naturales, ya que son infinitos, es por ello que dibujamos una flecha indicando que los números continúan.

Esta recta numérica nos permite hacer algunas observaciones:

1) El conjunto de los números naturales, tiene un principio, el número 1. Pero no tiene un final.
El 1 es el primer elemento de este conjunto de infinitos elementos. ¡Guau! ¡Todo un privilegiado!
2) Entre dos números naturales consecutivos no hay otro número natural.
Por ejemplo, los puntos de la recta que están entre el entre el 4 y el 5 no representan a ningún número natural.
3) El conjunto de números naturales es un conjunto ordenado.
¿Qué queremos decir con esto? En su función de representar cantidades, existen números naturales que representan más que otros. Por ejemplo 5 es mayor a 4, y 4 es mayor que 3. Decimos entonces que hay números naturales mayores o menores que otros, esta relación es llamada orden.

¿Mayor o menor > < ?

Para representar que un número es mayor que otro usaremos el símbolo de desigualdad " > "
Tomemos como ejemplo el 3 y el 5. Sabemos desde nuestra infancia que el 5representa una mayor cantidad de elementos que el 3. Debemos escribir por lo tanto 5 > 3. Esta expresión debe ser leída como "cinco es mayor que tres".

Números naturales ¿para qué?

Hasta acá usted se estará preguntando ¿para qué podemos utilizar estos números en la vida cotidiana? Bueno, aunque usted tal vez no lo vea, los utilizamos bastante. Veamos algunas aplicaciones concretas:

- Cuando nos ordenamos en una fila estamos utilizando números naturales. Siempre miramos quién está 1ª en la fila, y contamos cuántas personas hay delante de nosotros.
- Extraemos un número natural para esperar que nos atiendan en la farmacia.
- Nuestra edad la expresamos con números naturales, 41 Años, 3 meses, 5 días.
- Las hojas de los libros están numeradas con números naturales.
- Utilizamos números naturales para contar la cantidad de goles en un partido o de hinchas de un equipo de fútbol.
- A la hora de hacer compras operamos con "billetes" que representan números naturales: $2, $5, $ 10, $20, $50, $100, $200, $500, $1.000.

Los números naturales también se utilizan cuando queremos saber cómo se combina una cierta cantidad de elementos. Por ejemplo:

1) Lanzamos una moneda tres veces. ¿Cuántas combinaciones de caras y secas podemos obtener?

2) ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar 3 personas en una fila?
3) ¿De cuántas formas distintas se pueden combinar 4 colores en una remera?

Y así podríamos completar este libro con muchos ejemplos del uso de los números naturales, aunque nos quedaríamos cortos porque para ponerlos a todos se debería fabricar un libro con infinitas paginas... ¿Usted se anima a escribir tres ejemplos de usos concretos de números naturales?

Algunas reflexiones sobre los naturales

Supongamos que en nuestra vida cotidiana solo existieran números naturales ¿Qué sucedería por ejemplo a la hora de repartir una cierta cantidad de dinero? Por ejemplo, repartir una herencia de $1.000.000 entre 3 o 4 hermanos. ¿Cuánto le tocaría a cada uno en cada caso?
¿Y si quisiéramos representar una deuda de $1.000.000? O, ¿cómo representamos con números naturales que no tenemos ninguna deuda?

Bien. Aunque los números naturales nos permiten representar infinitas cantidades, también tienen sus limitaciones. Por ejemplo, en el caso de que nos toque repartir en partes iguales una herencia de $1.000.000 entre 4 hermanos entonces cuando repartimos 1.000.000 entre 4 el resultado es $250.000 Y esto, como dijimos, es un número natural. O sea, no habría inconvenientes. Y todos los hermanos quedarían contentos con lo que heredaron.

Ahora bien, si tenemos que repartir $1.000.000 entre 3 el resultado es 333.333,333333... (Utilice la calculadora para hacer la división si hace falta). En este caso obtenemos un resultado que no es un número natural (o entero) sino un número con una parte entera y un desarrollo decimal periódico ya que el numero 3 después de la coma se repite infinitamente. Y tendríamos inconvenientes para repartir la herencia porque no existe un número natural para representar esa cantidad.

Para resolver esta situación es necesario trabajar con otro tipo de números como los números fraccionarios o fracciones cuyas divisiones pueden ser números con un desarrollo decimal, finito o periódico. (Abordamos este tema en el Capitulo 8 de este libro)
¿Qué sucede con la deuda de $1.000.000? Bueno, si solo trabajáramos con números naturales, también tendríamos inconvenientes a la hora de representar deudas. Ya que debemos utilizar una cantidad negativa, y eso no es posible con los números naturales. Para ello debemos recurrir al trabajo con números negativos. (Este tema no se aborda en este libro, pero existe una basta bibliografia sobre los numeros negativos. El lector puede consultar algunas de las paginas o documentos sugeridos en la bibliografia al final de este libro).

Por último, ¿es posible usar un número natural para representar la situación de que no tenemos deuda?
Bueno, en principio no hay mucho misterio ya que el número que utilizamos para representar una cantidad vacía o nula es el cero (0). Tal vez lo que podemos discutir es si este número es o no un número natural. Y la verdad es que todo depende de para qué lo utilicemos y de cómo definamos este conjunto de números. Como no es nuestra intención profundizar sobre axiomas y teoría de conjuntos, podemos decir que para algunas situaciones el 0 puede tomarse también como un número natural. En ese caso, el conjunto de números naturales se denota con la letra N y un cero debajo: $N_{0.}$

Aunque hoy en día nos parezca razonable utilizar el cero en muchos de nuestros cálculos, este número recién comenzó a utilizarse en todo el mundo hace solo algunos siglos atrás, ya que no lo consideraban un número. Por ejemplo, el sistema de numeración romano que fue desarrollado en la antigua Roma (700 a.C) y que aún sigue siendo utilizado en algunas situaciones no tiene ningún símbolo para representar este número (Ver Capítulo 5, Sistemas de Numeración).
Tal vez tenga razón el matemático John Kelley (1916 -1999) cuando reflexiona sobre este número

> "… En verdad, los números naturales: 1, 2, 3,…. fueron los que se usaron primero. El número cero se empleó por primera vez hace apenas unos pocos siglos y todavía soporta el estigma de ser considerado antinatural..."

2.3 Guia de Actividades

1) Resolver las siguientes situaciones explicando la respuesta. Utilice todos sus conocimientos para resolverlas. Si necesita la calculadora también la puede utilizar. Pero recuerde: la calculadora no razona, solo recibe órdenes. Y siempre que no entienda algo, ¡pregunte!

A) Para un recital se vendieron entradas numeradas en un sector de la platea. Se trata de 6 filas con 9 butacas cada una.
- ¿Cuántas entradas numeradas se pueden vender?
- ¿Cómo se puede identificar la posición de una de esas butacas?

B) Se quiere transportar a los 325 operarios de una empresa en ómnibus, que pueden llevar a 45 personas sentadas. Por razones de seguridad, no pueden viajar personas paradas.
- ¿Cuántos ómnibus se necesitan?

C) Silvana va a salir de viaje. En su valija pone un par de zapatillas y un par de sandalias, su bermuda roja, su camisa blanca, una pollera, una remera y un pantalón.
- ¿De cuántas maneras distintas puede salir vestida con estas prendas?

2) Escribir con cifras el anterior y el posterior de los siguientes números naturales:

A) 100 B) 1.000 C) 1.000.000 D) 4.600.000 E) 461.000 E) 750.320 F) 750.000 g) 7.501.000

3) Completen los espacios en blanco y escriban el número natural propuesto:

A) El menor número de 4 cifras es: _ _ _ _
B) El mayor número de 4 cifras es: _ _ _ _
C) El menor número de 4 cifras iguales: _ _ _ _
D) El mayor número de 4 cifras distintas es: _ _ _ _
E) El menor número de 4 cifras distintas es: _ _ _

4) Completa la siguiente Tabla:

1. Completa la tabla.

SE ESCRIBE	SE LEE
489	
	Doscientos diecisiete
301	
1 012	
	Siete mil quince
700 699	
3 225 140	
	Ocho millones dos mil
	Setecientos veintitrés millones doscientos catorce mil ciento cuarenta
23 321 089 510	

5) Con las siguientes tarjetas se ha escrito (usando todas sus letras) el numero 1.310

2. Con las siguientes placas se ha escrito "con todas sus letras" el número 1 310:

mil	tres	ciento(s)	diez

a) Encuentra todos los números que pueden escribirse combinando de diferentes formas las cuatro placas anteriores. Ordénalos de menor a mayor.

a) Encuentra todos los números naturales que pueden escribirse combinando de diferentes formas las cuatro tarjetas anteriores. Ordenarlos de Menor a Mayor.

6) Un hombre tiene tiempo de jugar ruleta cinco veces como máximo. Él empieza a jugar con un dólar, apuesta cada vez un dólar y puede ganar o perder en cada juego un dólar. Él se va a retirar de jugar si pierde todo su dinero, si gana tres dólares (esto es si completa un total de cuatro dólares) o si completa los cinco juegos.

- Mediante un diagrama de árbol, diga cuántas maneras hay de que se efectué el juego de este hombre.

7) En una agencia de automóviles se ha lanzado una promoción para la adquisición de autos usados. Los consumidores pueden adquirirlos con llantas normales o deportivas, incluirle algún accesorio (estéreo, levanta vidrios eléctricos o aire acondicionado). Además, pueden elegir alguno de los colores de la promoción (amarillo, rojo, azul).

- Mediante un diagrama de árbol, diga de cuántas maneras pueden ser los autos vendidos.

8) Racing e Independiente juegan una gran final de fútbol, en la cual deben jugar como máximo tres partidos, ya que el equipo que gane dos juegos seguidos o complete un total de tres juegos ganados será el que gane el torneo.

- Mediante un diagrama de árbol, diga de cuantas maneras puede ser ganado este torneo.

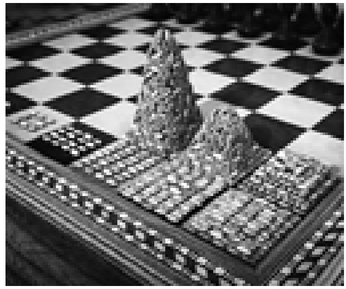
9) Un inspector de construcciones tiene que revisar el cableado de un nuevo departamento, ya sea el lunes, el martes, miércoles o jueves, a las 8 A. M., a las 10 A. M. o a las 2 P. M.

- Obtenga las maneras en que el inspector puede realizar las revisiones del cableado, haciendo uso de un diagrama de árbol.

2.4 Historias, anécdotas y curiosidades

Contando granos de arroz sobre un tablero de ajedrez

Imaginemos que colocamos sobre un tablero de ajedrez, 1 grano de arroz en el primer casillero, 2 en el segundo casillero, 4 en el tercero, 8 en el cuarto y así sucesivamente, duplicando la cantidad de granos en cada casilla siguiente.



¿Cuántos granos de arroz calcula usted que habrá una vez que se completen las 64 casillas que tiene el tablero?
Se advierte que habrá muchos granos. Sí. Pero, ¿cuántos? No le propongo que haga un cálculo exacto, sino que trate de estimar ese número. Intente no avanzar en la lectura si no ha hecho ningún esfuerzo por imaginar cuántos granos habrá. Vale la pena tratar de hacer la estimación como para poder capturar, aunque sea mentalmente, cuán grande es este número.

La leyenda

Parece ser que este problema tiene sus orígenes en la India y es parte de un famoso cuento sobre la invención del ajedrez. Cuenta la leyenda que había un gran rey que se encontraba muy deprimido ya que había perdido a su querido hijo en una batalla. Tal era su depresión que hacía días que el rey no salía de sus aposentos y casi no comía.
Un día llegó un simple campesino al reino y le regaló a este rey un juego de estrategia totalmente nuevo, se trataba del Juego de Ajedrez. El rey poco a poco comenzó a jugarlo y a salir de su gran depresión. Estaba maravillado con este fascinante juego y pidió conocer a su inventor ya que deseaba darle una buena recompensa. Entonces mandó a buscar al campesino y cuando éste se presentó, el rey le dijo:

> *-Estimado gran hombre, quiero compensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado. Soy bastante rico como para poder cumplir lo que tu pidas. Tierras, ganado, oro, lo que tu pidas te será concedido.*
> *El campesino quedó en silencio y luego de pensar varios minutos, le contestó:*
> *- Estimado gran rey, gracias por tu generosidad. Solo voy a pedir como recompensa granos de arroz- El Rey quedó sor-*

prendido por el modesto pedido del campesino. Y dijo:
- Está bien. Dime cuántos kilos de granos necesitas y haré que los carguen y te los envíen hoy mismo.
- Bien -dijo el campesino-. Solo quiero que me entreguen **un** *grano de arroz por la primera casilla del tablero de ajedrez, 2 granos por la segunda casilla, 4 por el tercero, 8 por el cuarto. Y así sucesivamente, duplicando la cantidad de granos en cada casilla siguiente. Hasta completar todos los casilleros del tablero.*

Aunque el rey se molestó un poco por tan simple pedido, le contestó:

- Bien. Recibirás el arroz correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo. Al finalizar el día enviaré por esa cantidad- y mandó a sus contadores a que calculen y cuenten la cantidad de granos pedidos por el campesino. Pero parece que no era tan fácil hacer las cuentas, ya que se les había terminado el día y aun seguían haciendo cálculos. El rey, sorprendido, preguntó qué sucedía.
-Soberano- le contestaron-, tus contadores trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.
- ¡Espero que así sea! -gritó enfurecido el rey. -Que mañana, antes de que me despierte, hayan entregado a ese hombre hasta el último grano de arroz.
Por la mañana los contadores llamaron al rey para pedir una audiencia y explicarle cuál era el número final de los granos de arroz.
-Soberano, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. En todos los graneros no existe la cantidad de arroz que exige el campesino. Hasta los graneros del todo el mundo son insuficientes para tamaña recompensa.
El rey, asombrado, pidió a los gritos que le indicaran de una vez por todas, la cantidad de la que hablaban.
-¡Oh, soberano!... Diez y ocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince...

Algunas comparaciones

La recompensa que el rey debía pagar realmente es gigantesca. Si escribimos el resultado al que llegaron los calculistas, el número es: 18.446.744.073.709.551.615.

Al resultado anterior se llega mediante una serie de duplicaciones y sumas. Por ejemplo, para la primera fila hay que sumar las siguientes cifras: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 y así continua el proceso hasta la casilla 64. Si uno tiene paciencia y es ordenado con los cálculos, tarde o temprano va a llegar a este número. Solo hay que multiplicar por 2 y luego sumar los resultados de cada casillero.

Lo que queremos resaltar en este problema no es solo el descomunal tamaño de esta cantidad. También es interesante la forma en que va creciendo el número de granos de arroz. Es decir, este tipo de procesos, en donde en cada paso que da uno duplica la cantidad que había, es un ejemplo de lo que usted debe haber escuchado muchas veces y se conoce con el nombre de crecimiento exponencial.

Por ejemplo, cuando el proceso llega a la mitad, es decir cuando se tengan cubiertas 32 de las 64 casillas (las primeras cuatro filas del tablero), en ese momento ya hay casi 4.300 (cuatro mil trescientos) millones de granos. Según el periodista y matemático argentino Adrián Paenza[6] "Si uno los pusiera sobre una balanza, significarían algo así como 100 mil kilos o el peso de unas 170 vacas"

Y solo estamos en la mitad del proceso. Cuando llegamos al final nos encontramos con el monstruoso número de ¡20 dígitos! Una cantidad que no estamos muy acostumbrados a manejar. Paenza dice que la cantidad final de arroz que habría en el tablero sería equivalente a ¡mil veces la producción mundial de arroz del año 2012!

6 Arroz, bacterias y la población de la Tierra- https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-250643-2014-07-13.html

¿COMO TERMINA ESTA HISTORIA?

Sobre el final de la historia hay varias versiones. Ya qué el gran rey, naturalmente, no pudo entregar semejante recompensa, tal vez el final que mejor nos queda a mano para seguir pensando es el siguiente:
Después de unos días de pensar alguna propuesta que no dejase mal parado al rey, este mandó a llamar al campesino y le dijo que le daría todos los granos de arroz que él había pedido con la condición de que el campesino sea el encargado de contar grano por grano la cantidad total de arroz.....Y ahora le toca a usted cerrar el final de la historia. ¿Podrá contar todos los granos este humilde campesino? ¿Cuántas horas, días, semanas o años tardará?
Una ayuda: supongamos que este hombre cuenta un grano de arroz por segundo.
¡Adelante, el final es todo suyo!

2.5 TRABAJO INTEGRADOR

1) Explique con sus palabras a qué se denomina numero natural. ¿Para que se utiliza? Escriba tres ejemplos concretos de este tipo de números en la vida cotidiana.

2) ¿Qué es un Diagrama de Árbol ? ¿En qué tipo de situaciones se puede usar? Inventar y redactar una situación en la cuál se utilice esta herramienta.

3) Resolver las siguientes situaciones. Explicando la respuesta.

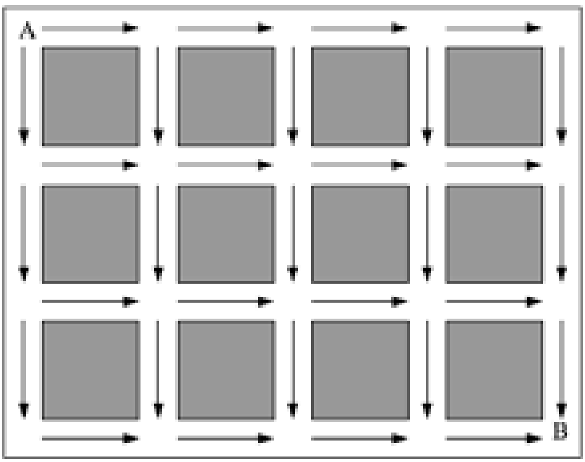
a) Distribuye, de todas las maneras posibles, 15 monedas de un peso en cuatro montones.
b) Ana, Marisa, Luis y Pedro quedan en una cafetería. Llegan de uno en uno. Escribe las posibilidades de orden de llegada de esas cuatro personas.
c) Escribe todos los números naturales de tres cifras que se

pueden formar con los dígitos 3, 4, 7, y 9. ¿Cuántos son mayores de 700?

d) Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo con: su sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB u O) y en cuanto a la presión sanguínea (Normal, Alta o Baja). Mediante un diagrama de árbol, diga en cuántas clasificaciones pueden estar los pacientes de este médico.

3) El dilema del taxista

Un taxista tiene que ir de un punto A de una ciudad a un punto B (ver figura).



Para ir de A a B, el taxista tomará las calles horizontales siempre en el sentido izquierda-derecha y las calles verticales siempre en el sentido arriba-abajo, esto es, nunca retrocederá. ¿De cuantas formas puede el taxista realizar el trayecto?. Explicar la respuesta.

Capítulo 3
Porcentajes y otras yerbas

"Un genio se hace con 1% de talento y 99% de trabajo"
(Albert Einstein)

Siguen los "Tarifazos"...

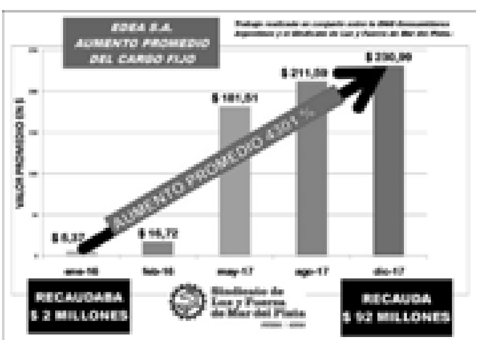
El portal de noticias de la ciudad de Mar del Plata "Qué: periodismo en la calle" publicó el 8 de enero del 2018 siguiente título:

Luz: autorizan un nuevo aumento del 32% en la provincia.

La resolución fue publicada en el boletín oficial y consta de dos subas: una del 20% para lo que se consuma hasta el 31 de enero y otra de alrededor del 10% a partir de febrero.

(http://quedigital.com.ar/sociedad/luz-autorizan-un-nuevo-aumento-del-32-en-la-provincia/)

Sabemos que no son buenas noticias para los usuarios y seguramente nos preguntamos cuánto representará este aumento para cada uno. Pero además esto no es la primera vez que ocurre. Los aumentos de luz se vienen registrando en varias ocasiones en los últimos años. Como se muestra en el siguiente gráfico, que a sido elaborado por el sindicato de Luz y Fuerza de Mar del Plata.



Teniendo en cuenta los datos anteriores intente responder las siguientes preguntas con lo que usted sabe. Las respuestas están desarrolladas en la sección siguiente.

1. ¿Cuánto va a pagar un usuario promedio en enero de 2018? ¿Y en febrero?
2. Si un usuario pagó en diciembre de 2017 $350, ¿cómo usar la información
disponible para calcular el valor de las facturas de enero y febrero?
3. ¿Es posible calcular el valor de las próximas facturas de cualquier usuario? ¿Qué información se necesita?
4. Si en Enero de 2016 un usuario promedio pagó $17. ¿Cuánto habrá pagado en diciembre de 2017? ¿Cuánto pagará en promedio en Febrero del 2018?

3.1 UN POCO DE TEORÍA

Porcentaje o "Cada cien" (%)

En muchas situaciones cotidianas escuchamos hablar de porcentaje o tanto por ciento: para indicar un aumento de salarios, el interés que tendremos que pagar en una compra en cuotas, el descuento que se aplica en una oferta, la porción de ciudadanos que votaron en una elección…
La expresión "más 5% de interés" significa que cada 100 pesos que usted gaste en el negocio A deberá pagar $5 de interés.
Si leemos "el 20% de la población votó al Partido Verde", entendemos que cada 100 personas, 20 eligieron al candidato de ese partido.
Si el supermercado B ofrece un 15% de descuento por pago en efectivo, deducimos que por cada compra de 100 pesos vamos a pagar $85. (¿Se entiende por qué?)
El porcentaje siempre considera que el total es 100 pero nos permite calcular variaciones para otros totales.
Volviendo a los ejemplos anteriores:
Si hago una compra de 200 pesos en el negocio A, tengo que pagar 10 pesos de interés.
En un pueblo de 5000 habitantes, el Partido Verde consiguió 1000 votos.
Si compro en el supermercado B un artículo que cuesta $ 800, el ahorro será de $120.

Cálculo de porcentajes

El porcentaje nos indica la variación cada 100 unidades.
(Note que el número cien no aparece escrito, pero está indicado por el símbolo **%** que podemos leer como **“cada cien”.)**

Volvamos a la noticia del aumento del 32% en la boleta de luz.
Si un usuario de Mar del Plata pagó en diciembre $ 600, ¿cuál será el valor de la factura de enero de 2018?
El aumento anunciado para enero (20%) anticipa que cada 100 pesos, pagará $20 más, por lo que, si consume lo mismo, en enero pagará $120 más (seis veces veinte pesos).
Si su vecino pagó $450, la próxima factura será $90 más cara (4,5 veces 20).
¿Cuánto pagará un usuario promedio según la información disponible?

Para pensar y ejercitar

1. Calcule la factura de enero y febrero para consumidores que en diciembre pagaron $500, $ 800 y $ 1000.
2. Calcule cuánto debe pagar en febrero un usuario promedio de Mar del Plata.
3. Si en diciembre pagó $ 320 ¿cuánto pagará en enero si su consume la mitad de energía?

Tomemos por el atajo usando la calculadora

El cálculo del “tanto por ciento” es muy habitual por lo que las calculadoras tienen una tecla, identificada con su símbolo (%) que en algunos casos agiliza algunos pasos.
Realice los cálculos anteriores usando la función % de su calculadora y escriba la secuencia de teclas que usó.

Para pensar y ejercitar:

1. Calcule el 50% de 800, de 680 y de 1.540. ¿Por qué coincide con la mitad de número?
2. ¿Qué porcentaje de 3.000 coincide con su cuarta parte? Verifíquelo usando la calculadora.
3. Si en el club del barrio el 35% de los socios es menor de 14 años ¿qué porcentaje representa a quienes tienen 14 años o más?

¡SOCORRO A VECES LA CALCULADORA NO NOS RESUELVE EL PROBLEMA!

La tecla % de la calculadora nos simplifica los cálculos cuando conocemos el total y el porcentaje.
El 20 % de 150 se obtiene

150	*****	**20**	**%**	**=**	**30**

Sin embargo, hay situaciones en las que no contamos con esa información:

Un artículo que costaba $200 se publica a $140. ¿Qué porcentaje de descuento ofrece el vendedor?
¿Conocemos el total? Sí.
¿Conocemos el porcentaje? No.
Por lo tanto, la tecla % de la calculadora no nos permite responder en forma directa a la pregunta.
Queremos saber qué descuento se aplicó cada cien pesos, o sea, cuánto se hubiera descontado si el artículo costaba cien pesos.

$$\frac{200}{70} = \frac{100}{x}$$

El descuento aplicado es del 35%.

$$X = \frac{70 \,.100}{200} = 35$$

Veamos otro ejemplo:

Si hay 350.000 personas inscriptas en un padrón electoral, ¿qué porcentaje votó al Partido Verde si éste obtuvo 52.500 votos?
Como no conocemos el porcentaje, la tecla % de la calculadora no nos ofrece un atajo.

Entonces suponiendo que todas las personas que están inscriptas en el padrón votaron por algún partido, podemos recurrir al siguiente planteo:

$$\frac{350000}{52500} = \frac{100}{x}$$

$$X = \frac{52500\,.100}{350000} = 15$$

Es decir que el partido Verde obtuvo el 15% de los votos

Para pensar y ejercitar:

El supermercado promociona una marca de arroz que cuesta $ 54 el kilo, ofreciendo un descuento del 70% en el segundo paquete.
1. ¿Qué porcentaje me descuentan por cada kilo si accedo a la promoción?
2. ¿Por qué el supermercado presenta así la promoción?

¡SOCORRO! A VECES LA SUMA NO REPRESENTA LA SUMA!

Volvamos al titular del portal ***Qué.***

¿Por qué anuncia un aumento del 32% si luego indica que la suba de enero será 20% y la de febrero 10%?
¿Será un error?
Supongamos que un usuario pagó $ 100 en diciembre de 2017.
En enero deberá pagar $120 y en febrero 10% ¡sobre la factura de enero!
El aumento total será de $ 32 o sea un 32% más que en diciembre.
Le sugerimos que explique por escrito por qué la suma de porcentajes no representa el porcentaje total.

Para pensar y ejercitar:

1) El 1 de junio un mayorista fijó un aumento del 20% sobre la lista de precios de mayo y a los 15 días anunció otro aumento del 8%. Si un artículo costaba $ 1400 a. ¿cuál es el precio a partir del 16 de junio?

b. ¿Cuál es porcentaje de aumento?

c. ¿Por qué?

2) En las discusiones paritarias los representantes de la patronal ofrecen un 15% en tres tramos de 9%, 4% y 2%.
¿Por qué el gremio insiste en que los aumentos sean acumulativos?

Para discutir en grupos:

1) En la Fábrica Newsan de Ushuaia, el salario de los encargados de Sección es un 23% más alto que el de los operarios de la línea de producción.
Si se otorga un aumento de $1.250, ¿estarán todos igualmente satisfechos con la noticia?
2) La nueva Ley aprobada en diciembre de 2017 establece cambios en la fórmula de actualización de los haberes de jubilados y beneficiarios de diversas asignaciones. Estos aumentos ya no serán semestrales sino trimestrales.
3) Un jubilado alegó que en marzo de 2018 recibió un aumento de 11,5% pero que con la norma anterior hubiera percibido 14,5%.
Si en junio se otorga un 3% adicional , ¿se compensa la pérdida?
Una encuesta revela que el 83% de los consultados no aprueba la propuesta del gobierno de acudir Fondo Monetario Internacional.
¿Cuántas personas están de acuerdo con la medida?

3.2 Guia de Actividades

Actividad 1

a) Calcular el 130% de 75.
b) ¿Qué porcentaje de 1500 es 345?
c) Hallar el número cuyo 12% es 87.
d) Si a un artículo que costaba $ 320 se le aplican dos aumentos sucesivos de 20% y 12 %, ¿cuál es el precio final? ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Actividad 2

a) Calcular el 28% de 375.
b) ¿Qué porcentaje de 156 es 27?
c) Si el 30% de los estudiantes aprobó un examen, ¿cuál es el porcentaje de desaprobados?
d) Si el 62% de un número es 93, ¿cuál es ese número?

Actividad 3

a) Había ahorrado el dinero suficiente para comprarme un abrigo que costaba $900. Cuando llegué a la tienda, este tenía una rebaja del 20%. ¿Cuánto tuve que pagar por él?

b) En la misma tienda me compré una bufanda, que tenía un descuento del 35%, pagando por ella $197,50. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

c) El gobierno de Tierra del Fuego decretó un aumento de $3000 para todos los empleados estatales.
¿Qué porcentaje de aumento representa esa suma para un docente que cobra $15000 y para un funcionario que cobra $25000?

Actividad 4

a) El precio de un medicamento, sin IVA, es de $180,75. Sabiendo que el IVA es el 21%, ¿cuál será su precio con IVA?

b) Si otro medicamento cuesta $93,40 con IVA, ¿cuál será su precio sin IVA?

c) Un medicamento costaba, sin IVA, $72. Con una receta médica sólo debemos pagar el 40%, de su precio total. Sabiendo que el IVA es del 21%, ¿cuánto tendremos que pagar por él, si llevamos la receta?

Actividad 5

a) Un comerciante ha vendido una mercadería que le costó $150, obteniendo un beneficio del 40%. ¿Cuál ha sido el precio total de venta de dicha mercancía?

b) Si en un producto por el que cobró $28,35 obtuvo un beneficio del 35%, ¿cuánto le costó a él dicho producto?

c) En un portal deportivo informaron que en un torneo de futsal, el equipo La Sara ganó el 40% de los partidos, empató el 36% y perdió 8%. ¿Es correcta la información?

d) YPF aumentó la nafta super de $19 a $21. Si el gasoil, que costaba $18 también aumentó un peso, ¿se puede afirmar que ambos combustibles modificaron su precio en igual porcentaje?

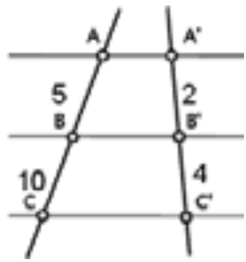
e) En abril la patronal ofrece un aumento de salario del 15 % en tres tramos no acumulativos: 9% en mayo, 4% en septiembre y 2% en noviembre. El gremio pretende 9% en mayo y 6% en octubre. ¿A fin de año cuál sería la diferencia entre ambas posiciones (en pesos y en porcentaje) para un asalariado que en marzo cobró $ 12000?

3.3 Historias, anécdotas y curiosidades

Cómo calcular un porcentaje midiendo segmentos

Thales de Mileto fue un filósofo, matemático y estadista griego que vivió en Mileto hace casi 2600 años. Aunque no hay escritos de su puño y letra, se le atribuye la demostración de una propiedad que relaciona rectas y segmentos en el plano.

Si dos rectas (A y A´) se cortan con tres o más rectas paralelas entre sí los segmentos que quedan determinados sobre A son proporcionales a sus correspondientes en A'.



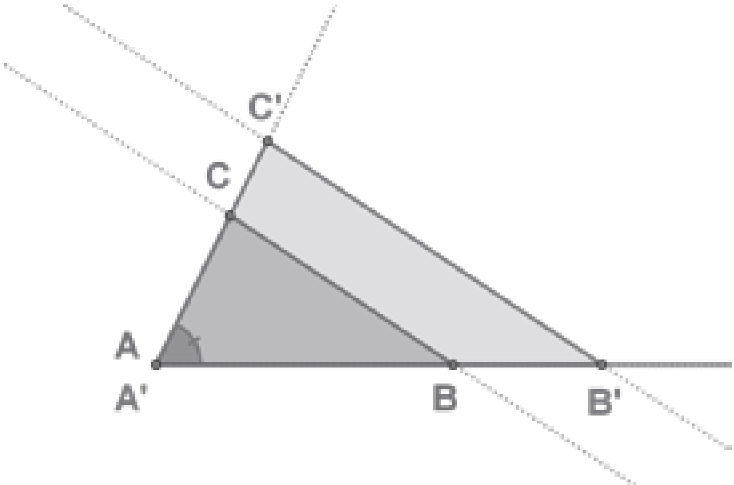
Sobre la recta A vemos un segmento, AB, que mide 5 y otro, BC, que mide 10: el doble.
Los que se corresponden sobre la recta A', miden 2 y 4, el doble; aunque varían las medidas se mantiene la relación.

$$\frac{10}{5} = \frac{4}{2} = 2$$

(Le proponemos que verifique esa propiedad midiendo distintos segmentos en distintos esquemas de rectas paralelas y transversales.)
Para cada proporción numérica es posible construir un gráfico de modo que las cantidades correspondan a las longitudes de ciertos segmentos.
¿Recuerdan que para calcular, por ejemplo, el 20% de 500, planteamos la proporción?

$$\frac{500}{100} = \frac{x}{20}$$

Entonces usando la propiedad de Thales podemos construir un gráfico de paralelas y transversales en el que las cantidades correspondan a la longitud de los segmentos y "medir" el porcentaje ***x***.



¡Manos a la obra! Intente calcular el 20% de 500 usando el método de Thales. Para ello construya el grafico correspondiente a las cantidades planteadas. Y luego mida el segmento x que representa ese porcentaje.

3.4 Trabajo integrador

1) El 13 de junio de 2017 el portal InfoBae alertaba sobre el riesgo de pagar durante varios meses el mínimo de la tarjeta de crédito.

- Leer el artículo completo, discutirlo en grupo y escribir una reflexión en diez renglones (https://www.infobae.com/espacio-no-editorial/2017/03/13/la-trampa-del-pago-minimo-de-las-tarjetas-de-credito/)
- En un párrafo propone un ejemplo:

Por ejemplo, sobre una **deuda inicial de $50.000** en la que se efectúa el pago mínimo mensual (5%), hay que adicionar el monto correspondiente a los intereses (70% anual) sobre el saldo adeudado. **Al cabo de 6 meses, se habrá abonado $14.257 en concepto de pago mínimo, pero la deuda sólo habrá disminuido $4.822.**

Verificar mediante cálculos adecuados lo que advierte el portal.

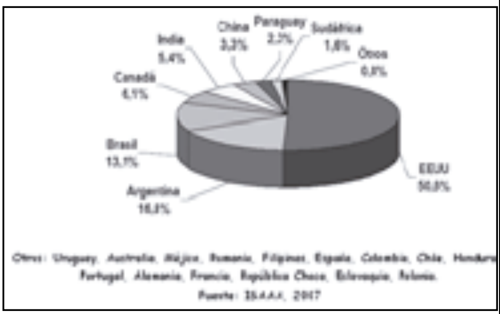
2) A continuación se muestran los porcentajes de los partidos que lograron superar las PASO de Agosto 2017 y que pudieron presentarse en las elecciones de octubre en Capital Federal:

1° VAMOS JUNTOS: 49,55%
2° UNIDAD PORTEÑA: 20,73 %
3° EVOLUCION: 13,05 %
4° AVANCEMOS HACIA 1PAIS MEJOR: 3,91%
5° FRENTE DE IZQUIERDA Y DE LOS TRABAJADORES: 3,79 %
6° AUTODETERMINACION Y LIBERTAD: 3,69%

Total de votantes: **2.540.009.**

a) ¿Qué cantidad de personas votó por la lista VAMOS JUNTOS?
b) ¿Cuál es la diferencia de votos entre el primer partido y el segundo?
c) La fuerza IZQUIERDA AL FRENTE quedó fuera de la pelea para la elección de octubre obteniendo 15.883 votos. ¿Cuál fue el porcentaje de votos obtenido por este partido?

3) El siguiente gráfico muestra el área de cultivos transgénicos de diferentes países del mundo. (Sobre un total de 115 millones de hectáreas).



a) ¿Cuál es el país que tiene una mayor superficie de cultivos de transgénicos? ¿Cuántas hectáreas son?
b) Según datos del banco mundial, la Argentina tiene aproximadamente 31 millones de hectáreas de tierra cultivable. ¿Qué cantidad de hectáreas le dedica nuestro país al cultivo de transgénicos? Comparar el dato obtenido con la superficie de la provincia de Buenos Aires.

Capítulo 4
Multiplicaciones reiteradas

Una herramienta para escribir números muy grandes o muy chicos

"La esencia de las matemáticas es su libertad"
Georg Cantor (1845 – 1918)

Cadena de mensajes

Camilo envía el siguiente mensaje de texto a 3 personas en un minuto:

Reunión en la plaza del barrio para pedir que no cierren el centro cultural.

¡Pásalo a tres amigos!

Si cada persona que recibe el mensaje lo reenvía a otras tres personas distintas en un minuto.

Intente responder las siguientes cuestiones:

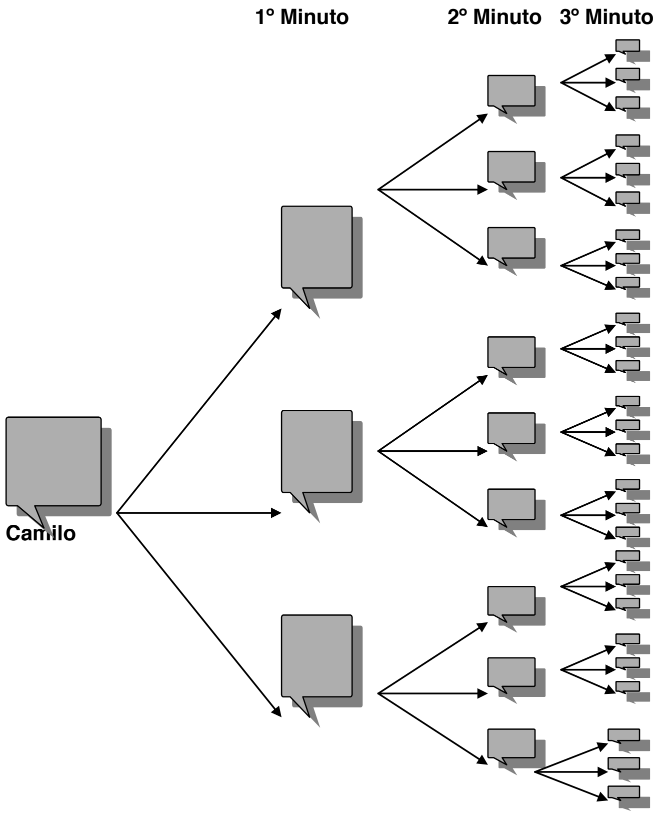
1) ¿Cuántas personas reciben el mensaje al final de la cadena al cabo de 3 minutos? ¿Y después de 10 minutos? ¿Y en una hora? ¿Y en 24hs?

2) ¿Cómo varían los resultados si en vez de 3 mensajes por minuto, todos logran enviar 5 mensajes en un minuto? ¿Y si fueran 10 mensajes en un minuto?

Una propuesta para resolver la "cadena de mensajes"

Sabemos que al principio Camilo envía tres mensajes de texto en un minuto. Estos mensajes son recibidos por tres personas, que a su vez lo reenviarán a otras tres en el mismo tiempo anterior. Y así sigue la cadena. Queremos saber cuántas personas reciben el mensaje al final de la cadena después de 5 minutos desde que Camilo envió los tres primeros mensajes.

Dibujemos un diagrama de árbol (ver cap. 2) para poder observar con más claridad como va creciendo esta cadena de mensajes, y así calcular lo que nos piden.



Podemos ver que al final del diagrama tenemos 27 ramas, es decir que al cabo de 3 minutos el número de personas que recibe el mensaje al final de la cadena es 27.

Para calcular cuantas personas reciben el mensaje cuando pasaron 10 minutos podríamos seguir abriendo ramas, pero dibujar tantas es algo engorroso. Entones, busquemos otra alternativa, intentemos entender de qué manera va creciendo el número de personas que recibe el mensaje.

Como podemos observar en el diagrama tenemos:

minuto 0 = 1 mensaje
minuto 1 = 3 mensajes
minuto 2 = 9 mensajes
minuto 3 = 27 mensajes

A medida que pasan los minutos los mensajes se triplican, de manera que la cantidad de mensajes después de un minuto es igual al resultado anterior multiplicado por 3.
Entonces, para el **minuto 4** tendremos **27 x 3 = 81 mensajes**. Así podríamos continuar hasta el minuto 10. Siempre multiplicando el resultado del minuto anterior por 3.
Pero podemos acortar aún más el camino sin tener que hacer tantos cálculos. Si observamos con más detalle la tabla anterior, a partir del **minuto 1** existe una relación entre la cantidad de minutos y la cantidad de veces que multiplicamos el número 3:

minuto 2 = 3 x 3 = 9
minuto 3 = 3 x 3 x 3 = 27
minuto 4 = 3 x 3 x 3 x 3 = 81
minuto 5 = 3 x 3 x 3 x 3x 3 = 243

Siguiendo este razonamiento, entonces para calcular la cantidad de personas que reciben el mensaje al final de la cadena cuando han pasado 10 minutos solo tenemos que multiplicar el número 3 diez veces por sí mismo. Veamos:

3 x 3x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3x 3 x 3 = 59. 049

Es decir que al cabo de 10 minutos 50.049 personas reciben el mensaje al final de la cadena.

Entonces, para saber cuántas personas reciben el mensaje en una hora, tenemos que multiplicar el número 3 sesenta veces por sí mismo, debido a que 1 hora equivale a 60 minutos. Y para 24 horas deberíamos multiplicar el número 3 ¡unas 1440 veces por sí mismo! (24 horas = 1440 minutos).

Inténtelo usted solo a ver a qué resultado llega, puede ayudarse con la calculadora para no tener que hacer tantas multiplicaciones. Observe que estos cálculos solo nos permiten obtener la cantidad de personas que reciben el mensaje al final de la cadena... ¿Cuántas serian en total? ¿Se anima a calcularlas?

Con respecto a la segunda pregunta, si en vez de 3 mensajes, se envían 5 en un minuto, entonces siguiendo el razonamiento anterior solo tenemos que multiplicar el número 5 tantas veces seguidas como minutos hayan pasado. Es decir, al cabo de 3 minutos la cantidad de personas que reciben el mensaje al final de la cadena sería:

5 x 5 x 5 = 125 personas

En el caso de que se envíen 10 mensajes en un minuto tendríamos:

10 x 10 x 10 = 1.000 personas

Observe que en el caso de que sean 10 mensajes, los cálculos de la multiplicación por 10 se simplifican bastante, solo hay que agregar un 1 y tantos ceros según la cantidad de veces que multiplique al número 10. Veamos algunos ejemplos:

10 x 10 = 1.00
10 x 10 x 10 = 1.000
10 x10x10x10x10 = 10.000
10 x 10 x 10 x 10 x10 = 100.000

Dejamos en manos del lector los cálculos para determinar la cantidad de personas que reciben el mensaje al cabo de 10 minutos, de 1 hora y de 24 horas. ¡Adelante!

4.1 UN POCO DE TEORÍA

En la situación anterior multiplicamos reiteradas veces un mismo número. Por ejemplo, para saber cuántas personas reciben el mensaje al final de la cadena al cabo de 5 minutos planteamos:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Esta multiplicación reiterada de un mismo número puede expresarse en forma abreviada utilizando el concepto de potencia de la siguiente manera:. 3^5.
Las Potencias son muy útiles para simplificar multiplicaciones donde se repite el mismo número. Están formadas por la base y por el exponente. En el caso anterior tenemos:

exponente

$$\textit{base} \longrightarrow \mathbf{3}^{5} \swarrow$$

La base es el número que se multiplica reiteradas veces y el exponente es la cantidad de veces que se multiplica la base. El resultado de esta operación se llama potencia y se lee “tres elevado a la cinco”. Veamos como quedan expresados en forma de potencias los resultados obtenidos en la activad anterior:

Cantidad de personas que reenvían el mensaje en un minuto.	Minutos	Personas que reciben el mensaje al final de la cadena.
3	3	$3^3 = 27$
3	5	$3^5 = 243$
3	10	$3^{10} = 59.049$
5	3	$5^3 = 125$
5	5	$5^5 = 3.125$
5	10	$5^{10} = 97.65625$
10	3	$10^3 = 1.000$
10	5	$10^5 = 10.000$
10	10	$10^{10} = 10.000.000.000$

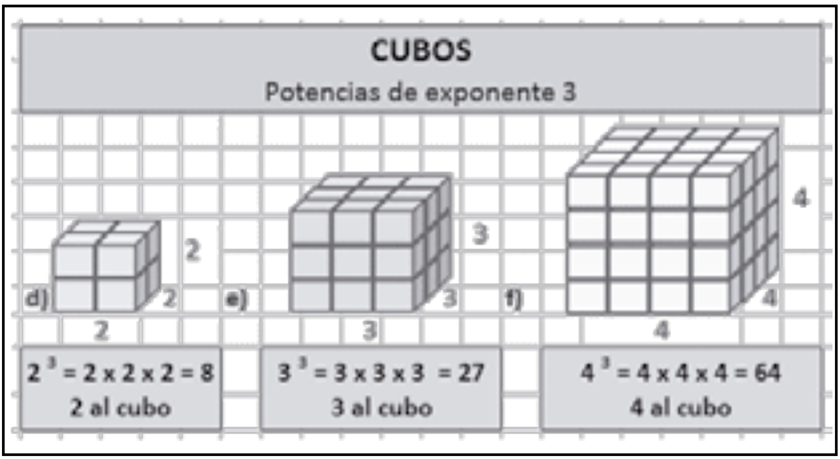
Cuadrados y Cubos

En general las potencias que tienen como exponente el número dos o tres se las suelen nombrar como cuadrados o cubos. Por ejemplo: 3^2 se dice “Tres elevado al cuadrado” y 2^3 “Dos elevado cubo”.

La costumbre de decir cuadrado y cubo proviene de la geometría griega. En la antigua Grecia no se utilizaba el sistema de numeración actual y muchos de los problemas matemáticos los resolvían de forma geométrica. Realmente es una manera muy visual de entender las potencias.
Por ejemplo, si se tiene un cuadrado cuyo lado mide 2 unidades, entonces su área vendrá dada por el siguiente calculo $2 \times 2 = 2^2 = 4$ (base x altura).
Si el cuadrado es de 3 unidades por lado, su área será de $3 \times 3 = 3^2 = 9$.
Si es de 4, unidades, su área es de $4 \times 4 = 4^2 = 16$

Por otro lado, si tenemos un cubo cuyo lado mide 2 unidades, su volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura. En este caso será: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$.

Si el cubo es de 3 unidades por cada lado, su volumen es de $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$. Si es de 4, su volumen es de $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$



4.2 Guía de actividades (primera parte)

1) Utilizando el concepto de potencia complete el siguiente cuadro:

Producto	Base	Exponente	Potencia	Se lee
2 x 2 x 2 x 2 x 2				
	3	4		
			5^6	
				Seis elevado a la cinco
	4	3		

2) Indique cuál de las siguientes expresiones puede escribirse como una potencia. En caso afirmativo escribir la potencia.

a) 2+2+2+2+2
b) 4-4
c) 2x2x2x2x2
d) 4x4
e) 4:4
f) 21x21x21
g) 10+10+10+10+10

3) Analice las siguientes situaciones y plantee los argumentos necesarios para resolverlas:

a) Si la velocidad máxima de un avión es de 2.187 km/h, ¿a qué exponente está elevado el número 3 para obtener esa velocidad?
b) La distancia entre Buenos Aires y Ushuaia es de 3.125 km: ¿cuántas veces hay que multiplicar un número ubicado entre 1 y 5 para llegar a ese valor? ¿De qué potencia se trata?
c) Si dividimos el número de teléfono 4096-6561 en dos partes: ¿se puede expresar cada parte como potencias de base de 2 y 3? En caso afirmativo, exprésenlas.

4) Encuentre la base de los siguientes cuadrados.

a) $64 = (.....)^2$
b) $100 = (.....)^2$
c) $81 = (.....)^2$
d) $169 = (.....)^2$
e) $1.681 = (.....)^2$

5) Encuentre el exponente que falta para que cada igualdad sea verdadera.

a) $2^{----} = 32$
b) $3^{----} = 81$
c) $7^{----} = 823.543$
d) $4^{----} = 1.048.576$
e) $10^{----} = 10.000.000$

6) Escriba en forma de potencia los siguientes números de modo que la base sea el menor número posible.

a) 8
b) 36
c) 64
d) 121
e) 125
f) 1.000.000
g) 2.401

7) Un desafío con potencias. Exprese el número 17 como la suma de los cuadrados de tres números naturales (el cero no vale) no necesariamente distintos. Lo mismo con el número 36 y con el número 98.

8) Se deja caer una pelota de goma desde un metro de altura. Se comprueba que luego del primer rebote alcanza la mitad de la altura inicial y que en cada rebote alcanza la mitad de la altura anterior. ¿Después de cinco rebotes qué altura llegará? ¿Es posible expresar el resultado final como una potencia?

4.3 Algo más de teoría

Potencias de base 10 y notación exponencial

En el cuadro anterior podemos observar que para calcular el resultado de las potencias de base 10 no nos hace falta multiplicar, solo hay que agregar un uno seguido de tantos ceros como indique el exponente que tenga la potencia. Por ejemplo:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1.000$
$10^4 = 10.000$
$10^5 = 100.000$
$10^6 = 1.000.000$

Las potencias de base 10 son muy útiles a la hora de trabajar con grandes cantidades. Por ejemplo:

Se sabe que la distancia de la tierra al sol es de aproximadamente 150 mil millones de metros. O que un año luz es una unidad de distancia que equivale a la longitud que recorre la luz en un año, y que equivale a 10.000.000.000.000.000 metros.
Ambas cantidades son demasiado engorrosas para trabajar con tantas cifras. Y para simplificar su escritura podemos recurrir a las potencias de base 10.

Si la distancia de la tierra al Sol es de unos 150.000.000.000 de metros entonces utilizando potencias de base 10 podemos escribirla de la siguiente forma 15×10^9 m.
Y si la distancia que recorre la luz en un año es de 10.000.000.000.000.000 de metros entonces en forma de potencia equivale a 10^{15}.

Veamos un ejemplo más concreto del uso de este tipo de potencias. Tomemos el siguiente titular del diario Página 12 [7].

ECONOMÍA - 06 de marzo de 2017
La deuda pública trepó en 77 mil millones de dólares entre diciembre de 2015 y febrero de 2017

Intentemos escribir en pesos la deuda que el gobierno venía acumulando hasta febrero del 2017.
77 mil millones de dólares en números es: 77.000.000.000.

Si tomamos la cotización del dólar en unos $25 (pesos argentinos) entonces solo hay que multiplicar 25 x 77. 000.000.000. Intente hacer este cálculo a mano y con calculadora.
¿Cuál es el resultado final?

Si utilizamos una calculadora científica (la mayoría de los celulares trabaja con una) el resultado que se muestra en la pantalla es:

1,925e12

¿Qué cantidad representa el valor anterior?

Aunque no lo veamos la calculadora está trabajando con potencias de base 10. Como la cantidad de cifras que tiene este número no entran en la pantalla, entonces la maquina utiliza otro tipo de escritura que se conoce como "Notación Exponencial" o "Notación Científica"

La letra **e** representa a la base 10. Es decir que 1,925**e**12 es igual a escribir $1{,}925 \times 10^{12}$**.**

7 https://www.pagina12.com.ar/24042-fiesta-con-timba-y-fuga-de-divisas-sin-control

¿Cómo llegó a ese resultado la calculadora? Bien, aquí va una explicación:

77. 000.000.000 escrito como una potencia de base 10 es $77x10^9$ Ahora intentemos multiplicar este resultado por 25.

$$\mathbf{77x10^9x25}$$

En este caso como la multiplicación es "**conmutativa**", los números se pueden multiplicar en cualquier orden y el producto siempre será el mismo. Entonces podemos multiplicar 77 x 25 y luego dejar la multiplicación de 10^9 para el final.

> ***Propiedad conmutativa de la multiplicación.***
> *Esta **propiedad** significa que los factores se pueden **multiplicar** en cualquier orden y que el producto siempre es el mismo. Ejemplo:*
> ***2x3 x 4 = 2x4 x3 = 4x3 x 2 = 24***

Veamos:

77 x 25 = 1.925 entonces nos queda **1.925 x 10^9**

Pero 1.925 puede escribirse como 1,925 x 1.000 que es igual a 1,925 x 10^3
Resumiendo, tenemos **77 x 10^9 x 25 = 1.925 x 10^9 = 1,925 x 10^3 x 10^9.** Y si desarrollamos las potencias de base 10 obtenemos:

1,925 x 1.000 x 1.000.000.000 = 1,925 x 1.000.000.000.000

Finalmente, utilizando potencias de base 10 el resultado que muestra la calculadora se escribe así: **1,925 x 10^{12}.**

¿Y de cuántos millones estamos hablando?

Si volvemos al cálculo anterior, **1,925 x 1.000.000.000.000**, y redondeamos **1,925** a **2** entonces estamos hablando de aproximadamente **2.000.000.000.000.**
Es decir que la deuda acumulada hasta marzo de 2017 se aproximaba a ¡**dos billones** de pesos argentinos!

Escritura en Notación Exponencial o Científica

Cuando manejamos números "muy grandes" nos encontramos con dos importantes inconvenientes:

1) Las operaciones con ellos son extremadamente pesadas.
2) Tienen tantas cifras que nos resulta difícil hacernos una idea clara de lo grande que son los números.

Vimos anteriormente que la calculadora utiliza potencias de base 10 para escribir algunas cantidades que no entran en la pantalla. Esta forma de expresar un número se conoce como ***"Notación Exponencial o Científica".***

Veamos algunos ejemplos de este tipo de escritura:

$$3.000.000.000.000 = 3 \times 10^{12}$$

$$1.925.000.000.000.000 = 1{,}925 \times 10^{15}$$

$$251.000.000.000.000.000 = 2{,}51 \times 10^{17}$$

$$72.698.100.000.000.000.000 = 7{,}26981 \times 10^{19}$$

En general diremos que un número está escrito en notación científica o exponencial si tiene la siguiente forma: $\mathbf{m \times 10^{n}}$

Donde: **m** representa un número mayor que 1 y menor a 10.
$\mathbf{10^{n}}$ representa una potencia entera de 10.

La notación científica también puede ser útil para escribir números muy pequeños. En este caso para números menores a 1 utilizaremos en el exponente de la potencia de base 10 un signo menos. Por ejemplo:

$$\mathbf{0{,}000\,000\,2 = 2 \times 10^{-7}}$$

$$\mathbf{0{,}000\,000\,224 = 2{,}24 \times 10^{-7}}$$

$$\mathbf{0{,}000\,000\,000\,2247 = 2{,}247 \times 10^{-10}}$$

Algunas consideraciones:

1) Observe que el valor de **m** puede ser entero o un número "con coma" como en los ejemplos anteriores.

2) El exponente en la potencia de base 10 está relacionado con la cantidad de lugares que "corremos la coma" para que **m** resulte un número mayor que 1 y menor a 10.
Por ejemplo, para escribir en notación científica 1.925.000.000.000.000 hemos corrido la coma de **derecha a izquierda 15** lugares hasta llegar a 1,925 x $\mathbf{10^{15}}$.
Mientras que para representar 0,000000224 corrimos la coma de **izquierda a derecha 7 lugares** para llegar a 2,24 **x** $\mathbf{10^{-7}}$.

3) Cuando **m** es un número con coma con más de dos o tres decimales, se puede aproximar a un valor entero, ya que el resto de los decimales en una cantidad muy grande o muy chica resulta despreciable frente a la cantidad total. Y así facilitar el manejo de este tipo de cantidades.
Por ejemplo: 1,925 x $\mathbf{10^{15}}$ puede aproximarse a **2** x $\mathbf{10^{15}}$.
De la misma forma 2,247 **x** $\mathbf{10^{-7}}$ puede aproximarse a 3 **x** $\mathbf{10^{-7}}$.

4.4 Guía de actividades (segunda parte)

1) Escriba en notación científica los siguientes números y luego ordenarlos de menor a mayor

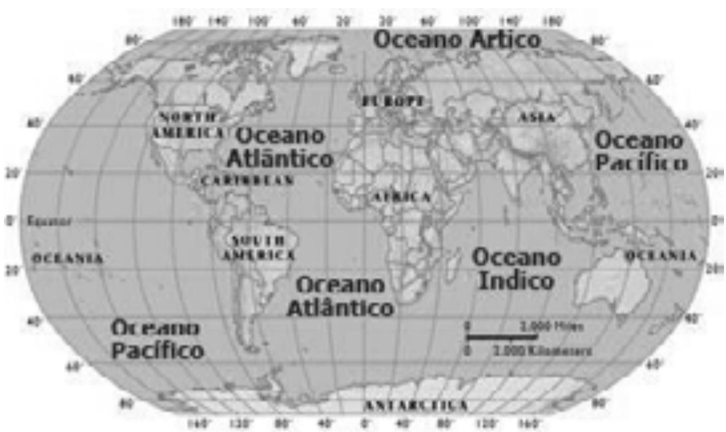
a) 30.000
b) 5.350
c) 90.000
d)54.000
e) 310.000
f) 12.000.000
g) 51.200.000.000
h) 9.432.000.000.000
i) 0,10
k) 0,01
l) 0,001
m) 0,15
n) 0,015
o) 0,25
p) 0,0043
q) 0,0000678

2) Traduzca a notación científica las cantidades de cada situación.

1. Treinta mil millones de pesos.
2. La población actual de la Argentina es de cuarenta millones de habitantes.
4. El diámetro de la tierra es de aproximadamente 25.400.000 metros.
5. La población de mundial es aproximadamente de seis mil millones de humanos.
6. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente 30 veces el diámetro de la Tierra.

3) A la izquierda se muestra la superficie cubierta por los océanos de nuestro planeta. Complete los espacios en blanco de la tabla y ordene de menor a mayor los océanos según su superficie.

Océanos	**Superficie cubierta en kilómetros cuadrados**	**Escritura en notación científica**
Pacífico		**$1{,}56 \times 10^8$**
Índico	**68.556.000de km^2**	
Océano glaciar Antártico		**$2{,}1 \times 10^7$**
Océano glaciar Ártico	**14.056.000 de km^2**	
Atlántico	**76 millones de km^2**	



4) ¿Qué tan lejos están los planetas del Sol?[8]

Los ocho planetas dentro de nuestro Sistema Solar tienen sus propias órbitas alrededor del sol. Debido a que su trayectoria es elíptica, la distancia entre ellos y nuestra estrella varía constantemente.
Su punto más cercano al Sol se llama perihelio, y el más lejano afelio. Determinar cuán lejos están los planetas del Sol resulta difícil, no sólo porque están siempre en movimiento, sino también porque los tramos son tan grandes que resultan difíciles de dimensionar. No obstante, es posible calcular una distancia aproximada de cada planeta al Sol, calculando un valor promedio entre su punto más cercano y lejano, es decir sumando ambas distancias y luego dividiéndolas por 2.

A) En la siguiente tabla se muestran los puntos más cercanos y lejanos de cada planeta al Sol (en kilómetros) Calculen el valor promedio y completen la tabla escribiendo en notación científica la distancia aproximada al Sol de cada uno de los planetas:

PLANETAS	Punto más cercano al Sol	Punto más lejano al Sol	Distancia aproximada al Sol
Mercurio	46 millones de Km	46 millones de Km	
Venus	107 millones de Km	109 millones de Km.	
Tierra	147 millones de Km.	152 millones de Km.	
Marte	205 millones de Km	249 millones de Km	
Júpiter	741 millones de Km	817 millones de Km	
Saturno	1,35 mil millones de Km	1,51 mil millones de Km	
Urano	2,75 mil millones de Km	3 mil millones de Km	
Neptuno	4.45 mil millones de Km	4.55 mil millones de Km	

8 http://www.muyinteresante.com.mx/preguntas-y-respuestas/distancia-entre-planetas-tierra-y-sol/

b) Si quisiéramos caminar la distancia aproximada de cada planeta al sol ¿Cuántos pasos tendríamos que dar en cada caso? Piense que una medida aproximada es 1 paso = 1 metro.

5) Se calcula que el volumen del sol es de aproximadamente 14.100.000.000.000.000.000.000 Km^3. Mientras que el volumen de Venus y el de la Tierra es de aproximadamente: 928.000.000.000 Km^3 y $1{,}083\times10^{12}$ Km^3. Respectivamente.

a) ¿Qué planeta tiene mayor volumen?

b) ¿Cuántas veces más grande es el volumen del sol que el de la tierra? ¿Y con respecto a Venus? Explicar cada respuesta.

4.5 Historias, anécdotas y curiosidades

El Googolplex ¿Un número cercano al infinito?

Alguna vez se ha preguntado ¿Cómo se llama el número más grande que podemos escribir?
Comencemos escribiendo algunos números que ya conocemos:
Un millón es 1 seguido de seis ceros **1.000.000.** Usando potencias de base 10 se escribe 10^{6}. Luego, podemos escribir un billón que es un millón de millones, o sea, 1 seguido de 12 ceros :
1.000.000.000.000 = 10^{12}
A este gigante le sigue un trillón, que sería el uno seguido de 18 ceros: **1.000.000.000.000.000.000 = 10^{18}**
De esta forma, agregando de a millones sigue el cuatrillón (10^{24}), el quintillón (10^{30}), el sextillón (10^{36}), el septillón (10^{42}),... y así continúa.

¿Pero hasta donde seguimos?

Bueno, en principio como estamos trabajando con números naturales, siempre será posible encontrar uno más grande ya que son infinitos. El problema es cómo los escribimos.
Cuentan que allá por el año 1930, Edward Kasner, un reconocido matemático estadounidense, le pidió a su sobrino de nueve años que inventara un nombre para escribir un número gigantesco, y el pequeño respondió "Googol".

¿Y qué valor representa?

Bien este número es ¡1 seguido de cien ceros! es decir 10^{100} un valor tan tremendamente grande que asusta un poco. Para tener una idea de su magnitud se estima que es más grande que el número de partículas que hay en el universo, el cual sólo asciende a 10^{80}.
Desde ese momento, matemáticos de todo el mundo incorporaron dicho término y fue ampliamente utilizado. Pero al parecer, el niño y su tío no quedaron conformes con la longitud del número "descubierto", así que decidieron añadir unos cuantos ceros más para inventar otro número más grande que el Googol, El Googolplex que se define como 10 elevado a un Googol
Es decir $\mathbf{10}^{\mathbf{Googol}}$ que usando potencias de base 10 nos queda escrito así:

$$\mathbf{10^{10^{100}}}$$

¿Qué tan cerca estamos del infinito?

Para darnos una idea, si usted quiere escribir todos los ceros que tiene un googolplex colocándolos en línea (no formando una superficie) no le alcanzaría el universo conocido para escribir semejante cantidad de ceros. Pero aun así el **googolplex** está muy lejos del infinito. Como dijo el científico Carl Sagan en su exitosa serie de televisión, "el googolplex esta tan lejos del infinito como el número 1". Esto nos muestra lo enorme que puede ser una cantidad sin ser infinita.

¿Y después del googolplex qué hay?

Bueno, como se imaginará la lista sigue, pero lo dejamos en sus manos para que investigue por su cuenta.

4.6 Trabajo integrador

Microorganismos

1) Un problema de Bacterias Las bacterias se reproducen por bipartición. Esto quiere decir que crecen al doble de su tamaño y luego de un determinado tiempo se dividen en dos bacterias iguales. Supongamos que en un tubo de ensayo tenemos una bacteria que se divide en dos a cada hora.
Responda:

a) ¿Cuántas bacterias hay después de 5 horas? ¿Y en un día? ¿Y en una semana? ¿Y en un año?
b) ¿Cuánto tiempo pasa hasta que el tubo tenga 16 bacterias? ¿ Y 1.600 bacterias? ¿Y 1.000.000?
c) ¿Qué ocurriría si en lugar de comenzar con una bacteria comenzara con 3? Responda la pregunta a, considerando que comenzamos con 3 bacterias.

2) Bacterias y levaduras. Se sabe que las bacterias y levaduras son invisibles a simple vista, ya que tienen un tamaño muy pequeño para el ojo humano. Por ejemplo, las bacterias llegan a tener una longitud promedio de unos 0,000006 metros. Mientras que una levadura puede llegar a tener un diámetro de unos 0,0000000075 metros.

a) Según estos datos, ¿cuál de estos dos microorganismos posee mayor tamaño? Escriban ambos tamaños en notación científica.
b) Si una hormiga de jardín tiene una longitud aproximada de 0,005 metros. ¿Cuántas veces mas grande es la hormiga, comparada con los organismos anteriores? ¿Y si los comparamos con el tamaño de una persona? Explicar las respuestas mostrando todos los cálculos propuestos.

Años Luz

Lea con atención el siguiente artículo que fue tomado del periódico ABC de Sevilla.

MIÉRCOLES 9-11-94 CIENCIA

Descubierta la galaxia más lejana del Universo con un telescopio de Canarias

Está situada a más de ocho mil millones de años-luz de la Tierra

Madrid. A. Aguirre de Cárcer

La galaxia más lejana del Universo ha sido descubierta en la Constelación del Dragón por astrofísicos británicos, holandeses y de EE.UU. con ayuda del telescopio William-Herschel, situado en el Instituto Astrofísico de Canarias. Aunque la distancia en años luz de la galaxia no ha sido calculada con precisión, está tan lejos de nuestro planeta que el Universo sólo ocupaba un 19 por 100 de su tamaño actual cuando la luz de la galaxia empezó su viaje hacia la Tierra.

a) Escribe en notación científica, la cantidad de años luz que separa la tierra de la galaxia descubierta.

b) Sabiendo que un año Luz equivale a $9{,}46 \times 10^{15}$ metros. Calcula los metros de distancia que existen entre la tierra y la nueva galaxia.

c) Si una nave pudiera viajar a la velocidad de la luz que es aproximadamente de unos 300.000 Km por segundo ¿Cuántos años (terrestres) tardaría en llegar a esa galaxia desde la tierra?

Capítulo 5
Los números a través del tiempo

Un mundo matemático completo puede existir en la punta de una aguja, o en el infinito conjunto de los números.

Theoni Pappas.

El origen de los números

Cuando los seres humanos empezaron a contar usaron diferentes elementos como dedos, piedras, varas, marcas, nudos en una cuerda y muchas otras formas que les sirvieron como herramientas para contar diferentes colecciones de objetos.
Por ejemplo, se sabe que en la antigüedad algunos ejércitos utilizaban piedras para contar a los guerreros caídos en combate. Antes de entrar en la batalla cada guerrero tenía que depositar una piedra en un lugar convenido. A la vuelta cada uno recogía su piedra, las sobrantes indicaban el número de bajas que se habían producido en la batalla. El uso de piedras para contar o realizar operaciones ha dado lugar a la palabra “cálculo” que proviene de la palabra latina “calculus” cuyo significado es “piedra pequeña”.

A medida que la cantidad a contar crece se hace necesario un sistema de representación más práctico. Muchos son los pueblos y civilizaciones que han desarrollado desde la más remota antigüedad, sistemas numéricos para representar cantidades que fueron cambiando a medida que sus necesidades se hicieron más complejas.

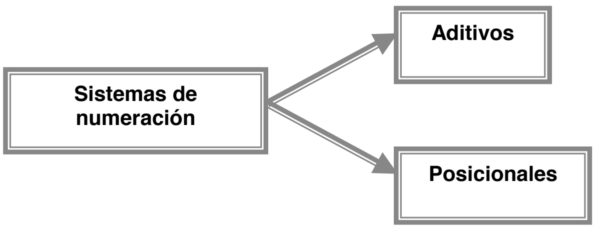
Por ejemplo, los sumerios, antiguos pobladores de lo que hoy se conoce como Irak, hace unos 4.000 años a. C. representaban las cantidades en tablillas de arcilla utilizando un sistema de numeración con 60 símbolos distintos, que al combinarlos en diferentes posiciones les permitía representar cantidades gigantescas. No obstante, también existieron y existen culturas que sólo utilizan unos pocos símbolos para representar cantidades. Tal es el caso de los vedda, una tribu indígena de Sri Lanka, que sólo tienen palabras para denominar el uno y el dos. A partir de ahí, continúan añadiendo "y uno más". Algo parecido hacen los Caquinte peruanos, que llaman al tres "otro más" y al cuatro "el que sigue".
Vemos entonces que la forma en que nos relacionamos con los números viene determinada en gran parte por las necesidades sociales que surgen en diferentes culturas o civilizaciones.

Pensemos ahora cómo nos relacionamos nosotros con los números e intentemos reflexionar sobre las siguientes cuestiones:

1) ¿Qué son los números? ¿Qué sistema de numeración utilizamos actualmente para representarlos? ¿Cuántos símbolos tiene?
2) ¿Conoce otro sistema numérico para representar cantidades distinto al nuestro? Represente algunas cantidades en ese sistema.
3) ¿Podríamos nosotros usar en la actualidad un sistema similar al los vedda o los Caquinte para hacer frente a todas las necesidades que involucran cálculos numéricos?

5.1 UN POCO DE TEORÍA

Como dijimos en la introducción, a medida que la cantidad a contar se hace cada vez más grande es necesario utilizar un sistema de representación que nos permita contar de manera más eficiente. A lo largo de la historia muchas fueron las civilizaciones que se vieron obligadas a introducir diferentes símbolos para representar grandes cantidades, esto derivó en la creación de lo que hoy llamamos "Sistemas de Numeración". Según la forma en que se representan las cantidades, los sistemas de numeración se pueden clasificar en dos grandes grupos:



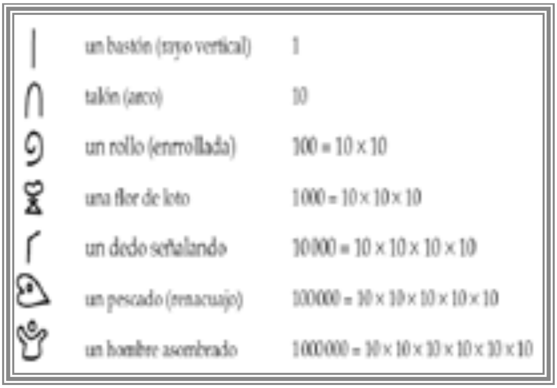
Los sistemas aditivos

En este tipo de sistemas cada símbolo representa un valor que se va sumando al siguiente hasta obtener la cantidad que se quiere representar. Y en general no tiene demasiada importancia el orden en que aparezcan los símbolos. Veamos algunos ejemplos concretos:

Sistema egipcio

Los egipcios fueron grandes matemáticos, desarrollaron la matemática en forma práctica, aplicándola en diferentes problemas cotidianos como reparto de cereales o tierras. También la utilizaron en sus magníficas construcciones y monumentos. Aproximadamente alrededor del año 3.000 a.C. y mediante la escritura en jeroglíficos [9] usaron un sistema de numeración agrupando cantidades de 10 en 10 con los siguientes símbolos:

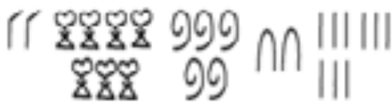
9 La palabra jeroglífico proviene de las raíces griegas □ερός (hierós, "sagrado") y γλύφειν (glýfein, "grabar"). Eran símbolos grabados en piedra.



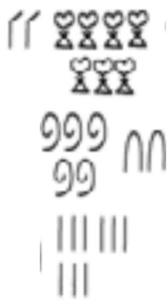
	un bastón (rayo vertical)	1
	talón (arco)	10
	un rollo (enrollada)	100 = 10 × 10
	una flor de loto	1000 = 10 × 10 × 10
	un dedo señalando	10 000 = 10 × 10 × 10 × 10
	un pescado (renacuajo)	100 000 = 10 × 10 × 10 × 10 × 10
	un hombre asombrado	1 000 000 = 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10

Para escribir una cantidad los egipcios primero utilizaban los símbolos que representan una mayor cantidad y luego le seguían los de menor orden. Además, los símbolos solo podían ser repetidos como máximo nueve veces, hasta alcanzar la cantidad deseada.

Por ejemplo, el número 27.529 se puede representar:



Pero también se podía representar de la siguiente forma, ya que solo había que sumar las cantidades que representa cada símbolo.



Sistema Romano

La numeración romana es un sistema que se desarrolló en la antigua Roma aproximadamente en el 700 a.C y se utilizó luego en todo el imperio romano, más tarde en toda Europa y luego se expandió por una buena parte del mundo. Todavía hoy seguimos usando este sistema. Por ejemplo, para numerar los siglos: "vivimos en el Siglo XXI" o para numerar a los miembros de dinastías, reyes y emperadores.
Los romanos utilizaron un sistema aditivo en el cual los símbolos numéricos eran representados por distintas letras, como se muestra en la tabla de la derecha.

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1 000

Por ejemplo:

2.018 en números romanos se escribe **MMXVIII**.
1600 en números romanos se escribe **MDC**

Adaptaciones y reglas

El sistema de numeración romano con el tiempo tuvo que adaptarse a las nuevas necesidades de los pueblos o civilizaciones que lo utilizaba. Por ese motivo, con los años se fueron agregando varias reglas. En el siguiente cuadro se resumen algunas.

I) Los símbolos se escriben de izquierda a derecha, comenzando con los de mayor valor.
II) Los símbolos I X C y M pueden repetirse como máximo hasta tres veces seguidas. Mientras que V D y L no pueden repetirse nunca.
III) Los símbolos se suman siempre y cuando el que está a la derecha sea menor o igual al de la izquierda. *Ejemplo:* ***XV = 15*** *o* ***XXVII =27.***
En caso contrario se resta el símbolo de la derecha con el de la izquierda. *Ejemplo:* ***IV = 4 o XIX= 19.***
IV) No se puede repetir dos símbolos iguales para restar. *Ejemplo* ***18*** *se escribe* ***XVIII*** *y no* ***XIIX.***
Tampoco se pueden utilizar V; D y L para restar*. Ejemplo* ***45*** *se escribe* ***XLV*** *y no '****VL****.*

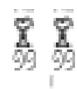
Es importante señalar que estas reglas ayudaban a que no se produzcan ambigüedades en la escritura de un número. Pero hacían que este sistema sea cada vez más complejo, razón por la cual se dejó de utilizar y fue reemplazado por nuestro actual sistema de numeración decimal, el cual desarrollaremos más adelante.
A continuación, les proponemos una serie de actividades para trabajar con los dos sistemas desarrollados. ¡Adelante!

5.2 Guia de Actividades I
Sistemas Aditivos

1) Escribir los siguientes números en el Sistema egipcio y en el romano:

a) 25	d) 301	g) 1.798
b) 57	e) 644	h) 2.504
c) 99	f) 900	i) 3.003

2) Complete el cuadro traduciendo las cantidades a cada uno de los sistemas de numeración:

Sistema Egipcio				
Sistema Romano	**CXIX**	**MCMIX**		

3) Escriba su fecha de nacimiento en el sistema egipcio y romano.

4) Desarrolle:

a) En el sistema romano, ¿cuál es el mayor número que puede escribirse utilizando las reglas y los símbolos descriptos en la teoría?
b) ¿Cómo se escribe un millón? Investiguen en libros o fuentes de Internet como se escriben en el sistema romano este tipo de cantidades.

c) Usando lo anterior escriban en números romanos las siguientes cantidades:

a) 4.000	d) 15.554	f) 1.250.309
b) 5.000	e) 1.000.000	g) 2.000.000.000.000
c) 10.000		

5) Invente y escriba un sistema de numeración aditivo que tenga 8 símbolos. Luego escriba las cantidades del punto 1 en este sistema.

6) ¿Cuál es el menor número que se escribe con 25 símbolos en sistema egipcio?

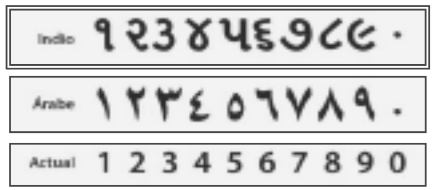
7) Respondan con V (verdadero) o F (falso). En caso de ser falso, proponga un contra ejemplo que refleje este hecho.

a) Dados dos números egipcios, es mayor el que tiene más símbolos.
b) El sistema egipcio y el romano son sistemas no posicionales.
c) En el sistema romano el número 1444 se representa MIVIVIV.

5.3 Algo más de teoria "LOS SISTEMAS POSICIONALES"

Los sistemas posicionales son mucho más eficientes que los aditivos a la hora de escribir grandes cantidades y realizar cálculos. En estos sistemas el valor de un símbolo depende tanto de su valar como de la posición que ocupa en la escritura del número. Además, el número de símbolos permitidos en un sistema de numeración posicional se denomina base. Un ejemplo concreto de este tipo de sistemas es el sistema decimal que utilizamos actualmente para escribir los números.
A lo largo de la historia no muchas culturas lograron desarrollar un sistema de este tipo. Entre ellas podemos mencionar a los indios, sumerios, chinos, incas y mayas, que si bien vivieron en distintas épocas y utilizaron diferentes símbolos llegaron al mismo principio. Veamos algunos ejemplos de este tipo de sistemas.

El Sistema de numeración decimal



Fue en la India entre los años 600 y 700 d.C. donde el actual sistema de numeración decimal tuvo su origen, y si bien los símbolos eran algo distintos de cómo los escribimos hoy en día, las reglas y la cantidad de estos se mantuvieron intactas (ver imagen[10] más abajo). Más tarde, cuando los árabes conquistaron el norte de la India, conocieron este sistema de numeración y al darse cuenta de lo mucho que facilitaba los cálculos, lo adoptaron. Luego, los contactos comerciales y culturales de Europa con el mundo árabe propiciaron la difusión de este sistema en la Europa occidental, donde entró en competencia con el sistema de numeración romano. Y lentamente fue ganando adeptos, hasta que recién a finales de 1.700 quedó definitivamente implantado.
Se trata de un sistema posicional (porque el valor de una cifra depende del lugar que ocupa en la escritura del número), de base 10 (porque los agrupamientos son de 10 en 10) y hay diez símbolos.
También es importante aclarar que en este sistema ideado por los indios aparece por primera vez un símbolo para representar la cantidad nula, el vacío, la nada, estamos hablando del… ¡Cero! Cantidad que en los sistemas aditivos no hacía falta representar, pero que en este tipo de sistemas se vuelve indispensable, sobre todo a la hora de realizar cálculos numéricos.

¿Qué reglas tiene el sistema de numeración decimal?

1º) En este sistema se utilizan diez símbolos: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 y 9, que se combinan para formar una determinada cantidad. Al igual que en el sistema romano el número formado se lee de izquierda a derecha. Pero cada símbolo tiene un valor que depende de la posi-

10 https://flipandoconlaeducacion.com/2017/09/04/evolucion-del-sistema-decimal/

ción que ocupa. Por ejemplo, si escribimos 121, el uno de la derecha representa “una unidad”, el dos representa “veinte unidades o dos decenas” y el uno de la izquierda cuenta “cien unidades” o “una centena”. Por esto se dice que este sistema es posicional, porque dependiendo de la posición que ocupan, los símbolos pueden representar, unidades, decenas, centenas, unidades de mil, …etc.
Recordemos las siguientes equivalencias:

1 decena = 10 unidades=10^{1}
1 centena = 100 unidades= 10x10=10^{2}
1 unidad de mil= 1.000 unidades=10x10x10=10^{3}
1 decena de mil= 10.000 unidades=10x10x10x10=10^{4}
1 centena de mil=100.000 unidades=10x10x10x10x10=10^{5}
1 unidad de millón = 1.000.000 de unidades=10x10x10x10x10x10=10^{6}

Y así sigue ...

2º) Como podemos observar cada posición se puede escribir utilizando una potencia de diez. Así, la primera posición de la derecha corresponde a la unidad, la segunda corresponde a las decenas (10^{1}) , la tercera posición a las centenas (10^{2}), la cuarta a la unidad de mil (10^{3}), después vendrán las decenas de mil (10^{4}) y así sucesivamente. Esto nos permite descomponer cualquier número en potencias de base 10.
Veamos un ejemplo escribamos como potencias de base 10 el siguiente numero 3.729

$$3.729 = 3.000 + 700 + 20 + 9$$
$$3.729 = 3 \times 1.000 + 7 \times 100 + 2 \times 10^{1} + 9$$
$$3.729 = 3 \times 10^{3} + 7 \times 10^{2} + 2 \times 10^{1} + 9$$

Ahora inténtelo usted solo. Escriba en potencias de base 10 los siguientes números:

a) 123 b) 1023 c) 98.532 d) 100.234 e) 1.234.423

Lo anterior se puede trasladar a cualquier sistema de numeración posicional. Es decir, dada la base, siempre será posible descomponer un número en potencias de esa base. Esto nos permite entender los agrupamientos y las reglas que rigen un determinado sistema de numeración posicional. Y en algún punto es similar a lo que ocurre con la escritura de las palabras en un idioma y en otro. Para escribirlas se necesita conocer las reglas de formación.
Veamos como podemos utilizar lo anterior a otro sistema de numeración posicional como el sistema maya.

El sistema de numeración Maya

En América central los mayas idearon y utilizaron durante el primer milenio de nuestra era un sistema de numeración posicional vigesimal, esto quiere decir que a diferencia del sistema decimal ellos tenían ¡20 símbolos diferentes! Es probable que lo hubieran desarrollado a partir del conteo de dedos de manos y pies. Por lo tanto, mientras nosotros aprendimos a contar con los dedos de las manos, los mayas contaban con los dedos de las manos y los pies. Y como si esto fuera poco, también tenían un símbolo para representar la cantidad nula.

La importancia de la astronomía y los cálculos de calendario en la sociedad maya requería de matemáticas muy avanzadas. Algunos historiadores sostienen que esta civilización fue la primera cultura en el mundo en conocer la abstracción del cero, alrededor de 400 años antes de nuestra era, anticipándose en seiscientos años a las culturas de la India en este descubrimiento (aunque la datación de los desarrollos es bastante difícil).

Los conocimientos matemáticos que se tienen de la civilización maya, proceden de inscripciones jeroglíficas escritas en las columnas de diferentes monumentos, pinturas encontradas en minas y cuevas, y algunos manuscritos que sobrevivieron a la conquista y destrucción española. De estos últimos podemos mencionar por ejemplo el Codex de Dresde (Figura 1) (Fedriani Martel, et al, 2004)

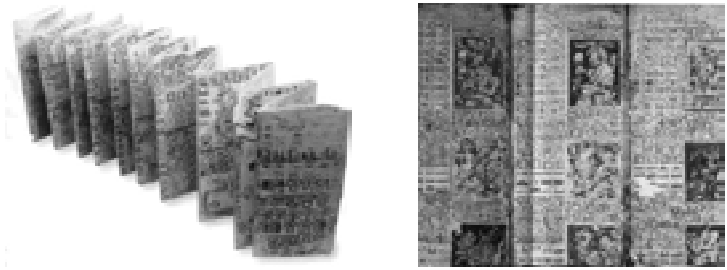


Figura 1: A la izquierda Código de Desdre, a la derecha un fragmento suyo.

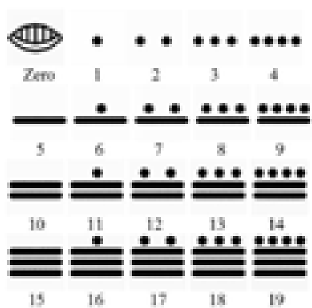
¿Qué símbolos utilizaban los mayas?

- Un Caracol o caparazón para la cantidad nula. 

-Un punto • para el 1 o Unidad.

-Una raya o barra ▬ para el 5.

El resto de los números entre 1 y 19 se obtenían mediante combinaciones de puntos y rayas como se muestra en el cuadro de la derecha.



Para representar cantidades mayores a 19 utilizaban el valor posicional de estos símbolos, agrupando las cantidades de 20 en 20. Es decir que en este caso si queremos escribir en el sistema maya trabajaremos con potencias de base 20.

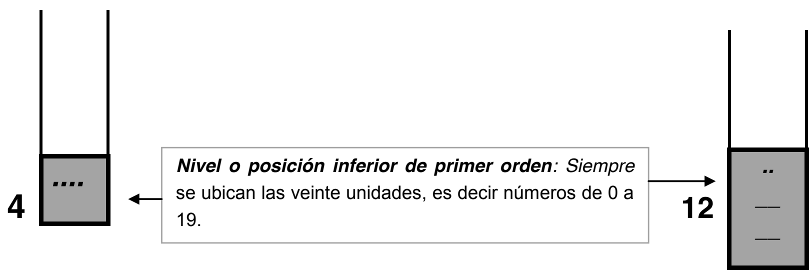
¿Cuáles eran las reglas de escritura en este sistema?

1) Los números en el sistema Maya se solían escribir verticalmente de arriba para abajo, y no de derecha a izquierda como estamos acostumbrados. Por este motivo, la posición en la que se ubica un símbolo, también se le suele llamar nivel.

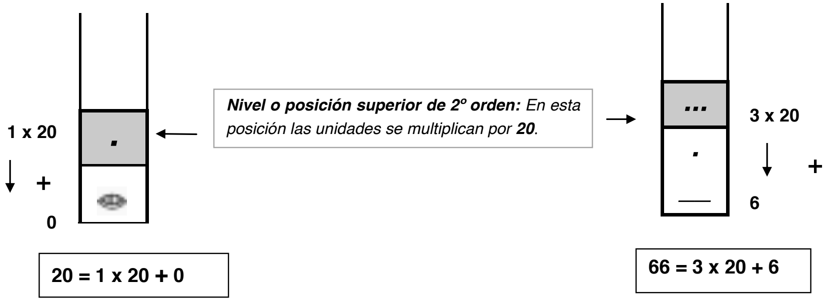
2) El punto se puede escribir como máximo cuatro veces en una misma posición o nivel, cinco puntos se transforman en una barra.

3) La barra se puede escribir como máximo tres veces en una misma posición o nivel, cuatro barras se transforman en un punto en la posición inmediata superior.

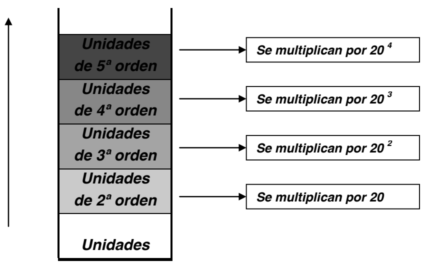
4) En la posición inferior siempre van ubicadas las unidades, que se representan con cualquiera de los 20 símbolos expuestos en el cuadro de arriba. Por ejemplo para representar el número 4 solo hay que dibujar cuatro puntos en el nivel inferior. Y si queremos escribir 12 entonces serian dos barras y dos puntos en ese mismo nivel. Veamos:



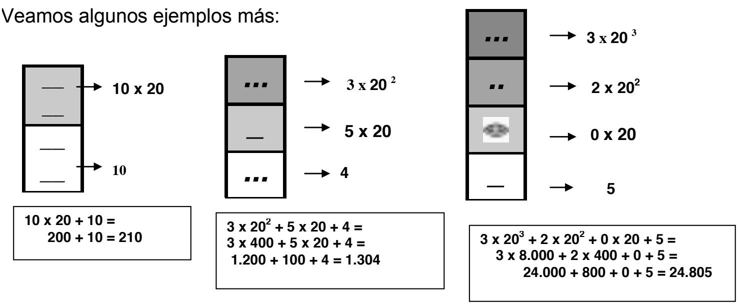
Si la cantidad a representar es igual o mayor a veinte entonces se debe utilizar un nivel superior. Por ejemplo, si queremos representar 20 o 66, entonces no nos alcanza con la posición inferior, y necesitamos trabajar con números del segundo nivel, que denominaremos "unidades de segundo orden". En este nivel las unidades se van a multiplicar por 20. Veamos:



De esta manera en orden ascendente, se escriben las unidades de tercer orden que en ese caso se multiplicarán por (20x20) es decir 20^2. Luego, las de cuarto orden que vienen multiplicadas por 20^3. Luego por 20^4 y así sucesivamente.



Veamos algunos ejemplos más:



En los ejemplos anteriores podemos observar que al sumar las cantidades en cada nivel nos queda determinada la descomposición del número en base 20. Esto es similar a lo que realizamos anteriormente en el sistema decimal. En este caso estamos pasando una cantidad escrita en base 20 a otra en base 10.

Intente escribir las siguientes cantidades en el sistema maya:

a) 25
b) 72
c) 100
d) 400
e) 1.000

5.4 Guía de actividades II "Sistemas posicionales"

Sistema decimal

1) Descomponer los siguientes números utilizando potencias de base 10.

a) 527 =
b) 2.548 =
c) 1.048 =
d) 32.707 =
e) 102.345 =
f) 2.356.321 =
g) 23.432.034 =

2) Las siguientes expresiones son descomposiciones de un número en potencias de base 10. Sin hacer los cálculos, indique que número representa cada una.

a) $7 \times 10^2 + 0 \times 10 + 9 =$
b) $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 =$
c) $6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10 + 8 =$
d) $6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 0 \times 10 + 8 =$
e) $9 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9 =$

3) ¿Qué indica la cifra 0 en cada uno de los siguientes números?

a) 309 b) 4.090 c) 90.300

4) Colocar en cada caso un signo <, > o = cuando haya seguridad, a pesar de que falta una cifra sobre el guión.

a) 5.901 ____ 5.9_6
b) 72_ ____ 799
c) 829 ____ 83_
d) 20.6_4 ____ 20.691

5) ¿Cuántas unidades, decenas, centenas, etc., se pueden quitar o agregar al número de la izquierda para obtener el de la derecha?

a) 120 → 160
b) 540 → 300
c) 999 → 10.000
d) 703.325 → 590.070

6) a) Si el número 7.600 se multiplica por 10, ¿qué modificación sufre el valor relativo de cada cifra? ¿Y si lo multiplicamos por 100? ¿Y por 1.000?

b) En base a lo anterior, explique la siguiente regla: "Multiplicar un número natural por potencias de 10 es agregar ceros a la derecha".

c) Repita lo hecho en a) y b) para el mismo número, pero ahora utilizando la división por 10, por 100 y por 1.000.

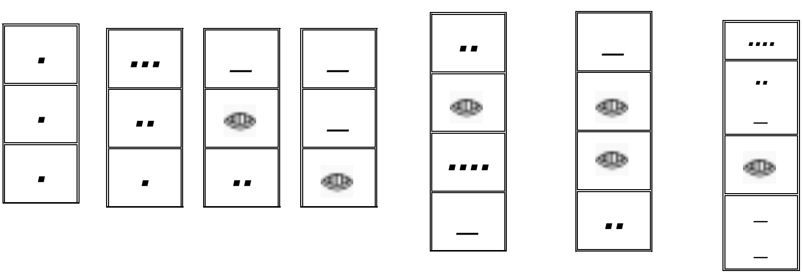
d) Realice las siguientes multiplicaciones y divisiones sin hacer los cálculos:

i) 230 x 10	iii) 931 x 100.000	v) 235:10
ii) 1.235 x 100	iv) 654.321 x 1.000.000	vi) 1.235: 100

Sistema Maya

1) Escriban en el sistema decimal, los siguientes números mayas:

A) B) C) D) E) F)



2) Escribir los siguientes números en el sistema de numeración maya:

12
19
21
25
31
36
40
50
100
399
400
803
5.028
8.000
10.000
12.000
16.00

3) Resolver:

a) ¿Cuántos números de exactamente dos niveles hay en el sistema maya? Justifique su respuesta.
b) ¿Cuál es el menor número decimal que puede representarse utilizando tres niveles en el sistema maya? ¿Y el máximo número? Explicar.

4) Respondan con V (verdadero) o F (falso). En caso de ser falso, proponga un contra ejemplo que refleje este hecho.

a) El sistema de numeración maya es un sistema aditivo para los primeros 19 símbolos y luego se transforma en un sistema posicional.
b) Para representar "un millón" en el sistema maya hay que utilizar unidades de 6º orden.

Trabajando en otras bases

Supongamos que el gobierno de un país, después de varios asesoramientos con reconocidos matemáticos y científicos, decide cambiar la cantidad de símbolos (la base) de su sistema de numeración posicional escrito, que actualmente es igual que el nuestro.
Las opciones que se barajan como mejores son la de utilizar sólo seis símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 o la de utilizar doce símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.

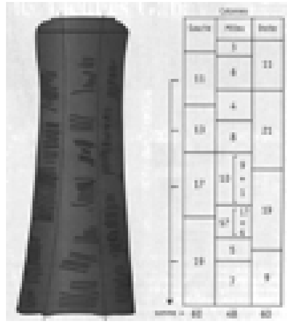
a) Mientras el Parlamento de este gobierno discute la medida, escriban los primeros 25 números en esos nuevos sistemas. ¿Cuál es la base de cada sistema propuesto?

b) ¿Cuál sistema cree usted que le conviene elegir a este país? Fundamente su respuesta.

5.5 Historias, anécdotas y curiosidades

¿Una calculadora de más de 20.000 años?

En 1960 el geólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt descubre en el norte del Congo un Hueso muy particular, hoy conocido como "Hueso de Ishango".
Es un pequeño hueso del peroné de un babuino (mono) con un trozo de cuarzo incrustado en uno de sus extremos. En un principio fue datado en un rango que iba del 6.500 al 9.000 a.C. pero luego se pudo saber que, en realidad, tenía más de ¡20.000 años de antigüedad!
Pero ¿por qué esta pieza era tan interesante? El hueso de Ishango, presenta tres columnas de marcas talladas que abarcaban toda su longitud. Desde el primer momento se descartó su carácter decorativo al ser completamente asimétricas y todos los indicios apuntaban a que era una herramienta de conteo, como un ábaco primitivo, y que el cuarzo del extremo se usaba para grabar o hacer anotaciones.



Aunque en un primer momento se pensó que servía para cálculos simples, como contar a los miembros de una tribu o clan, pronto se descubrió que no. La columna central tiene 48 muescas, pero están agrupadas de manera significativa. Comienza con un grupo de 3 y luego otro de 6 (el doble); sigue un grupo de 4 marcas y otro de 8 (otra vez el doble); y luego aparece un grupo de 10 y otro de 5 (la mitad), para terminar con un grupo de 5 y otro de 7. Desde luego, no parecen fruto del azar o la arbitrariedad y revelan un cierto conocimiento de cálculos complejos, como la multiplicación y la división.

Pero las dos columnas laterales son aún más sorprendentes. En la izquierda, las muescas están agrupadas formando cuatro números, 19, 17, 13 y 11, es decir, todos los números primos comprendidos entre el 10 y el 20. Por su parte, en la columna de la derecha los números representados son el 11 (10+1), el 21 (20+1), el 19 (20-1) y el 9 (10-1). Todas estas marcas representan cantidades que siguen intrigando a los científicos. Y si bien son hipótesis que aún siguen siendo discutidas, el agrupamiento tan particular ha hecho que algunos investigadores vean un entendimiento matemático más allá del simple conteo, barajando la posibilidad de que fuera una especie de calendario lunar para las mujeres de esa época que llevaba la cuenta de sus ciclos menstruales.

No obstante, aun pensando que el hueso fuera un simple mecanismo para llevar las cuentas, representa uno de los primeros pasos hacia la matemática simbólica.

A continuación, proponemos las siguientes consignas:

1) Realice una investigación sobre:

a) Los múltiplos y divisores de un número.
b) Los números primos.
c) Un desafío primitivo: Si un pastor primitivo tuviese que contar 999 cabezas de ganado realizando marcas en una madera ¿Cuántas horas tardaría, suponiendo que hace una marca por segundo?

5.6 Trabajo integrador

1) A partir de lo desarrollado en este capitulo conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las diferencias que existen entre un sistema de numeración aditivo y otro posicional?
b) Nuestro actual sistema de numeración se denomina “decimal”. ¿Cómo se agrupan las cantidades en este sistema de numeración? ¿Por qué es un sistema de numeración posicional?
c) Escriban su fecha de nacimiento en el sistema egipcio y maya. ¿Qué diferencias y similitudes tienen respecto al sistema de numeración decimal? ¿Cuál les parece más eficiente? ¿Por qué?
d) ¿Por qué los egipcios no “necesitaban” el cero? ¿Y por qué los mayas sí lo utilizaron?

2) Investigación: En grupos de 2 o 3 compañeros realicen una búsqueda sobre alguno de los siguientes sistemas de numeración:

Azteca- Inca- Chino – Babilonio - Binario

Luego, respondan:

A) ¿Qué similitudes y diferencias tiene el sistema elegido con respecto al sistema de numeración decimal?
B) Escriban sus fechas de nacimiento (día, mes y año) en el sistema elegido.

3) Un grupo de arqueólogos argentinos descubre en el norte de nuestro país, una cueva con pinturas e insignias muy extrañas que supuestamente pertenecen a una cultura preincaica. Aparentemente las insignias representaban diferentes cantidades escritas en un sistema de numeración posicional que solo usaba cuatro símbolos:

Cero è Uno ç Dos ê y Tres ¼

¿Qué base tiene este sistema de numeración? ¿Cómo escribían los pobladores de esta cultura el número 9? ¿Y el 100? Explique la respuesta.

Capítulo 6 geometría
"Una herramienta para medir longitudes"

"El Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola de sus palabras. Sin ese lenguaje, navegamos en un oscuro laberinto".

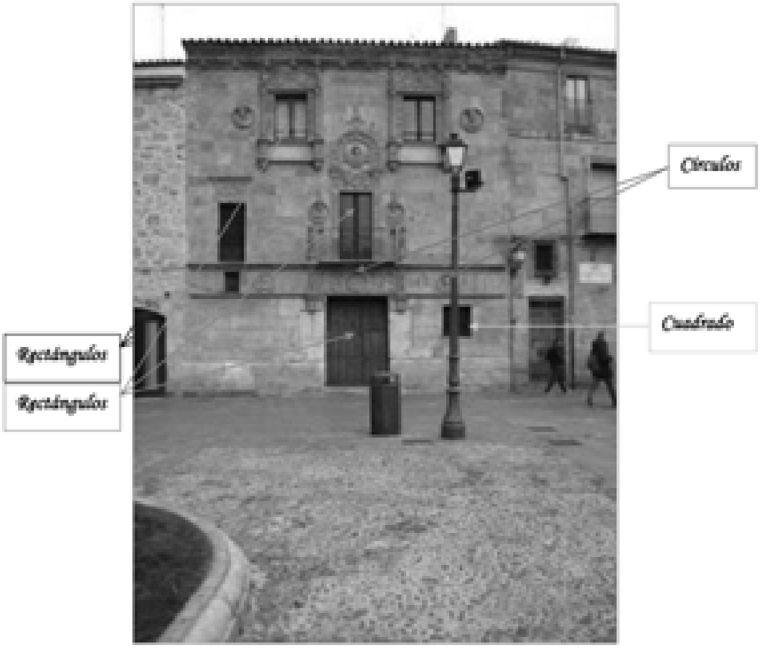
Galileo Galilei (1564-1642)

¿Qué es la geometría?

La geometría surge de una necesidad práctica que tuvo el ser humano para medir longitudes y superficies. Su palabra proviene de los vocablos griegos geō (tierra) y metrein (medir).
El desarrollo de los distintos métodos para conocer la forma y la extensión de los terrenos surgió de las necesidades sociales del antiguo Egipto cuando los campesinos debían pagar sus impuestos según la extensión de las tierras que les quedaban para sembrar luego de que el río Nilo decreciera. Aún hoy, para medir la superficie de una zona irregular primero se debe dividirla en partes más pequeñas. Para lo cual se usan formas más simples, como triángulos y rectángulos. Se trata de armar un rompecabezas cuyas piezas son mucho más fáciles de trabajar.

Reconociendo figuras geométricas

Si observamos atentamente los objetos que nos rodean como edificios, casas, ventanas, puertas, cuadros, carteles, televisores, teléfonos celulares, vasos, ollas y sartenes,... encontraremos en cada uno de ellos una o varias formas geométricas básicas: cuadrados, rectángulos, triángulos o círculos. Por ejemplo, en la imagen siguiente es posible distinguir varios de estos objetos geométricos.



¿Se anima a distinguir más figuras geométricas en la imagen anterior? ¿Qué otras figuras conoce que no aparecen en la imagen? Investigue en libros y páginas de internet la definición y características geométricas que tiene cada figura.

6.1 UN POCO DE TEORIA La medida y el perímetro de una figura

La medida

Medir ha sido unas de las necesidades más importantes a través de la historia de la humanidad. Desde los comienzos, cada pueblo ha tenido una forma explícita de determinar qué tan cerca o tan lejos (distancia, longitud) está un cierto lugar, es decir, han teni-

do una unidad para medir distancias: una unidad de longitud. En los primeros tiempos el cuerpo humano fue la medida más conveniente. Así, los primeros pueblos usaron el ancho de un dedo o de una mano, la longitud de un paso, la longitud del antebrazo, entre otros métodos.
Medir la longitud o extensión de un objeto es comparar lo que queremos medir con una unidad establecida que se toma de referencia. Por lo tanto, medir una longitud es encontrar cuántas veces equivale esa longitud respecto de lo que tomamos como unidad.
Por ejemplo, si queremos medir la altura de una persona, en metros, lo que estamos haciendo es comparar la altura de esa persona con la unidad de medida de 1 metro. Es decir, estamos calculando cuántas veces equivale la altura de esa persona con 1 metro.

¿Cómo surge la unidad de medida?

Desde los albores de la humanidad se vio la necesidad de disponer de un sistema de medidas para los intercambios. Es fácil contar gallinas o cabras, pero no es tan fácil contar granos de trigo o medir el aceite y, así, nacieron las primeras unidades de peso y de capacidad. También, con la aparición de la propiedad de las tierras o la construcción de edificios suntuosos resultó necesario medir longitudes y superficies. Según estudios científicos las unidades de medida empezaron a utilizarse hacia el año 5000 a. C.
Los egipcios tomaron el cuerpo humano como base para las unidades de longitud, tales como: las longitudes de los antebrazos, pies, manos o dedos. El codo, cuya distancia es la que hay desde el codo hasta la punta del dedo mayor de la mano, fue la unidad de longitud más utilizada en la antigüedad, de tal forma que el codo real egipcio es la unidad de longitud normalizada más antigua conocida. El codo fue heredado por griegos y romanos, aunque no coincidían en sus longitudes.
Los intercambios de mercancías podían suponer problemas de convivencia si no había un sistema de medidas aceptado por todos. Por eso, y para facilitar los intercambios los gobernantes intentaban fijar los patrones de las unidades de medida. Pero llegar a un acuerdo no fue sencillo. Hasta el siglo XIX proliferaban distintos sistemas de medición; esto suponía con frecuencia conflictos entre mercaderes,

ciudadanos y los funcionarios del fisco. A medida que se extendía por Europa el intercambio de mercancías, los poderes políticos apreciaron la posibilidad de que se normalizara un sistema de medidas para todo el continente (y América) que por entonces se consideraba “todo el mundo”, que “normalizará” los intercambios del comercio y la industria. Por otro lado ,los científicos necesitaban un sistema, mucho más amplio, que permitiese el intercambio de las experiencias realizadas en cualquier país.
Todo esto derivó en la creación del Sistema Internacional de Medidas que fue implantado como sistema universal por el Tratado del Metro (París, 1875) y confirmado por la primera Conferencia General de Pesas y Medidas (París, 1889). En la actualidad utilizamos como unidad de medida el metro con sus unidades más grandes como el Kilómetro (que equivale a 1.000 metros) o más chicas como el milímetro (que equivale a 0,001 metro). Otras unidades de medidas utilizadas en el sistema métrico internacional son las que aparecen en la siguiente tabla.

Múltiplos				Unidad principal	Submúltiplos		
miriámetro mam 10.000 m	kilómetro km 1.000 m	hectómetro hm 100 m	decámetro dam 10 m	**metro** **m** **1**	decímetro dm 0,1 m	centímetro cm 0,01 m	milímetro mm 0,001 m

En base a la leído le proponemos las siguientes consignas:

1) A lo largo de la historia, ¿qué unidades se utilizaron para medir longitudes? Realice una breve investigación en libros o páginas de Internet.

2) Utilice la tabla de múltiplos y submúltiplos del metro para los siguientes cambios de unidades:

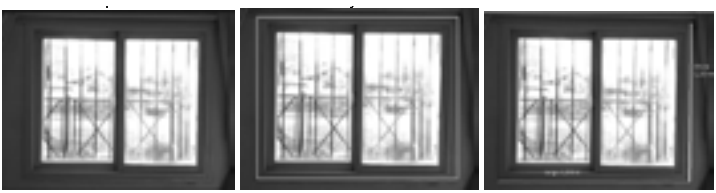
A.- Convierta en kilómetros:
a) 3000 dm
b) 56 Hm
c) 4 569 mm
d) 2,5 Dam
e) 7 895 cm
f) 35 m

B- Convierta en metros
a) 62 Km
b) 85 mm
c) 36 954 Hm
d) 12005 cm
e) 356 Dam
f) 5 687 000 dm

Midiendo perímetros

¿Qué significa calcular el perímetro de una figura?

Tomemos por objeto una ventana como la de la imagen, que puede ser representada por un rectángulo (rojo). Supongamos que deseamos colocar alrededor de esta ventana el contramarco para dar una linda terminación y a su vez decorar.



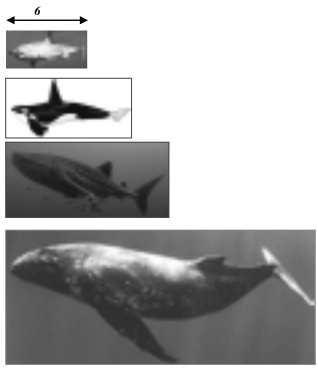
En este caso se mide cada uno de los bordes (altura y largo o ancho), la suma de dichas medidas se denomina Perímetro (P).
En general se denomina Perímetro a la suma del conjunto de líneas que forman el contorno de una superficie o figura geométrica.
Volviendo a nuestro problema inicial, si hacemos los cálculos tenemos:

La altura de la ventana es 120 cm y su largo o ancho es 15 dm. El primer paso es escribir las medidas en la misma unidad: 120 cm = 1,20 mt y 15 dm = 1,50 m.
Ahora sí, para saber la cantidad de metros lineales de contramarco que debemos colocar es necesario sumar todas las medidas:
Perímetro = (1,20 + 1,20 + 1,50 + 1,50) m   Sumar uno a uno cada lado de la ventana
Perímetro = (2 x 1,20 + 2 x 1,50) m
Perímetro = (2,40 + 3) m
Perímetro = 5,40 mts

Por lo tanto, la cantidad total de metros lineales que necesitamos de contramarco es de 5,4 metros.
¿De cuántos centímetros de contramarco estamos hablando? ¿Y si nos piden que midamos en milímetros?

6.2 Guía de Actividades

1) En las siguientes imágenes se muestran cuatro especies de las profundidades marinas: tiburón blanco, orca, tiburón ballena y ballena azul. El tiburón blanco es una especie de pez cartilaginoso que se encuentra en las aguas cálidas y templadas de casi todos los océanos. Una hembra adulta puede llegar a medir 6 m de largo. Utilice las siguientes imagenes a escala, para estimar la longitud de las otras tres especies usando como unidad de medida el largo del tiburón.



2) Resolver:

Pasar 5.230 m a Hm.
Pasar 72 Hm. a m.
Pasar 25 mm a m.
Pasar 4 m a mm.

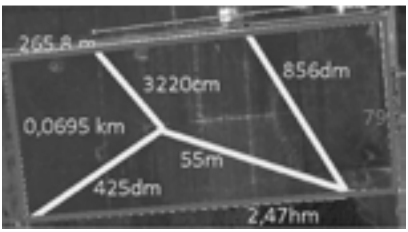
3) En los ejercicios siguientes realizar las sumas que se indican dando el resultado en la unidad indicada:

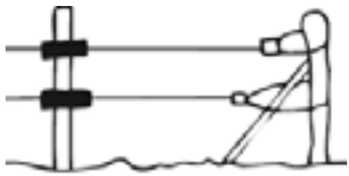
Dar el resultado en metros:
0,35 Km + 2,8 Hm + 14,74 dam + 25,43 m + 537 dm + 284,3 cm =
Dar el resultado en cm:
4,57 m + 0,0235 Km + 123,45 dm =
Dar el resultado en metros
34,6 dam + 0,005 Km. + 12,34 Hm + 2735 cm =

4) Resuelva las siguientes situaciones. Fundamente su respuesta mostrando todos los cálculos necesarios.

a) Elsa quiere armar un cuadrilátero (figura de cuatro lados) con varillas de alambre cuyas medidas son: 17cm, 130 mm, 1,9 dm y 0,015 dam. Indicar cuántos metros de alambre necesita.

b)Pedro junto a otros tres amigos compraron varios lotes, y quieren alambrarlos con dos líneas de alambre según el diagrama de la figura. El alambrado será en dos etapas: primero alambrarán el contorno general y luego las divisiones internas.





Van a utilizar dos líneas de alambre para delimitar los cuatro sectores.
Si el metro de alambre galvanizado cuesta $0,45 ¿Cuál será el gasto al alambrar la primera etapa? ¿Cuál será el gasto total al finalizar ambas etapas?

5) Carla compró un lindo terreno de dimensiones rectangulares. Sabe que el frente mide 8,66 m y un perímetro total es de 98 metros.

a) Indicar las dimensiones de este terreno. Explicar.
b) Hacer un dibujo a escala del terreno. (Indica la escala utilizada).

6) ¡Qué cabello tan bonito tiene Gabriela! Antes era la chica que más largo tenía el pelo de toda la clase: la melena le medía 6 decímetros de longitud. Pero ayer se lo cortó 25 centímetros, así que ahora la chica con el pelo más largo de la clase es María. ¿Cuántos centímetros mide la melena de Gabriela ahora? Expresa el resultado también en milímetros.

7) Un oso al que le encanta la miel quiere sacar miel de una colmena que hay en la rama de un árbol, pero está demasiado alta. Para alcanzarla, se sube en una roca de 12 dm de alto que hay justo debajo y, con las garras muy estiradas, llega justo a tocarla. Si este oso cuando se estira mide exactamente 2,3 m, ¿a qué distancia del suelo estaba exactamente la colmena? Expresa la respuesta en cm y dam.

6.3 Circunferencias y algunas relaciones

Recordemos algunas definiciones en torno al concepto de circunferencia:

-La circunferencia se puede definir como una curva plana y cerrada, donde todos sus puntos están a igual distancia del centro.

-El centro es el punto del que equidistan todos los puntos de la circunferencia.

¿Es lo mismo un círculo y una circunferencia?

A menudo se utiliza indistintamente círculo y circunferencia para nombrar la misma cosa, pero esto no es correcto. Un círculo es una superficie plana limitada por una línea curva (la circunferencia). Cabe destacar que, aunque ambos conceptos están relacionados, no debe confundirse: la circunferencia es la línea curva y el círculo la superficie de la figura.

Diámetro y radio de una circunferencia

El radio de una circunferencia es cualquier segmento que une el centro a cualquier punto de dicha circunferencia.

El diámetro es la línea recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la circunferencia.

Experiencia 1: Relación entre radio y diámetro

Tome una hoja donde pueda dibujar diferentes circunferencias y utilice un compás para seguir los siguientes pasos:

1º) Marque un punto sobre su hoja de trabajo. Y a partir de ese punto dibuja cinco circunferencias de distinto tamaño (radios).
2º) A continuación complete la tabla con los valores de radio y diámetro de cada circunferencia.

Circunferencia	RADIO	DIÁMETRO
A		
B		
C		
D		
E		

¿Qué relación encuentra entre estos dos elementos? Explique.

2) Relación entre diámetro y la longitud de una circunferencia
Para esta experiencia vamos a necesitar los siguientes materiales:
3 latas de distinta medida (ej: lata de durazno, lata de tomate, lata de atún), una regla, un trozo de alambre flexible, hoja de papel, lápiz y un compás. (Actividad grupal).

Procedimiento:

Elija una de las latas, marque lo más exacto posible el centro de la circunferencia (imagen 1).

1) Con el alambre flexible tome la medida del diámetro (imagen 2), y córtelo lo más preciso posible (imagen 3).

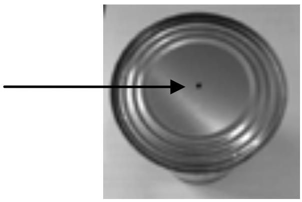


imagen 1 *imagen 2* *imagen 3*

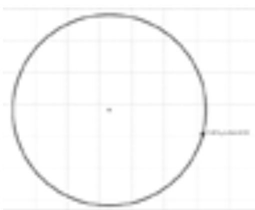
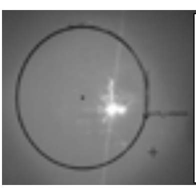


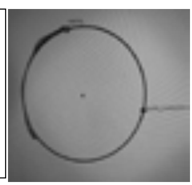
imagen 4

Ahora apoye el compás en el centro de la circunferencia, abra el compas hasta medir el radio de la circunferencia y dibuje en la hoja la circunferencia con ese radio.

A continuación marque un punto cualquiera sobre la circunferencia (imagen 4). A partir de ese punto ubique la porcion de alambre que cortó en el paso anterior sobre la la circunferencia (imagen 5). Recuerde que esta porción de alambre es el diámetro de la circunferencia.



El diámetro ocupa una porción de la circunferencia (imagen izquierda), Realice una marca en el extremo hasta donde llegó el diámetro, y a continuación vuelve a ubicarlo a partir de la nueva marca 1 (imagen derecha)



Repita la operación tantas veces como sea necesario hasta llegar al punto inicial. Responda: ¿cuántas veces entró el diámetro en la circunferencia?

Repita el procedimiento con las otras dos latas y escribe los resultados en la siguiente tabla. Comparta con el resto de la clase los resultados obtenidos en la ultima columna.

Lata	DIÁMETRO en cm	Cantidad de veces que entra el diámetro
A		
B		
C		

¿Cuántas veces entra el diámetro en cada circunferencia? ¿A que valor numérico se aproxima esta relación?

Longitud o perímetro de una circunferencia

En la experiencia 2 verificamos la relación que existe entre perímetro o longitud de una circunferencia y su diámetro. Seguramente habrá observado que la cantidad de veces que entra el diámetro en la circunferencia es "tres veces y un pedacito más". Este valor es una constante que se conoce como π (pronunciado «pi»), y su valor se encuentra próximo a 355/113 ó 3,14159...
Esto quiere decir que la longitud de la circunferencia siempre es "tres veces y fracción" el diámetro de dicha circunferencia. Entonces para calcular la longitud o el perímetro de cualquier circunferencia tan solo hay que multiplicar su diámetro por la constante π.

Perímetro de una Circunferencia = π × Diámetro

Como el diámetro es igual a dos veces el radio. También puede expresarse de esta forma:

Perimetro de una Circunferencia = π × 2 × radio

¿Cuál es el valor exacto de la constante π?

El valor de π se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia. Se lo considera una de las constantes matemáticas más importantes y resulta indispensable para la matemática, la física y la ingeniería. Con el tiempo, los matematicos demostraron que π tenía infinitos decimales no periódicos. Por ejemplo, sus primeros veinte decimales son 3,14159265358979323846... ¡Pero le siguen muchos, muchos más, tantos que no se pueden contar!
El valor más antiguo que se conoce es 3,1605 y aparece escrito en el "Papiro de Ahmes", encontrado en Egipto y datado en el año 1900 antes de Cristo. A lo largo de los siglos este número se ha ido calculando cada vez con mayor numero de decimales correctos. En el año 263 de nuestra era, el chino Liu Hui calculó su valor como 3,14159 (un error de menos de 1 en un millón). En el año 1400, el matemático indio Madhava calculó 3,14159265359. El récord actual es de 2.576.980.370.000 de decimales, y lo calculó Daisuke Takahashi en una supercomputadora T2K Tsukuba System..

3) Calculando el perímetro de las latas.

1. Completar la tabla con los datos de las mediciones tomadas en la experiencia 2. Calcular en cada caso el perímetro de la circunferencia con los dos métodos que se proponen en la tabla:

Lata	DIÁMETRO E n cm	Longitud Sumando las veces que entró el diámetro (Medir el último pedacito)	Longitud Multiplicando PI x diámetro (π x d) (usar pi=3,1 y pi=3,14)
A (de tomate)	7,5 cm	7,5 + 7,5 + 7,5 + 0,8 = 23,3cm	a) 7,5 cm x 3,1= 23,25 cm b) 7,5 cm x 3,14= 23,55 cm
B ( )			a) b)
C ( )			a) b)

2. Comparar los resultados obtenidos por ambos métodos.

4) Diseñando una etiqueta para las latas.

Dibujar tres rectángulos cuya altura sea siempre 1 cm y cuyo largo sea la longitud hallada en la tabla para cada una de las latas.
Recortarlo y envolver con esa tira la lata correspondiente.
Si tuviera que diseñar una etiqueta que cubra totalmente cada lata, ¿qué dimensiones tendría en cada caso?

Algunos ejercicios más:

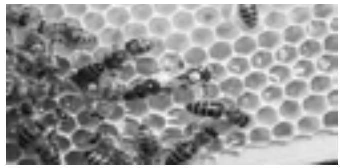
¡Cuál es el perímetro de una circunferencia que tiene 8 m de diámetro?
¿Cuál es el perímetro de una circunferencia que tiene 10 cm de radio?
El perímetro de una circunferencia es 12,56 km. ¿Cuánto mide su diámetro?
El perímetro de una circunferencia es 31,4 m. ¿Cuánto mide su radio?
A la pista de un circo que tiene forma circular hay que ponerle lona alrededor. Si su radio mide 5 metros, ¿cuántos metros de lona se necesita?

6.4 GEOMETRÍA EN LA NATURALEZA

Observa la naturaleza de tu entorno, plantas y flores también animales e insectos…y descubrirás formas geométricas. Solo el ser humano es capaz de recrear un camino recorrido en una figura geométrica. En este momento estás sentado leyendo este libro, quédate sentado, no te levantes, pero levanta tu mirada y elige dos lugares alejados del sitio en que estás. Ahora imagina que desde tu silla caminas siempre en línea recta hasta uno de esos lugares. A continuación, te diriges al siguiente lugar y regresas a tu silla. Si sientes la necesidad de caminar: hazlo.
¿Qué forma tiene el camino recorrido?
Tomate dos minutos para pensar tu respuesta y si no estás seguro de haber entendido, relee. Antes de seguir contesta sin que nadie más te diga la respuesta.

Ahora sí, continúa.
No importa cuántas veces cambies los lugares elegidos…siempre responderás que se trata de un triángulo.

Imitando a la naturaleza

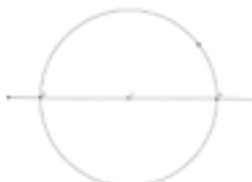


La Naturaleza nos ofrece un sinfín de formas. Algunas podemos recrearlas de manera sencilla, como por ejemplo la celda de una colmena de abeja. Observa la imagen. En cada una de las celdas puedes distinguir seis puntos unidos por la cera que forman los bordes. A esta figura la llamamos hexágono regular pues todos sus lados (bordes) miden igual. Para poder repetir la forma en una hoja necesitamos de una regla y un compás.

Comencemos:

Traza una línea recta con ayuda de la regla.

Marca sobre esa línea un punto, apoya el compás en dicho punto y realiza una circunferencia de radio 6cm.

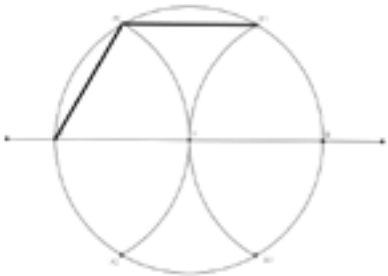


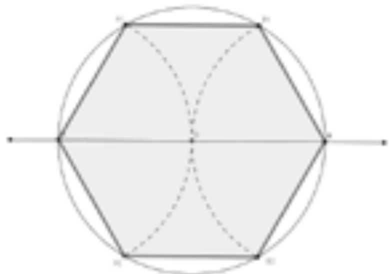
Al dibujar la circunferencia se encuentra con la línea en dos puntos diferentes: A y B

Con la misma medida del compás, ahora apoya el mismo en el punto A, y traza un arco que intersecte a la circunferencia en dos nuevos puntos A_1 - A_2.

Repite el procedimiento desde el punto B. Tendrás otros dos nuevos puntos.

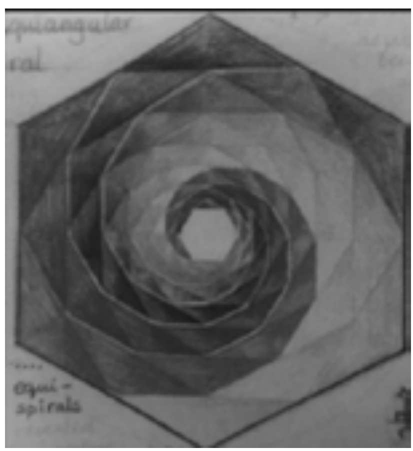
Sobre la circunferencia hay 6 puntos, los mismos que observaste en la celda de las abejas, ahora al unirlos queda formado el hexágono como la celda que construyó la abeja. ¿Puedes buscar en la naturaleza esta forma?





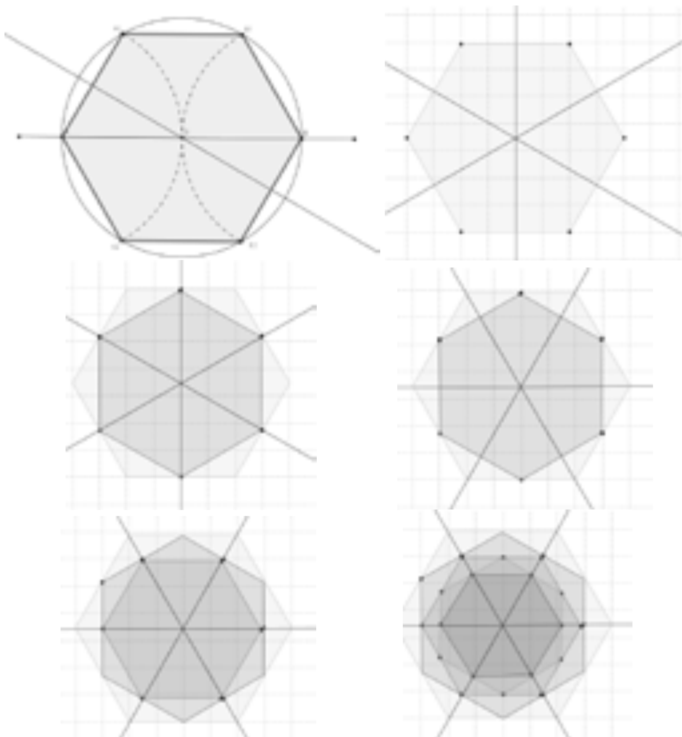
Creando espirales

Al dibujar hemos usado conocimientos como punto, lado, intersección, recta, segmento, etc. A partir del hexágono anterior podemos crear algo nuevo. Por ejemplo, podríamos pensar en formas espiraladas.



Para lograrlo es necesario utilizar otro elemento geométrico: la mediatriz de un segmento. La mediatriz permite encontrar el punto medio de un segmento. En este caso será el punto medio de cada lado del hexágono regular. (Ver las siguientes figuras).

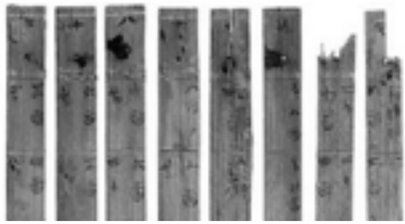
Los nuevos puntos de cada lado del primer hexágono serán los vértices de uno más pequeño. Y al unir los puntos medios del nuevo hexágono, surgirá otro más pequeño.



Para crear los espirales hay que pintar los triángulos que se forman entre los hexágonos. Como en el modelo de la derecha. Luego cambia de color para la siguiente secuencia de triángulos.

6.5 Historias, anécdotas y curiosidades

Multiplicando con rectas ¿Se puede multiplicar sin saber las tablas?



Este método de multiplicar fue utilizado en China hace cientos de años. Bajo la capa de lodo que cubría unas antiguas tiras de bambú, historiadores chinos afirman que lograron encontrar y reconstruir la tabla de multiplicar de base decimal más antigua del mundo.

Investigadores de la Universidad de Tsinghua en Pekín utilizaron la técnica de datación por carbono y llegaron a la conclusión de que las tiras son del año 305 a.C., aproximadamente, tal como reporta Jane Qiu en un artículo publicado en la revista especializada Nature. Esa fecha corresponde al periodo de los Reinos Combatientes, que comenzó en el siglo V a.C. y finalizó con la unificación de China por la dinastía Qin en el 221 a.C.

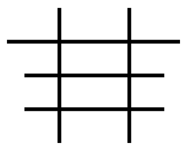
Los científicos identificaron los números escritos en 21 de estas tiras pertenecientes a una colección de viejos fragmentos de bambú con inscripciones en antigua caligrafía china.
Fotos cortesía del Centro de Investigación y Conservación de Textos Excavados de la Universidad de Tsinghua en Pekín.
“Fue como armar un enorme rompecabezas”, contó Li Junming, paleógrafo e historiador.
Feng Lisheng, experto en historia de las matemáticas, explicó a Nature que cuando las tiras se ordenan de forma apropiada forman la estructura de la tabla. El renglón más alto y la última columna a la derecha contienen, ordenados de derecha a izquierda y de arriba abajo respectivamente, los mismos 19 números: 0,5; los números enteros del 1 al 9; y múltiplos de 10 hasta 90.

“Es, efectivamente, una calculadora antigua”, dijo Li, con la que se pueden realizar complejos cálculos.

Los responsables de la investigación creen que la tabla era utilizada para calcular la superficie de terrenos y campos de cultivos y la cantidad de impuestos que los pobladores debían pagar. Veamos algunos ejemplos concretos:

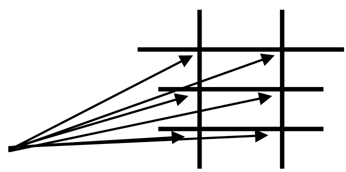
Ejemplo 1: Multipliquemos 2 x 3 = 6.

-Para el primer número se trazan 3 rectas Paralelas horizontales, y para el segundo 2 rectas perpendiculares, a las anteriores. Entonces queda la siguiente figura:



-Luego al contar la cantidad de puntos que hay en todas las intersecciones

Se obtienen 6 puntos,
es decir 2 x 3= 6



-Prueben ahora haciendo lo mismo para

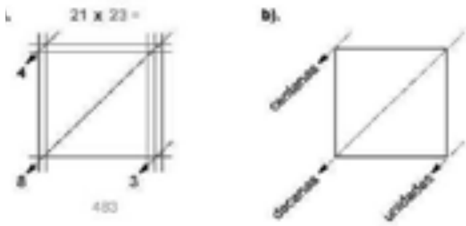
3x4;5x6;6X7;8x9;9x9

Observemos que a medida que aumentan los números a multiplicar, la cantidad de rectas aumentan y se hace cada vez más difícil trazarlas y contar los puntos y sus intersecciones.

¿Qué sucede si queremos multiplicar números de dos dígitos?

Primer ejemplo: 21 × 23 = 483

1. Para el primer factor (el 21) se trazan líneas horizontales (en azul en la figura), dos y una, respectivamente, para las decenas (líneas de arriba) y las unidades (Una línea de abajo).



2. Para el segundo factor (el 23) se trazan cinco líneas verticales (en rojo en la misma figura), dos para las decenas (líneas de la izquierda) y tres para las unidades (líneas de la derecha).

3. Se cuentan los puntos de intersección de las líneas en cada zona y se suman diagonalmente siguiendo la flecha punteada, que tiene una inclinación de 45° con respecto a la horizontal.

4. De derecha a izquierda, el primer número corresponderá a las unidades, el segundo a las decenas y el tercero a las centenas (figura b).

Segundo ejemplo: 40 × 12 = 480

5. En los casos en los que una o ambas cantidades contengan un cero, se traza una línea punteada y el número de intersecciones se considera cero (Figura 1 c). El resto del procedimiento es igual a como se mencionó en los pasos 1 a 4.

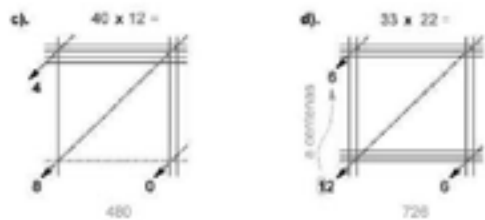


Figura 1. Procedimiento para la multiplicación de dos cantidades mediante líneas. En a, c y d se ejemplifican tres casos diferentes.

Tercer ejemplo: 33 × 22 = 726

6. En los casos en los que la suma de las intersecciones supere un decimal, el nuevo decimal se sumará al orden de magnitud siguiente; es decir, a las decenas o a las centenas, etc., según corresponda (Figura 1d). Por ejemplo, de las 12 decenas de la figura 1d se usará su equivalente: 1 centena y 2 decenas.
Las decenas se mantienen y la centena se suma a las 6 centenas del resultado inicial, para dar un total de 7 centenas.
¡Ahora manos a la obra! Intente resolver las siguientes multiplicaciones usando el método de rectas:

a) 12x6 **b) 20x13** **c) 17x32** **d) 41x23** **e) 52x25**

Explicar cómo funciona este método para las siguientes multiplicaciones:

a) 100x10 **b) 123x41** **c) 213 x 321**

6.6 TRABAJO INTEGRADOR

Actividad 1 Grupal

1) Calculen el perímetro de dos aulas y pasillo (o patio o algún otro espacio de la escuela) utilizando:

a) Sus pies.
b) Los codos.
c) Una regla graduada en centímetros.
d) una cinta métrica o metro de carpintero. Armen una tabla y en cada caso escriban el resultado en mm, cm y en metros.

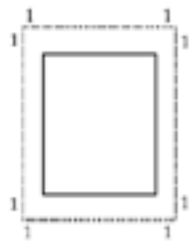
2) ¿Con qué herramienta creen que tendrán mayor exactitud? ¿Por qué?
3) Utilicen alguna de las herramientas anteriores para medir el perímetro de la o las mesas de trabajo y el pizarrón (o algún otro mueble). ¿Qué superficie ocupa cada uno?

4) Con las medidas tomadas realicen un plano en escala (en planta) de tres sectores de la escuela.

Actividad 2: Pistas de carrera

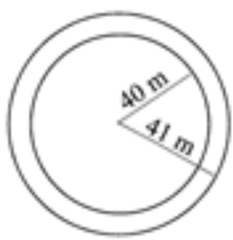
1) La siguiente imagen muestra una pista de carreras de bicicleta (Velódromo) en forma de circular. Si el diámetro de la pista es de 75 metros. ¿Cuántos kilómetros recorre un ciclista que da 30 vueltas durante la carrera?

2) Dos corredores corren una carrera por dos pistas cuadradas una mayor que la otra, cada una con dos líneas de recorrido separadas por 1 m de distancia (ver figura).



a) ¿Qué ventaja deberá llevar el corredor de la línea exterior?
b) ¿Cuál sería la ventaja si las pistas son más grandes pero mantienen la separación de 1 metro de distancia?
c) ¿A qué conclusión arribás?

3) Ahora si las dos pistas son circulares y concéntricas de radios 40 m y 41 m respectivamente (de modo que el corredor de la pista interior la recorre completa).



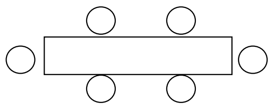
a) ¿Cuánta ventaja ha de dársele al corredor de la pista exterior para que ambos participantes recorran igual distancia?
b) ¿La ventaja dependerá de la distancia que media entre las pistas o del radio de los círculos? Prueba tu resultado manteniendo la misma distancia y dando diversos valores a los radios.

Capítulo 7
LETRAS PARA CONTAR

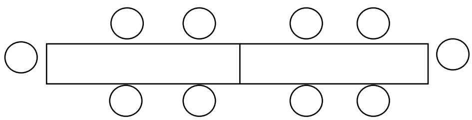
“Qué ves, qué ves cuando me ves“
Divididos[11]

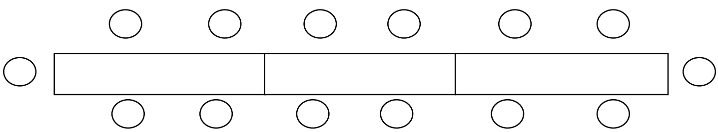
La gran celebración

Cada año, en un pueblo se realiza una gran celebración a la que asisten todos los habitantes. Para la cena se disponen de mesas en las que se pueden sentar 6 personas:



A medida que van llegando más personas, se agregan mesas una seguida de la otra y se disponen las sillas como se muestra a continuación:





Intente resolver las siguientes cuestiones:

1) ¿Cuántas personas se pueden sentar si hay 7 mesas? ¿Y si hay 15? ¿Y si tenemos 102 mesas?
2) ¿Se podrá encontrar alguna relación que permita contar la cantidad de personas de acuerdo al número de mesas? ¿Si es posible, cómo la utilizaría para contar el número de persona para cualquier número de mesas? Explicar.
3) ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten 102 personas? ¿Y para 300? Indicar en cada caso, si se utiliza la totalidad de sillas o si quedan espacios vacíos. Explicar.

11 Banda de rock Nacional Argentina

7.1 Álgebra y sus orígenes

Corría la edad de oro del mundo musulmán que, del año 700 al 1200, se extendió desde la India a hacia España. En esas épocas, la cultura árabe ganaba lugar como el lenguaje internacional de las matemáticas, y los matemáticos árabes dominaron las matemáticas griegas y divulgaron los conocimientos matemáticos de la India, permitiendo así grandes avances en la trigonometría y en el álgebra.

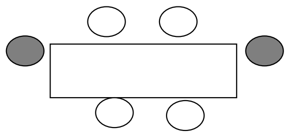
Un matemático de esa época es reconocido como el padre del algebra: Mohammed ibn Musa Al-Kahwarizmi. Sabemos muy poco sobre su vida. Se puede decir que vivió durante la segunda mitad del siglo IX y que trabajó en la biblioteca del califa Al-Mahmum en Bagdad. Musa Al-Kahwarizmi escribió sobre astronomía, matemáticas y geografía. Algunos de sus libros marcaron la historia de las ciencias. De ellos provienen las palabras algoritmo y álgebra.

Musa Al-Kahwarizmi difundió el sistema decimal de numeración y el uso del cero, que originalmente provenían de la India. El mundo árabe nos transmitió el sistema de numeración en base 10 que nosotros utilizamos.

En uno de sus libros, Al-jabrwa'lmuqäbala, aparece la palabra ál-jabr´de la cual deriva la palabra "álgebra". Ál-jabr´significa restauración del equilibrio mediante la trasposición de términos de una ecuación.

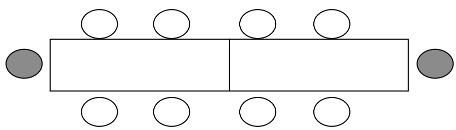
Propuesta para responder al problema de las mesas

En el problema de las mesas sabemos que para la primera mesa tenemos seis personas que se sientan de la siguiente forma; 4 personas enfrentadas y 2 ubicadas en cada una de las cabeceras de la mesa, como se muestra en la figura:



La cantidad de personas en este caso es 4 +2= 6, seis personas.

Si agregamos una mesa resulta que:

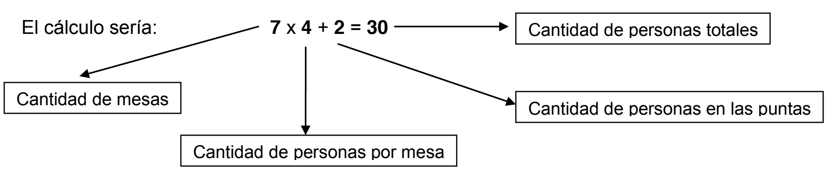


La cantidad de personas en este caso es 8+2 = 10, diez personas.

Podemos ver que al sumar mesas agregándolas una a otra a continuación en fila, en cada una pueden sentarse 4 personas, además de otras 2 que se ubican siempre en las cabeceras de la mesa.

Pensemos el punto (1)

Si tenemos 7 mesas colocadas en filas, entonces pueden sentarse 30 personas. Ya que por cada mesa colocada en fila se pueden sentar 4 personas, más 2 personas en cada punta de la fila de mesas.



-Si tenemos 15 mesas, con el mismo razonamiento anterior, podemos calcular la cantidad de personas. El cálculo sería 15 x 4+2= 62 personas.

-Si tenemos 102 mesas, resulta que la cantidad de personas es 102 x 4 +2 = 410 personas.

Observación: Un estudiante podría realizar el dibujo para las 7 mesas y contar. Es claro que llegaría al mismo resultado; tal vez para la siguiente pregunta dibujaría las 15 mesas, y si es muy valiente las 102. Pero se puede ver que no es el mejor camino que podemos seguir.

1.2 UN POCO DE TEORÍA
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las expresiones algebraicas son a aquellas formadas por letras y eventualmente, números combinados con operaciones matemáticas: suma, resta, multiplicación, división, etc.

Ejemplos de algunas expresiones algebraicas:

i) $x+4$ ii) $3.n+5$ iii) $½ .m+½ .m^2$ iv) $2.m.y.z$ v) $3.x+2.y$

Estos son algunos ejemplos donde se ven distintos tipos de expresiones algebraicas. Hay expresiones algebraicas que tienen una sola letra, con dos letras, con tres, con exponente elevado a la dos, a la tres, etc.
En la expresión algebraica, la letra se utiliza para denotar un valor numérico que puede variar. Se pude decir que la letra es una variable literal.

Por ejemplo, para la expresión x + 4 podemos ir variando la letra x y obtener distintos resultados como se muestra a continuación:

Si x =1, entonces 1+4 =5
Si x =2, entonces 2+ 4 =6
Si x=1000, entonces 1.000 + 4 = 1.004

Podemos seguir variando el valor que toma x. Así, obtenemos distintos resultados.

Observación: De acuerdo al problema que se quiera resolver y al tipo de expresión algebraica, la variable literal puede tomar valores de un determinado conjunto numérico[12].

Volvamos al problema inicial de " La Gran Celebración".

Pensemos el punto (2)

En el problema de "La Gran Celebración" con el que iniciamos este capítulo, podemos hallar una expresión algebraica que nos cuente el número de personas sentadas, de acuerdo a la cantidad de mesas utilizadas en la celebración.

Para esto, recurrimos a utilizar una letra que represente el número de mesas a utilizar. Podemos considerar la letra m de mesa, entonces definimos:

m = número de mesas

Como utilizaremos al menos una mesa para celebrar y no vamos a cortar una mesa para que entre alguien más (es decir, las mesas a utilizar son iguales), entonces podemos decir que m es un número Natural.

Por otro lado vimos que para calcular el número de personas sentadas, existía un patrón a seguir, es decir, se multiplicaba la cantidad de mesas por 4 y luego se sumaba 2. Entonces la expresión algebraica queda determinada de la siguiente forma:

m.4+2

12 *Ejemplos de conjuntos numéricos: Naturales, Enteros, Racionales, Reales, etc.*

Esta expresión algebraica, cuenta la cantidad de personas sentadas de acuerdo al número de mesas a utilizar.

Si m=4, entonces la cantidad de personas sentadas es 4.4 + 2 =18

Si m=5, entonces la cantidad de personas sentadas es 5.4 + 2 =22

Si m=20, entonces la cantidad de personas sentadas es 20.4 +2 =82

…Y así para cualquier valor natural m.

De esta manera obtuvimos una expresión algebraica útil para resolver el punto (1) del problema. Para cualquier valor de la variable m encontramos la cantidad de personas sentadas.

Observación: Algo a tener en cuenta es que la cantidad de sillas es un número par y si no quedan sillas vacías en la celebración, entonces tenemos un número par de invitados.

Pensemos el punto (3)

En este caso necesitamos contar el número de mesas para una determinada cantidad de personas.
Si queremos que se sienten 102 personas en las mesas ubicadas en filas, podemos aprovechar algunas cuentas realizadas antes, en el punto 1.

Para 7 mesas teníamos que: 7. 4 +2=30 personas sentadas
Para 15 mesas teníamos que: 15.4+2=62 personas sentadas

Luego podemos ir probando números de mesas “al tanteo”, hasta llegar al total de 102 personas sentadas. En este caso pensamos qué número de mesas multiplicado por 4 y luego sumado 2, da por resultado 102.

Probando vemos que si tenemos 25 mesas resulta que:

25.4+2=102 personas sentadas

Por otro lado si queremos que se sienten 300 personas, tenemos que pensar que número de mesas multiplicado por 4 más y luego sumado 2 da por resultado 300.

Si utilizamos el tanteo, resulta que:

Si tenemos 75 mesas: 75.4+2=302
Si tenemos 74 mesas: 74.4+2=298

Pero si queremos que se sienten 300 personas, vemos que en este caso, si utilizamos 74 mesas, entonces 2 personas quedan paradas y si utilizamos 75 mesas, entonces nos sobran dos sillas. Como no vamos a dejar a nadie sin su asiento, entonces para las 300 personas utilizamos 75 mesas y sobran 2 sillas sin usar.

Observación: En ocasiones este trabajo de ir probando al tanteo no resulta una buena idea, pues depende de la cantidad de operaciones y condiciones del problema.

Por otro lado, en el **punto (2)** obtuvimos la expresión algebraica **2.m+4** que cuenta la cantidad de personas sentadas de acuerdo con el número **m** de mesas. Si queremos utilizar esta expresión para resolver el **punto (3),** nos encontramos con un concepto nuevo, el de ecuación.

1.3 Algo más de teoría
Las ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas o una igualdad entre una expresión algebraica y un número. Algunos ejemplos de ecuaciones son los siguientes:

i) $5.x-6=9$ **ii)** $m.3+1=13-m$ **iii)** $x^2-4=0$
iv) $4.x+2=3x+y$ **v)** $x^2+y^2=4$ **vi)** $x^2+y^2+z^2=25$

En los ejemplos vemos diferentes tipos de ecuaciones. Las ecuaciones i) y ii) son ecuaciones de primer grado con una incógnita. La ecuación del ejemplo iii) tiene una incógnita pero es de grado 2, pues la variable aparece elevada con exponente 2. Las ecuaciones de los ejemplos iv) y v) son ecuaciones de dos variables, una de grado 1 y la otra de grado 2 respectivamente. Por último la ecuación vi) es una ecuación de 3 incógnitas y de grado 2.

En los ejemplos, las letras representan valores numéricos que en un principio son desconocidos, pero de encontrarse verifican la igualdad.

Las ecuaciones tienen dos miembros separados por la igualdad. De un lado de la igualdad está el primer miembro y del otro el segundo, como vemos a continuación en el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{2.\ x+1}_{1^{\circ}\text{ Miembro}} = \underbrace{7}_{2^{\circ}\text{ Miembro}}$$

En este caso la igualdad quiere decir que, $2.x+1$ es igual a 7.

Una pregunta que nos podemos hacer es ¿cuál es el valor de x?

Para responderla debemos pensar que x es un valor numérico, que en un principio es desconocido. Pero sabemos que el resultado de multiplicar dicho valor x por 2 y sumarle 1 tiene que ser igual a 7. Es claro que el valor de x tiene que ser 3, pues si $x=3$ entonces $2.3+1=7$.

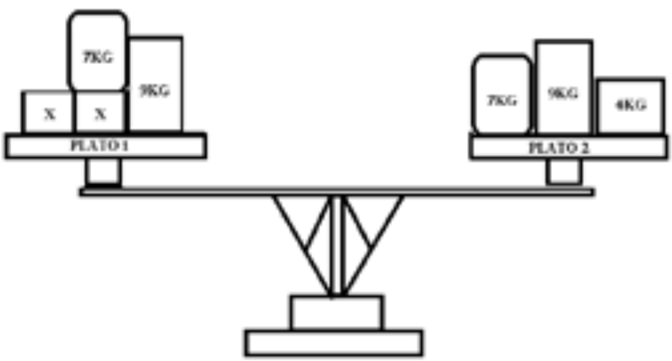
Como resolver una ecuación

En las ecuaciones podemos decir que las expresiones algebraicas están en equilibrio, pues ambos miembros de la ecuación deben ser equivalentes o iguales.
Resolver una ecuación es hallar, si es posible, el valor o valores de la variable desconocida, dichos valores los vamos a llamar conjunto solución y a un valor que cumple la igualdad lo llamaremos solución de la ecuación.
Por lo general se utiliza la letra x para representar el valor desconocido o incógnita a encontrar.

A continuación se presenta un método de resolución de ecuaciones basado en el estado de equilibrio de la igualdad.

La balanza y la resolución de ecuaciones

Supongamos que tenemos la siguiente balanza en equilibrio:



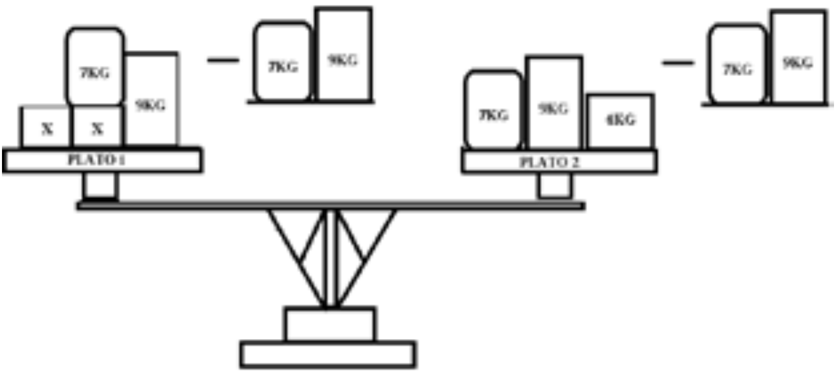
Que la balanza está en estado de equilibrio, quiere decir que en ambos platos de la balanza hay la misma cantidad de kilogramos. Nuestro objetivo es saber cuánto deben valer cada una de las pesas indicadas con la letra **x** para que se mantenga el estado de equilibrio de la balanza. Para esto deberíamos calcular cuántos kilogramos hay en cada plato. En el plato 1, si sumamos los kg de las pesas obtenemos 7kg+9kg+x+x entonces, resulta que hay 16kg+2.x en el primer plato. En el plato 2, tenemos que sumar las pesas

7kg+9kg+4kg entonces, resulta que hay 20kg en el. Por lo tanto, en el plato 1 debe haber 20kg también, pues la balanza está en equilibrio. Pero ¿cuánto vale x? como dijimos y repetimos, la balanza esta en equilibrio, entonces debe valer que:

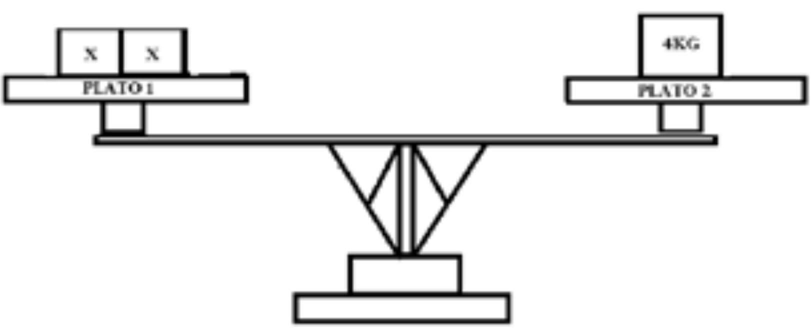
$$2.x+16kg=20kg$$

Así obtuvimos una ecuación de incógnita x.

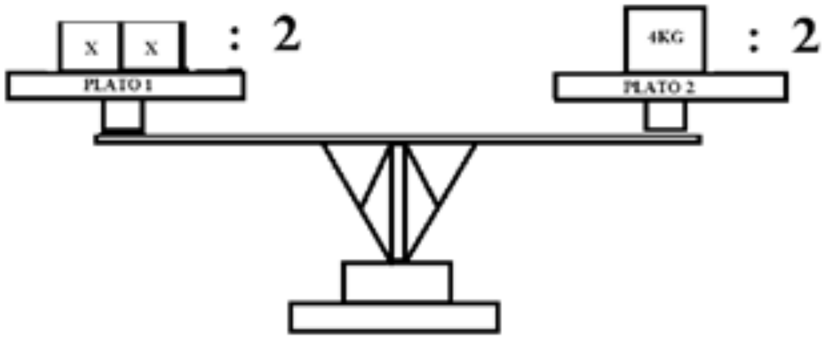
Siguiendo la idea de la balanza, queremos hallar el valor de x, podemos ir sacando pesas de ambos platos hasta dejar las pesas con valor x. La forma de sacar pesas es sustrayendo la misma cantidad de kilogramos en ambos platos, es decir restando en ambos platos la misma cantidad de kg para no alterar el equilibrio.



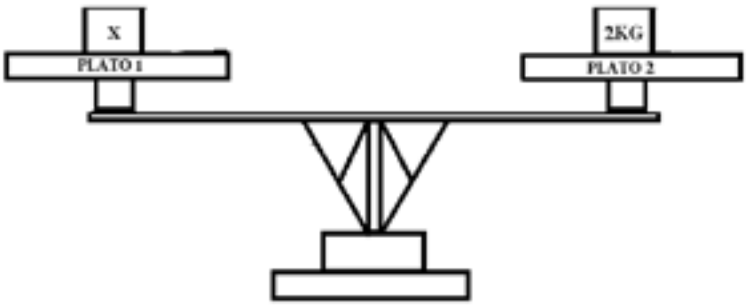
De la resta se obtiene que:



Entonces resolver una ecuación es hallar el valor de la variable desconocida o incógnita, en nuestro caso es x = 2



Finalmente se obtiene que:



Por lo tanto x=2

Podemos decir que en las ecuaciones que las expresiones algebraicas están en equilibrio, y que resolver una ecuación es simplificar dichas expresiones mediante la cancelación de términos semejantes a cada lado de la ecuación. Hasta hallar, si es posible, el valor de la variable desconocida o incógnita.

Pero si nos detenemos a pensar en la ecuación y en la situación de la balanza, notamos que si realizamos una operación matemática en un lado de la ecuación, en el otro debe realizarse la misma operación para la conservación del equilibrio. De esta manera podemos encontrar el valor o los valores de x que satisfacen la igualdad.

Para resolver una ecuación del problema de la balanza, 2.x+16kg=20kg uno puede chequear por tanteo a ojo qué valor de x cumple con la condición de que al multiplicarlo por 2 y luego sumarle 16 da igual 20.
Pero si uno no se da cuenta al tanteo de la solución, o si la ecuación es muy compleja, puede intentar despejar el valor de la incógnita teniendo en cuenta el equilibrio de la ecuación. Como vemos a continuación:
Queremos resolver la ecuación del problema de la balanza: 2.x+16kg=20kg. (Para no dificultar la lectura, vamos a omitir los kg).

$$2.x+16=20$$

En el próximo paso se resta 16 en los dos lados.

$$2.x+16-16=20-16$$
$$2.x=4$$

Por último dividimos por 2 a ambos lados de la igualdad

$$2.x:2=4:2$$

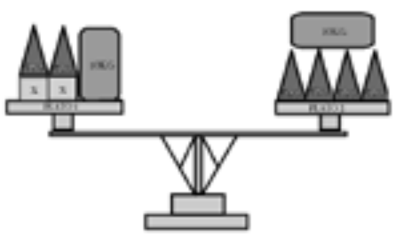
$$x=2$$

Conclusión: Para resolver una ecuación despejamos el valor de la variable aplicando operaciones inversas de suma, resta, multiplicación y división, a ambos lados de la igualdad.

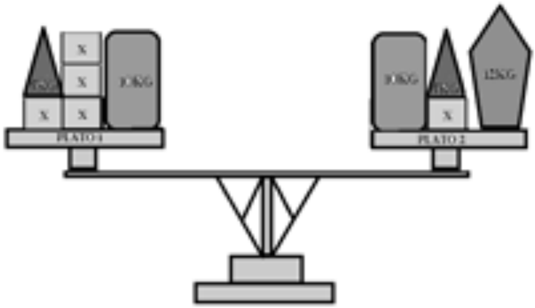
Resuelva:

1) En cada caso, hallar el valor de X, de las siguientes balanzas en equilibrio. Plantear la ecuación y resolverla.

a)



b)



2) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) 3.x-5=2.x+2
b) 5.x+2.x-10=11
c) 3.x+2.x-15=15-5.x
d) 8.x-6=4.x+14

Resolviendo el problema de “La gran fiesta” con ecuaciones

Retomemos el punto (3) del problema que da inicio a este capítulo, vamos a resolverlo utilizando ecuaciones.
Debemos responder a la pregunta:

“¿Cuántas mesas necesitamos para que se sienten 102 personas?”

Utilizaremos la expresión algebraica que cuenta la cantidad de personas de acuerdo a la cantidad de mesas a utilizar, la misma que construimos en la sección anterior al resolver el punto (2) del problema. Luego, sabemos que la cantidad de personas **4.m+2** será de 102. En esta situación desconocemos el valor de **m** y nuestra tarea es encontrar dicho valor, que verifique la siguiente igualdad:

4.m+2=102

Esto es lo que llamamos ecuación de grado uno, donde la incógnita es **m.**

Para resolver la ecuación utilizamos el método de la balanza, es decir, aplicamos operaciones matemáticas a ambos lados de la ecuación para conservar la igualdad, entonces tenemos que:

$$4.m+2=102$$
$$4.m+2-2=102-2$$
$$4.m=100$$
$$4.m:4=100:4$$
$$m=100:4$$
$$m=25$$

Se concluye entonces que se necesitan 25 mesas.
Por otro lado si tenemos 300 personas, entonces la ecuación a resolver sería:

$$4.m+2=300$$
$$4.m=300-2$$
$$4.m=298$$
$$m=298:4$$
$$m=74.5$$

Pero m es el número de mesas y dijimos que es un número Natural, entonces para 300 personas necesito al menos 75 mesas, el cálculo seria 75.4+2=302. Luego se concluye que sobran dos lugares.

Resuelvan

Con la misma consigna del problema anterior, respondan: ¿cuántas mesas necesitamos?, si queremos que:

Se sienten 200 personas.
Se sienten 321 personas.
Se sienten 587 personas.
Se sienten 1300 personas.
Se sienten 2555 personas.
Se sienten 129 personas.

7.4 Ecuaciones con solución Única, con Infinitas soluciones o con Ninguna solución.

Hasta ahora trabajamos con ecuaciones que tienen solución única, es decir, que la incógnita toma un único valor para satisfacer la igualdad de la ecuación, (ver ejemplo de la balanza). Pero existen casos en que no existe solución o hay soluciones infinitas. Veamos algunos ejemplos:

En cada caso hallar, si es posible, los valores de x que satisfacen la igualdad, es decir **el conjunto solución** en las siguientes ecuaciones:

i) 2.x+1=9 **ii)** 2.x+5=2.x+8 **iii)** 2x+4=2.(x+2)

Resolvemos las ecuaciones:

i) **2.x+1=9**

2.x+1-1=9-1
2.x=8
2.x:2=8:2
x=4 , luego la solución es **Única**.

ii) **2.x+5=2.x+8**

2.x+5-5=2.x+8-5
2.x=2.x+3
2.x-2.x=2.x-2.x+3
0.x=0.x +3, la multiplicación por cero da por resultado cero.
0=0+3
0=3, **esto es un absurdo**, pues 0 es distinto de 3, luego la ecuación no tiene **Ninguna** solución.

iii**)** **2x+4=2.(x+2)**

2.x+4=2.x+4 , aplicamos propiedad distributiva del 2.
2.x+4-4=2.x+4-4
2.x=2.x
2.x-2.x=2.x-2.x
0.x=0.x

0=0 , esto es verdad para cualquier x, pues todo número multiplicado por cero da por resultado cero. Por lo tanto x puede tomar cualquier valor, entonces la ecuación tiene Infinitas soluciones.

Resuelvan

1) Determinar en cada caso si las siguientes ecuaciones tienen: solución única, no existe solución, o tiene infinitas soluciones.

a) $5.x+25=3.x+17+2.x+8$
b) $9.x+6=3.x+24$
c) $8.x+5=2.x+23$
d) $7.x+9=3.x+9$
e) $6.x-3.x=15+3.x$
f) $9.x-5=9.x+10$

1.5 Curiosidades, historias y anécdotas

Un problema Griego

Un gran matemático que trabajo con ecuaciones fue **Diofanto de Alejandría**, que vivió probablemente en el siglo III d. C. Diofanto planteó el siguiente problema:

"Hallar dos números conociendo su suma y su resta"

Por ejemplo:

Si A+B=42 y A-B=16 ¿Cuáles son los números A y B?

Intente resolverlo y luego compare los resultados con lo planteado a continuación.

Cuando tenemos más de una ecuación para resolver, es lo que vamos a llamar sistema de ecuaciones. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todos los valores de las variables literales que satisfacen todas las ecuaciones a la vez. En este caso tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas y esta son:

A+B=42 (1)
A-B=16 (2)

Para resolver sistemas de ecuaciones existen distintos métodos. En este capítulo solo vamos a desarrollar dos métodos, que son: el **método de sustitución** y el **método de igualación**.

Comencemos con el método de igualación

Primero despejamos una variable de una de las ecuaciones por ejemplo despejemos A de la ecuación (1). Entonces:

De la ecuación (1) **A=42-B**

Luego debemos reemplazar la expresión de A, que esta recuadrada, en la ecuación (2), entonces:

42-B-B=16

Resolvemos la ecuación y resulta que:

42-B-B=16

Sabiendo[13] que -B+ (-B) = -2B, entonces

42-2B=16
Sumamos 2B a ambos lados
42-2B+2B=16+2B
Restamos 16 a ambos lados
42-16=16-16+2B
26=2B
Dividimos por 2 a ambos lados
26:2=2B:2
13=B

13 En esta parte pensamos en la suma de dos números enteros.

Luego reemplazamos el valor de B hallado en la ecuación (2) y resulta que:

$$A-13= 16$$

Resolvemos la ecuación

$$A-13+13= 16+13$$
$$A=29$$

Así, pudimos encontrar los valores de A y B que son solución del sistema de ecuaciones.

Ahora veamos el método de Igualación

Si $A+B=42 \iff A=42-B$ (1)

Por otro lado

Si $A-B=16 \iff A=16+B$ (2)

Luego como el valor de A es el mismo en ambas ecuaciones, entonces podemos igualar las expresiones de A despejadas en (1) y (2), se tiene que:

$$42-B = 16+B$$

Luego resolvemos la ecuación. Sumando B a ambos lados de la ecuación y restando 16 a ambos lados se tiene que:

$$42-B+B=16+B+B$$
$$42=16+2.B$$
$$42-16=16-16+2.B$$
$$26=2.B$$

Por último, como 2 multiplica a la B, entonces divido por 2 a ambos lados de la ecuación

$$26:2=2.B:2$$
$$13=B$$

De esta manera encontramos el valor de B y para hallar el valor de A basta con reemplazar B=13 en una de las ecuaciones (1) o (2); en cualquiera dará el mismo valor.
Si B=13 reemplazo en (2), en particular $A=16+13 \iff A=29$

Esto es lo que llamamos sistema de ecuaciones con dos incógnitas y el método que utilizamos fue igualación. Lleva ese nombre debido a que lo que primero hay que hacer, es despejar en las dos ecuaciones la misma variable literal y luego igualar las expresiones. De esta igualación nos queda una ecuación de una incógnita la cual al resolverla hallamos el valor de la incógnita, en este caso B y luego se sigue como en el método de sustitución.

1.6 Guía de Actividades

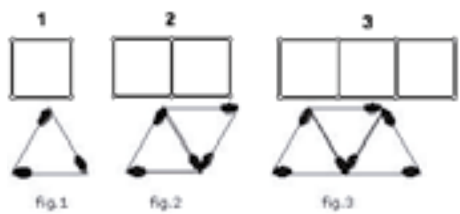
Resolver las siguientes ecuaciones:

3.x+5.x=24
5.x-2=3.x+6
9.x-5-2.x=9
3.x+6+7.x=5.x+21
10.x+9=3.x+30

1) Las siguientes sucesiones fueron construidas con palitos de fósforos:

a)

b)



I)¿Cuántos palitos de fósforos se necesitan para llegar a formar la figura 6 de cada sucesión? ¿Y para la figura 23 ¿Y para la 100?
II) Para cada sucesión de palitos, encuentra la fórmula general que permite obtener la cantidad de fósforos utilizados en cada posición.
III) Con 159 fósforos, ¿en cuál de las dos sucesiones se puede construir una figura? ¿En qué posición se encontraría?

2) A continuación, están representados los primeros "números cuadrados", llamados así porque la cantidad de piedras que los integran se pueden disponer formando un cuadrado:

a. ¿Cuál es el quinto número cuadrado? ¿Y el vigésimo?
b. Encuentra una fórmula general que permita obtener todos los números cuadrados.
c. ¿Es verdad que el trigésimo primer número cuadrado es el 461? Explica la respuesta.

3) Problemas de los Magos: Plantear y resolver los siguientes problemas.

a) Un mago propone el siguiente truco a su público. "Piensen un número; súmenle 4; multipliquen al resultado por 3; réstenle el numero elegido y recuerden ese resultado. Ahora multipliquen al número elegido por 2 y luego súmenle 8. Por último, resten este último valor al resultado que guardaron." El mago afirma que todos obtuvieron como resultado 4. ¿Es cierto lo que dice el mago para cualquiera sea el número elegido?

b) Un mago nos dice: "Piensa un número cualquiera, súmale 2. Al resultado multiplícalo por 2, réstale 1 y luego réstale tres veces tu número. Encontraste 2". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido? ¿Por qué?

c) Otro mago nos dice: "Piensa un número cualquiera, réstale 1. Al resultado multiplícalo por 2, súmale 4 y luego réstale dos veces tu número. Encontraste 5". ¿Funciona este truco para cualquier número que se haya elegido? ¿Por qué?

d) ¿A cuál de los tres magos anteriores contratarías para un espectáculo? Justificar su elección.

4) En una granja se crían gallinas y conejos. En total hay 50 cabezas y 134 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

5) En un taller hay vehículos de 4 y de 6 ruedas. Si disminuyera en dos el número de vehículos de 6 ruedas habría doble número de éstos que de cuatro ruedas ¿Cuántos vehículos hay de cada clase si en total hay 156 ruedas?

6) Un alumno hace un examen con diez preguntas. Cada respuesta correcta cuenta un punto, pero cada respuesta incorrecta descuenta medio punto. El alumno contesta a todas, y saca un 5,5. ¿Cuántas preguntas ha tenido bien y cuántas mal?

7) En una tienda he comprado 12 artículos entre CDs y DVDs. Los primeros valen 11 euros, y los segundos el doble de estos. En total me he gastado 198 euros. ¿Cuánto he comprado de cada tipo?

7.7 TRABAJO INTEGRADOR

1) A partir de la lectura del capítulo 7 responder y ejemplificar:

a) ¿Qué es una expresión algebraica?
b) ¿Qué es una ecuación?
c) ¿Qué se entiende por solución de una ecuación?
d) ¿Qué significa resolver una ecuación?
e) ¿Existen ecuaciones con más de una solución?
g) ¿Qué entiende por una ecuación sin solución?

2) En cada caso, construya una ecuación que cumpla con la condición de que:

a) No tenga ninguna solución.
b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga solución única.
d) Su única solución sea 5.
e) Una de las expresiones algebraicas es 2.x+3 y el número 100 es solución de la ecuación.

El epitafio de Diofanto

Como vimos anteriormente Diofanto fue un matemático griego que vivió aproximadamente en el siglo III d. C. y es considerado unos de los precursores del álgebra. No existe mucha información sobre la vida de este gran matemático. Lo poco que se sabe está basado en un epitafio que fue grabado en su tumba,¿ y redactado en forma de problema, como se muestra a continuación:

> *¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida.*
> *Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas.*
> *Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada.*
> *Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.*
> *Dime caminate cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó su muerte.*

El desafío para usted es responder ¿Cuántos años vivió Diofanto?

Una pista: Traduzca los datos del problema a un lenguaje algebraico, plantee una ecuación y resuélvala.

CAPITULO 8
DISTRIBUYENDO EN PARTES IGUALES

"No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real "

Nikolai Lobachevsky

Porciones de Pizza

1) Tres amigos se reúnen en una casa y piden una rica pizza que está cortada en ocho porciones iguales. Si uno de los amigos se come dos porciones, otro tres y el último una sola porción.

a) ¿Qué fracción de pizza comerá cada uno?
b) ¿Cuál es la fracción total de pizza que comerán entre los tres amigos?
c) ¿Qué fracción de pizza quedará?

2) A la reunión anterior se suman tres amigas, que dicen comer dos porciones cada una. Entonces piden otra pizza igual que la anterior.

a) ¿Cuál será en este caso la fracción total de pizzas que comerán entre todos?
b) ¿Sobra alguna porción de pizza?

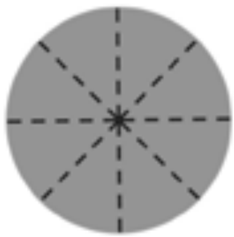
3) Se termina la reunión y uno de los amigos dice que cenó muy bien, ya que comió dos porciones de la primera pizza y 1/3 de la segunda. ¿Qué fracción del total de pizza comió este amigo?

Intente responder a las preguntas con lo que usted sabe. Y luego compare su respuesta con lo que se explica más abajo.

Una propuesta para resolver el problema "Porciones de pizza"

Punto 1

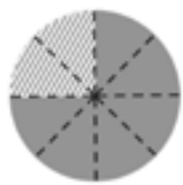
Para visualizar el problema de las porciones, podemos realizar un esquema de la situación, como se ve a continuación:



Pizza cortada en ocho porciones iguales.

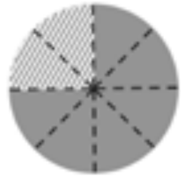
¿Qué fracción de pizza comerá cada uno?

El primer amigo come dos porciones del total de la pizza, es decir, dos entre ocho porciones totales.
Representamos en la imagen la situación. Las líneas rayadas indican las dos porciones que come el primer amigo. Esto también lo podemos representar por medio de una expresión numérica que llamaremos f**racción** o **número fraccionario:**



Porciones que comieron $\frac{2}{8}$
Porciones totales

El segundo amigo come tres de ocho porciones totales. La situación se muestra en la imagen derecha, donde marcamos tres porciones de entre ocho totales.
En este caso **la fracción correspondiente es:**



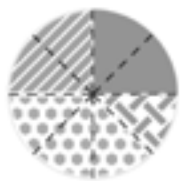
$$\mathbf{\frac{3}{8}}$$

Por último, **el tercer amigo** come una porción de entre ocho porciones totales, esta situación queda representada en la tercera imagen donde marcamos con rayas la única porción que comió de entre las ocho porciones totales. En este caso, **la fracción que representa la situación es**:

$$\mathbf{\frac{1}{8}}$$

¿Cuál es la fracción total de pizza que comerán entre los tres amigos?

Sabemos por lo analizado previamente que:



El primer amigo come 2/8 de pizza.
El segundo amigo come 3/8 de pizza.
El tercer amigo come 1/8 de pizza.

Entonces sumando la cantidad de porciones que come cada amigo tenemos 2+3+1=6, es decir, comen seis porciones de entre ocho totales. Si lo representamos mediante una fracción tenemos:

$$\mathbf{\frac{6}{8}}$$

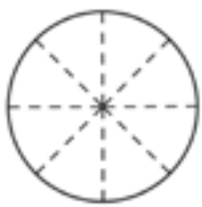
¿Qué fracción de pizza quedará?

En la imagen anterior marcamos la cantidad de porciones que come cada amigo y vemos que sobran dos porciones entre ocho totales, aquellas que no están marcadas en la imagen.
Por lo tanto, la fracción de pizza que quedará es ***2/8.***

Punto 2

¿Cuál será en este caso la fracción total de pizzas que comerán entre todos?

Se suman tres amigas que dicen comer 2 porciones cada una, entonces necesitamos 6 porciones más de pizza para ellas. Sabemos que no va a alcanzar con la pizza anterior porque sobraban solo dos porciones; entonces pedimos una pizza más. Por lo tanto, ahora tenemos dos pizzas del mismo tamaño que están divididas en ocho porciones iguales cada una.
Entonces tenemos 6 porciones que se comieron entre los tres amigos más 6 porciones de las chicas, nos da un total de 12 porciones, como se muestra en la siguiente imagen.



Pizza 1

Pizza 2

Entonces la fracción total de pizza que comerán es 12/8. Esto es equivalente a decir que 1+ 4/8 = 12/8, el 1 representa la pizza entera que comieron y el 4/8 las cuatro porciones de la segunda pizza.

¿Sobra alguna porción de pizza?

De las dos pizzas que tenemos nos sobran 4 porciones, que en fracción es 4/8. En la imagen anterior está representada esa situación en la pizza número 2.

Punto 3

Este ítem está desarrollado más adelante después del trabajo con fracciones equivalentes y la suma de fracciones con distinto denominador. Si usted logro resolverlo por su cuenta puede comparar sus resultados con los que se proponen en la página....

8.1 UN POCO DE TEORÍA
LAS FRACCIONES Y SUS REPRESENTACIONES

En la actividad anterior trabajamos con el concepto de fracción, que está relacionado con la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales. Podríamos decir que una fracción es una expresión que marca una división. Por ejemplo: La fracción **¾** (se lee "tres **cuartos**") señala tres partes sobre cuatro partes totales. También podemos pensar este concepto como una cantidad numérica que representa una porción de un total.
No existe una única manera de representar una fracción, todo depende del contexto en el que estemos trabajando con este concepto. Veamos algunas formas de representación:

Como número fraccionario: a/b

En este caso la fracción **a/b** representa que, a una cierta cantidad total, se la divide en **"b"** partes iguales y se toman **"a"** partes. Al número **"a"** lo llamamos **numerador** y representa lo que estamos contando, pintando, comiendo o tomando. Por otro lado, al número "**b"** lo llamamos **denominador** y representa la cantidad de partes iguales en las que está dividido el entero.

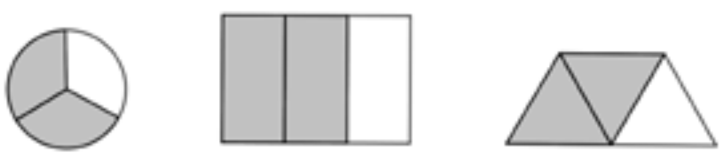
Estas fracciones representan una proporción o razón entre los números a y b. Donde "a" debe ser un número entero[14] y "b" un número natural sin incluir al cero como natural.
Por ejemplo, si en un curso hay **40** estudiantes y aprobaron un examen 26, entonces la fracción vista como proporción o razón es **26/40.**

Como vimos en las resoluciones anteriores para los puntos (1) y (2), también aparecieron fracciones de este estilo. Por ejemplo: 2/8 donde a partir de un total (una pizza), se dividió en 8 partes iguales y se tomaron 2. En este ejemplo el número 2 es numerador y el 8 el denominador.

Forma gráfica:

En algunas ocasiones hacer un gráfico de la fracción a representar puede ser de gran ayuda para entender la cantidad con la que estamos trabajando. En la situación de las pizzas hemos utilizado varias figuras para entender la fracción que se solicitaba representar.
Para ello realizamos las particiones iguales de acuerdo con el denominador de la fracción y tomamos la porción de acuerdo con el numerador.
Por ejemplo, si queremos representar gráficamente la fracción 2/3 podemos utilizar un círculo, una barra, o cualquier objeto como entero o unidad, el cual deberemos dividirlo o partirlo en 3 partes iguales, de las cuales pintaremos o señalaremos 2, como se muestra a continuación:

Representación gráfica de $\frac{2}{3}$



14 Hasta ahora trabajamos con números naturales, pero las fracciones pueden tener signo negativo, ya que el numerador pertenece al conjunto de los números enteros.

También pueden utilizarse gráficos que no son continuos, en general se los utiliza cuando tenemos que contar una colección o conjunto de objetos iguales. Por ejemplo, bolitas, autos, personas, animales caramelos, etc.

Representación gráfica de $\frac{2}{3}$

Como una expresión decimal:

Para representar fracciones utilizando expresiones decimales, debemos recordar que a/b es una razón entre a y b, es decir, la división entre a y b, la cual nos puede dar un número decimal o con coma. Veamos algunos ejemplos:

Si tenemos 1/4 y realizamos la división entre 1 y 4, es decir, 1 dividido 4 nos da por resultado 0,25, entonces 1/4 =0,25.

```
 10 |4
 -8  0,25
   20
  -20
   0/
```

Como la división termina, es decir, obtenemos un resto igual a cero, entonces al decimal lo vamos a llamar **decimal finito**. En este caso 0,25 es un decimal finito.

Si tenemos 2/3, la división entre 2 y 3 nos da por resultado 0.6666666…, en este caso los puntos suspensivos indican que el número tiene infinitas cifras decimales.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{-18} & 0{,}66\ldots \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \end{array}$$

En este caso mediante el algoritmo de división que aprendimos en la escuela nunca obtenemos un resto igual a cero, siempre nos queda un resto de 2 que se repite siempre y la división nunca termina. Por lo tanto 2/3=0,666666…a este número se lo llama **decimal infinito** o periódico.
Y se lo indica con un arco de la siguiente forma: $2/3=0{,}\hat{6}$

Ejercicio: Intente representar las siguientes fracciones mediante un gráfico y una expresión decimal:

1/2; 3/4; 2/5; 6/7; 6/10; 3/2; 4/3; 10/6.

Fracciones mayores a la unidad o fracciones mixtas

En ciertas ocasiones nos encontramos con algunas publicidades en las cuales aparecen expresiones numéricas. Por ejemplo, en la etiqueta de cierta bebida se informa que contiene **2 1/4** litros, en este caso la expresión numérica significa que en la botella hay **dos litros** más **un cuarto** de litro de la bebida, es decir la suma entre 2 y 1/4.

Si tuviéramos botellas de un litro y pasamos el contenido de la botella de 2 ¼ a estas, entonces queda representada la situación de la siguiente forma:

Este tipo de expresiones que combinan un entero con una fracción las llamaremos **fracciones mixtas**.

Ejercicios:

1) Dar ejemplos de fracciones mixtas utilizadas en la vida cotidiana.
2) ¿Qué condición deben cumplir el numerador y el denominador para que la fracción pueda ser considerada como una fracción mixta?
3) Represente en forma gráfica las siguientes fracciones

a) 2 1/5 b) 3 6/8 c) 5 3/4

4) Expresar las siguientes fracciones como fracciones mixtas.

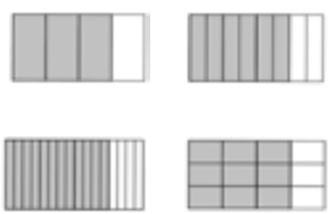
a) 12/5; b) 8/3; c) 6/4; d) 7/3;

Fracciones que se escriben distinto pero que representan la misma cantidad.

Supongamos que queremos representar gráficamente 3/4, 6/8, 12/16 y 9/12 de una misma unidad. Utilicemos, por ejemplo, un gráfico de barras.

$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

$\frac{12}{16}$ $\frac{9}{12}$



De las representaciones gráficas podemos observar que las cuatro fracciones representan la misma cantidad. Además, si realizamos la división entre el numerador y el denominador de cada una, su expresión decimal es **0,75.**
A este tipo de fracciones, que representan lo mismo pero que se escriben de distinta forma, las llamaremos **fracciones equivalentes.** Y serán de gran utilidad para sumar o restar fracciones.

Dada una fracción, ¿cuántas fracciones equivalentes podemos encontrar?

En el ejemplo anterior trabajamos tres fracciones equivalentes de la fracción 3/4. Si observamos: 3/4=6/8=12/16, se obtienen de multiplicar por dos a los numeradores y denominadores de cada una. Por otro lado, 3/4=9/12 se obtiene de multiplicar por tres al numerador y al denominador.
Por lo tanto, una forma posible para hallar fracciones equivalentes a una dada –por ejemplo, a/b–es multiplicar al numerador y denominador por un mismo número entero no nulo.

Ejemplo: Hallar una fracción equivalente de 3/5.
Utilizamos cualquier entero no nulo. Consideremos por ejemplo el número 7 y realizamos la multiplicación.

3	**por 7**	**21**
5	**por 7**	**35**

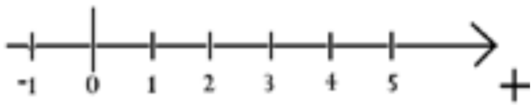
Luego, una posible fracción equivalente es 21/35.

Ejercicio: Escribir cinco fracciones equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

a) 1/2 b) 1/4 c) 1/3 d) 1/10 e) 5/2 f) 7/3

Ubicando fracciones en la recta numérica

En la recta numérica también es posible ubicar fracciones a/b. Para ello consideramos la unidad como el entero, el cual dividiremos en "b" partes iguales y de los cuales tomaremos "a" partes.
Por ejemplo, consideremos la siguiente recta numérica:



Supongamos que queremos ubicar la fracción 8/3, entonces debemos dividir la unidad en 3 y tomar 8 partes.

En la recta dividimos en tres partes iguales, del o al 1, del 1 al 2 y del 2 al 3. Luego marcamos las 8 partes que debemos tomar, quedando así determinado el lugar donde ubicar la fracción. Como se muestra a continuación:

Ejercicio: Ubicar en una recta numérica las siguientes fracciones.

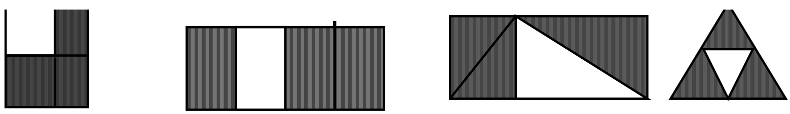
a) 3/8; **c) 2/3;** **e) 8/12;** **g) 2 3/4;** **i) 5/3.**
b) 9/2; **d) 5/7;** **f) 10/3;** **h) 5 2/3;**

8.2 Guía de actividades (primera parte)

1) En la cooperativa de pastas "Don Freire" trabajan 50 familias de las cuales 22 son hombres y el resto mujeres.

a) ¿Cuál es la fracción que representa el número de mujeres que trabaja en esta cooperativa? ¿Y el de hombres?
b) Si el horario de trabajo en la cooperativa es de lunes a viernes 6 horas por día. ¿Qué fracción del día le dedica cada trabajador a la cooperativa? ¿Qué fracción del día le queda para dedicarse a su familia y para descansar?

2) Las siguientes imágenes representan superficies de diferentes terrenos en los cuales se ha coloreado la parte que se dejado para sembrar un determinado cultivo. ¿En cual cree usted que se ha sembrado las tres cuartas partes del terreno? Fundamente su respuesta.



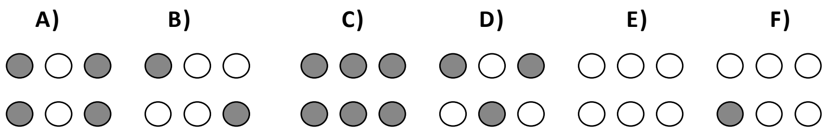
3) Fernando, Diana y Elsa tienen que pintar una casa. Fernando emplea la mitad del día en hacerlo, Diana las dos terceras partes del día y Elsa una tercera parte.

a) ¿Quién ha tardado más tiempo en pintar la casa? ¿Quién menos? Explicar.
b) ¿Es verdad que el tiempo que han empleado entre los tres, supera un día y medio?
c) ¿Cuántas horas tardó cada uno?

4) Cinco amigas se juntan a charlar y a tomar unos mates. Compran 3 budines del mismo tamaño para compartir. ¿Qué fracción de budín recibirá cada una, de modo que todas puedan comer la misma cantidad?

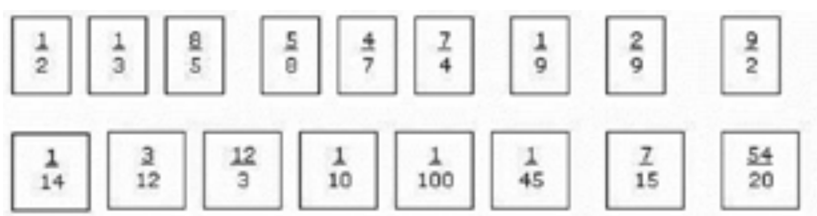
b) Como cambia la situación anterior si se invierten las cantidades. Es decir, si son tres amigas y cinco budines.
c) Si los 3 budines de la situación a) tuvieran distinto tamaño, ¿la cantidad de budín para cada amiga sería la misma que se calculó en a)?

5) Las siguientes imágenes representan diferentes cajas con 6 alfajores cada una. Los blancos son de fruta y los coloreados de chocolate.



a) Suponiendo que cada caja de alfajores representa la unidad, escriba la fracción que representa a los alfajores de chocolate y a los de fruta en cada caja.
b) Ordene las fracciones anteriores de menor a mayor .
c) ¿Cuántas cajas se necesitan para representar una fracción de alfajores de chocolates igual 28/6?
d) Represente la fracción anterior gráficamente.

6) Obtengan las expresiones decimales de las siguientes fracciones y comprueben sus resultados utilizando la calculadora científica.



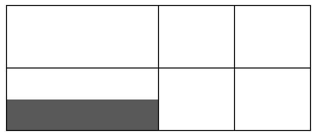
a) ¿En qué se diferencian las expresiones decimales obtenidas en cada fracción? ¿Cómo se pueden clasificar?

7) a) Para cada una de las siguientes fracciones, decidir si son mayores o menores que 1. En cada caso, escriba también cuánto le falta o cuánto se pasa de 1.

i) 1/4; iii 3/5; v) 14/23; vi) 23/14.

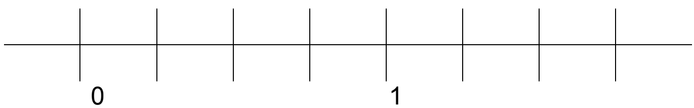
ii) 3/2; iv) 3/7;

b) Ordene las fracciones anteriores de menor a mayor.



c) ¿Qué fracción del rectángulo está sombreada?

d) En esta recta numérica están representados algunos números. Ubique en la recta: 1/4, 7/4, 2 y 9/8.e) Escriba: A)



dos fracciones que estén entre 0 y 1. B) Dos fracciones entre 1/2 y 1. C) Dos fracciones que estén entre 4/10 y 4/5.
f) ¡Cuántas fracciones con denominador 14 hay entre 4/7 y 5/7?

8) Tres amigas, Rosario, María y Teresa, tienen ahorrados $6.500, $3.520 y $4.730, respectivamente. Para irse de excursión, Rosario va a gastar cuatro quintos de lo que tiene ahorrado, María la mitad y Teresa los dos tercios. ¿Cuánto gastará cada una?

9) Un almacenero cortó una horma de queso cuadrada en partes iguales tal como se muestra en el siguiente dibujo:
A la mañana vendió las partes sombreadas y durante la tarde el resto del queso.

Responda las siguientes preguntas a partir de la información anterior:

a) ¿Qué fracción del total del queso se vendió a la mañana? ¿Qué fracción del queso vendió a la tarde? Fundamentar.
b) Si el queso pesa 5 kg. ¿Qué cantidad de kilogramos vendió a la mañana y cuánto a la tarde?

10) Supongamos que hacemos un viaje en automóvil y para ello cargamos el tanque de nafta hasta llenarlo por completo. Luego de 2 horas de viaje sabemos que hemos consumido las 7/11 partes del tanque.

a) Represente gráficamente el tanque y la fracción de nafta que hemos consumido en las primeras dos horas de recorrido.
b) Después de estas dos horas sabemos que para llegar a nuestro destino, necesitamos como mínimo medio tanque de nafta lleno. ¿Podremos continuar con nuestro trayecto sin cargar nafta? Fundamente su respuesta.
c) Si el tanque de nafta de nuestro auto tiene una capacidad de 32 litros. ¿Cuántos litros de nafta gastamos en las primeras dos horas de recorrido?

11) Dos ciclistas, Mateo y Camilo, participan de una carrera en la provincia de Córdoba. Al inicio de la competencia los dos se mantuvieron muy parejos, pero luego de unas horas de recorrido logran separarse. En ese momento Mateo ya recorrió tres cuartos de la competencia, mientras que a Camilo le faltan por recorrer tres octavos de la misma.

a) ¿Qué competidor lleva la delantera en ese momento?

b) Si el circuito de esta competencia tiene unos 42 kilómetros totales de recorrido. ¿Cuántos kilómetros llevan recorrido Mateo y Camilo hasta el momento?

8.3 UN POCO MÁS DE TEORÍA "CALCULANDO CON FRACCIONES"

En la vida cotidiana a veces nos encontramos con situaciones en las que debemos sumar cantidades que están expresadas en forma de fracciones. Por ejemplo, cuando usted realiza una compra en una despensa, panadería o verdulería, es probable que necesite utilizar fracciones en este ámbito.

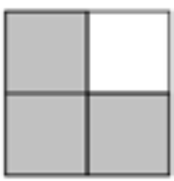
Supongamos que usted realiza unas compras en la verdulería. Como los tomates redondos y los peritas están al mismo precio, decide comprar un cuarto kilogramo de tomates redondos y medio kilogramo de tomates peritas. ¿Cuántos kilos de tomate compró?

Si traducimos el problema a un leguaje escrito en forma matemática, la oración "un cuarto kilogramo de tomates redondos y medio kilogramo de tomates peritas" se expresa como:

1/2 + 1/4

Representamos la situación a través de una imagen:

Dibujamos un cuadrado y la parte sombreada representa la fracción 1/2.



Luego dividimos las mitades en dos. Cada uno de los nuevos cuadrados resultantes representa un cuarto del cuadrado original.
Entonces vemos que 1/2 es equivalente a 2/4.

Por último, sombreamos uno más de los cuartos anteriores, ya que a la cantidad obtenida en el gráfico anterior (2/4) hay que sumarle la fracción 1/4. Por lo tanto, la parte sombreada ocupa 1/2 + 1/4 = 3/4
Entonces, la cantidad total de tomates es 3/4 kg.

En síntesis, si solo nos centramos en las fracciones para sumar **1/2 + 1/4,** primero escribimos fracciones equivalentes a las dadas con un mismo denominador. Y luego sumamos los numeradores:

1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/ 4

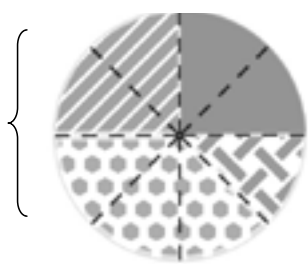
Observen que la idea es sumar fracciones que tengan un común denominador. Ese denominador común es un múltiplo de los denominadores de ambas fracciones. En este caso **4** es el denominador común, ya que es múltiplo de 2 y de 4. También podríamos haber elegido como denominador común otros múltiplos de 2 y 4 como 8; 16; 32; 64; ...y la lista sigue ya que en realidad hay infinitos múltiplos. ¿Cuál elegimos? El que nos quede más cómodo para resolver la situación.
Veamos cómo podemos sintetizar de alguna manera la suma y resta de fracciones utilizando fracciones equivalentes.

Suma y resta de fracciones

> Si hay que sumar o restar fracciones de igual denominador, no hace falta buscar las fracciones equivalentes ya que solo se suman o restan los numeradores y se escribe el mismo denominador.

Por ejemplo, en la actividad introductoria teníamos una pizza que estaba dividida en 8 partes iguales. Y para calcular la cantidad de pizza que podían comer entre los tres amigos se puede plantear lo siguiente:

2/8 + 3/8 + 1/8= 6/8



La fracción de pizza que queda en este caso viene dada por la siguiente resta:

$$8/8 - 6/8 = 2/8$$

Para sumar o restar **fracciones de distinto denominador**, primero se buscan fracciones que tengan un denominador común. Para esto utilizamos fracciones equivalentes a algunas de las fracciones que tenemos que sumar o restar, y así obtenemos fracciones que tengan el mismo denominador. Luego, se suman o se restan como en el caso anterior. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo (1): 5/3 + 2/9=
En este caso podemos multiplicar por tres al numerador y al denominador de la fracción 5/3. Multiplicamos por tres y obtenemos una fracción equivalente que tiene denominador nueve.
Luego, sumamos los numeradores de las fracciones obteni-

$$\begin{array}{ccc} \underline{5} & \longrightarrow & \underline{15} \\ 3 & \longrightarrow & 9 \end{array}$$

das 5/3+2/9 = **15/9** + **2/9** =17/9

Ejemplo (2): 5/3 – 2/9=
Utilizamos la misma fracción 15/9, entonces resulta que: 5/3 – 2/9 = **15/ 9** – **2/9**= 13/9

Ejemplo (3): 2+ 1/3=
En este caso podemos pensar al 2 como la fracción 2/1, entonces vamos a multiplicar por tres al numerador y al denominador y obtenemos una nueva fracción equivalente con denominador tres.

$$\begin{array}{ccc} \underline{2} & \longrightarrow & \underline{6} \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Luego 2+ 1/3=2/1 + 1/3 = **6/3** + 1/3= 7/3

Ejemplo (4): 2/3 + 1/5=
Podemos multiplicar numerador y denominador de la fracción 2/3 por cinco y al numerador y denominador de 1/5 por tres, así obtenemos fracciones con un denominador común igual a 15.
2/3+1/5=**10/15 + 3/15 =**13/15.

Ahora sí, ya tenemos las herramientas suficientes para responder al Punto (3) de la situación inicial sobre las "porciones de pizza".

Punto3) "Se termina la reunión y uno de los amigos dice que cenó muy bien, ya que comió dos porciones de la primera pizza y 1/3 de la segunda". ¿Qué fracción del total de pizza comió este amigo?"

En este caso tenemos que sumar **2/8 + 1/3. Entonces, primero buscamos fracciones equivalentes a 2/8 y 1/3** que tengan un mismo denominador común.
Por lo tanto, 2/8 + 1/3= **6/24 + 8/24** = 14/24, que resulta la fracción total que comió este amigo entre la primera pizza y la segunda.

Ejercicios

Realizar las siguientes sumas y restas de fracciones utilizando fracciones equivalentes.

a) 2/11 + 5/11=
b) 13/16 - 3/16=
c) 1/5+ 6/5=
d) 3/4+2/8=
e) 12/5-3/10=
f) 1/2+1=
g) 5+3/8=
h) 7/9+5/4=
i) 8/3 - 2/4=
j) 7/3 -1/7=

8.4 GUÍA DE ACTIVIDADES (Segunda parte)

1) La familia Rodríguez dispone de $ 36.350 al mes. Los gastos mensuales se reparten según la gráfica adjunta.

a) ¿Qué fracción de sueldo pueden ahorrar? Explicar.
c) ¿Cuánto dinero dedican a alimentación y escuela? Explicar.

2) Vicente, Silvana y Marta están sembrando diferentes plantas en un terreno. Vicente ha sembrado la cuarta parte, Silvana 1/3 y Marta 1/6 del terreno.

a) ¿Han sembrado todo el terreno? Explicar.
b) ¿Quién ha sembrado más hasta el momento? ¿Por qué?
c) Si el terreno tiene una superficie de 100 m^2 ¿Qué cantidad de superficie han sembrado cada uno hasta el momento? Explicar.

3) El señor López gasta 1/3 de su sueldo la primera semana, un cuarto la segunda y 1/6 la tercera semana.

a) ¿Qué fracción de su sueldo le queda para gastar la cuarta semana? Justificar.
b) ¿En qué semana gastó más plata? ¿Por qué?
c) Si este señor gana $24.000 pesos al mes ¿Cuánto dinero gastó en cada semana? Explicar.

4) A cada paso, un caminante avanza 10/7 de metro.

a) ¿Es verdad que este señor avanza más de un metro por paso? ¿Cuántos metros avanza exactamente? Justificar.
b) ¿Qué distancia recorre en 1.000 pasos? ¿Y si hace 10.000 pasos? Justificar.
c) ¿Cuántos pasos hace si recorrió 1.000 metros? Justificar.

5) “Cuadrados mágicos con fracciones”.
Completa los siguientes cuadrados mágicos:
Recuerda que un cuadrado es mágico cuando la suma de sus filas, sus columnas y sus dos diagonales dan como resultado el mismo numero.

A

0		2/7
	1/7	
4/7		

B

		1/3
		1/4
1/2		2/3

C

2/15		
	1/6	
4/15		1/5

6) Las tres quintas partes de un terreno son cultivables y en el resto no se puede sembrar.

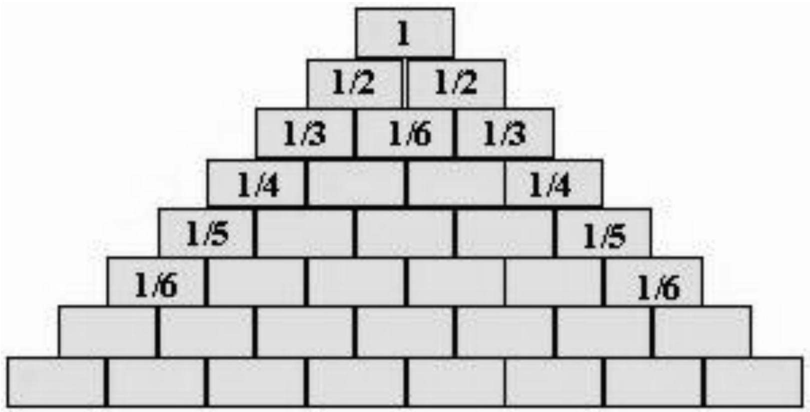
a) ¿Qué fracción del terreno no es cultivable?
b) De la parte cultivable, tres cuartos están dedicados al maíz y un cuarto de hortalizas. ¿Qué parte está dedicada al cultivo del maíz? ¿Qué parte a las hortalizas? Explicar las respuestas.

7) La Tierra tiene una superficie total de aproximadamente 510.000.000 km^2 (kilómetros cuadrados), de los cuales casi siete décimas partes están ocupadas por mares y océanos. El mayor océano es el Océano Pacífico, que constituye un poco más de las nueve vigésimas partes de las aguas. El mayor continente es Asia, con casi las tres décimas partes del total de la tierra emergida.

a) ¿Cuál es aproximadamente la superficie que ocupan los mares y océanos?
b) ¿Cuál sería la superficie de tierra emergida?
c) ¿Y la superficie de Asia?
Explicar las respuestas.

8) ¡Desafío!

Si en los rectángulos de los extremos escribimos los inversos de los números naturales y en los demás rectángulos escribimos la suma de los dos que tiene directamente por debajo, obtenemos el triángulo armónico de Leibniz. Complétalo hasta la octava línea.



8.5 HISTORIAS, ANÉCDOTAS Y CURIOSIDADES

“Las Fracciones egipcias”

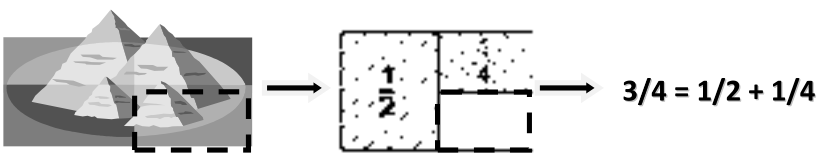
Los egipcios fueron pioneros en el trabajo con fracciones y las aplicaban en diferentes problemas de la vida cotidiana como el reparto alimentos, ganado y tierras.

El uso de fracciones aparece expuesto en algunos grabados y papiros que han permitido comprender cómo aplicaban este tipo de cantidades en su vida diaria. Un ejemplo de ello se encuentra en el famoso papiro de Rhind (o papiro de Ahmes) que debe su nombre

a Henry Rhind, egiptólogo escocés que en 1.858 adquirió una colección de papiros entre los que se encontraba éste.
El papiro data del año 1650 a.C. y mide aproximadamente 6 metros de largo por 33 centímetros de ancho. Su contenido es puramente matemático, con 87 problemas planteados y resueltos. El autor del papiro es un escriba llamado Ach-mosè también conocido por Ahmes.

En este en papiro, se pudo comprobar de qué manera los antiguos egipcios resolvían problemas de reparto de granos, pan y tierra. Para resolver estos problemas representaban las fracciones de una manera algo distinta a la que usamos hoy en día. Utilizaban solo fracciones unitarias, es decir, fracciones cuyo numerador es 1. (Por ejemplo: 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; 1/5; etc.).

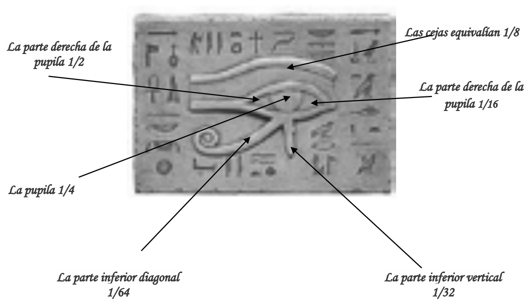
Si tenían que representar una fracción cuyo numerador era distinto de 1 entonces la descomponían en sumas de fracciones unitarias. Por ejemplo: si había que representar las 3/4 partes de un terreno, lo que hacían era descomponer la fracción en sumas de fracciones unitarias:



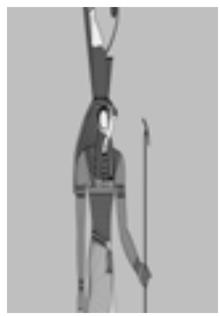
Para que no ocurran ambigüedades en la escritura de fracciones a la hora de descomponer una cantidad, los sumandos debían ser diferentes. Por ejemplo 2/5 no podía escribirse como 1/5+1/5.
Algunos autores afirman que esta manera algo extraña de escribir fracciones, les daba un método rápido y casi “visual” de comparar fracciones, que no demandaba expresar numéricamente el resultado del cociente para saber si una fracción era mayor, igual o menor que otra.

Una leyenda con fracciones. “El Ojo de Horus”

Los egipcios también usaban un tipo especial de fracciones unitarias denominadas fracciones ojo de Horus. Según su mitología estas fracciones representaban cada una de las partes en las que fue seccionado el ojo del dios egipcio Horus durante una batalla con el dios Seth.



¿Qué dice la leyenda?



Horus fue el dios celeste por excelencia de la mitología egipcia. Se lo consideraba como el precursor de la civilización egipcia y aparecía representado con cabeza de halcón y cuerpo de hombre.
La leyenda sobre el ojo de Horus es la historia de una venganza. Horus era hijo de Osiris, dios mítico de la resurrección y fundador de la nación egipcia. Su hermano Seth le tendió una trampa para asesinarlo y cortó su cuerpo en catorce pedazos que espació por todo Egipto.
Horus hijo de Osiris mantuvo una serie de encarnizados combates contra Seth, para vengar a su padre. En el transcurso de estas luchas los contendientes sufrieron múltiples heridas y algunas pérdidas vitales, como la mutilación del ojo izquierdo de Horus. Pero gracias a la intervención de dios de la sabiduría Thot, el ojo de Horus fue reconstruido uniendo sus partes. Con su visión perfecta, Horus consiguió vencer a Seth y se convirtió en el dios de todo Egipto desterrando a Seth al desierto. El Ojo de Horus se utiliza todavía como amuleto con el nombre de Udyat, que significa “el que está completo”.

En general, las fracciones que forman el Ojo de Horus se utilizaban como sistema de unidad para medir el trigo y la cebada. Esta sucesión de fracciones tiene una ventaja práctica a la hora de hacer particiones ya que cada fracción es la mitad de la anterior.

1/2	*1/4*	*1/8*	*1/16*	*1/32*	*1/64*

Para seguir pensando:

a) ¿Esta completo el ojo de Horus? Es decir, si juntamos las seis partes en que está dividido, ¿se llega a formar la unidad?
b) Si extendemos la sucesión de fracciones del ojo de Horus, ¿cuál sería el décimo término de esta sucesión?¿ Y el vigésimo?
c) ¿Existe alguna fórmula o expresión matemática que permita encontrar todas las fracciones de Horus?

Actividades para trabajar con fracciones egipcias.

I) ¿De qué manera se pueden escribir las siguientes fracciones unitarias como la suma de varias fracciones unitarias distintas? (Recuerde que no está permitido escribir 1/2 =1/4 +1/4).

a) 1/2; **b) 1/3; 1/5;** c) **1/7;** d) **1/17.**

II) El número **1** puede escribirse de muchas formas como la suma de fracciones unitarias diferentes. Por ejemplo: **1= 1/2 + 1/3 + 1/6** Muestre al menos dos formas diferentes de escribirlo.

III) En el papiro de Rhind aparece un problema similar al siguiente: "Si tenemos que repartir 2 panes entre 5 personas", ¿qué porción de pan le toca a cada una?

IV) Un lindo grupo de fracciones para ser expresadas como fracciones egipcias son aquellas cuyo numerador es 2. Intente escribir las siguientes fracciones:

a) 2/3; b) 2/5; c) 2/11.

8.6 Trabajo integrador

1) Explique con sus palabras los siguientes conceptos:

a) Fracción   b) Fracciones equivalentes

Mostrar ejemplos concretos donde aplique cada concepto utilizando diferentes representaciones.

2) Inventar y redactar tres problemas diferentes y cotidianos, en los cuales se requiera la suma o resta de fracciones con distinto denominador.

3) En las elecciones locales celebradas en un pueblo, 1/4 de los votos fueron para el Partido "De los Trabajadores", 1/8 para el partido "El Cambio", 1/ 16 para "Luz y Esperanza" y el resto para el partido "Unión obrera".

a) Que fracción de los votos fue para el partido Unión obrera
b) Si el total de votos ha sido de 720.000 personas. ¿Quién ganó las elecciones? ¿Por qué?

4) Para investigar: Toda fracción se puede escribir como un número decimal: finito, periódico o mixto **¿Será posible escribir cualquier número decimal como una fracción?.**

5) ¡Último Desafío! "El testamento del Jeque"

Al morir un jeque, ordenó que se distribuyeran sus camellos entre sus tres hijos de la siguiente forma: la mitad para el primogénito, una cuarta parte para el segundo y un sexto para el más pequeño. Pero resulta que el jeque sólo tenía once camellos, con lo que el reparto se hizo realmente difícil, pues no era cosa de cortar ningún animal. Los tres hermanos estaban discutiendo, cuando ven llegar a un viejo beduino, famoso por su sabiduría, montado en su camello. Le pidieron consejo y este dijo:

- Si vuestro padre hubiese dejado doce camellos en vez de once no habría problemas.
- Cierto, pero sólo tenemos once - respondieron los hermanos, a lo que el beduino contestó:
- Tomad mi camello, haced el reparto y no os preocupéis que nada perderé yo en la operación.

¿En qué se basa el beduino para afirmar tal cosa?

Bibliografía

Para el estudiante:

- Material de matemática para el alumno – Programa de Educación a Distancia Nivel medio de adultos. Módulos 1,2 y 3. Elaborado por Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba. Año 2005.-
- Carnelli, G., Cerarratto, E., Falsetti, M., Formica, A. y Marino, T. (2013). Matemática en contexto. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento
- Perelman Y. I. Preparado por Patricio Barros (2001) - Matemática Recreativa -Recuperado el 15 de junio de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/libros/Yakov%20I.%20Perelman%20-%20Matematica%20Recreativa.pdf.
- Paenza, A. -Matemática… ¿Estás ahí?, Sobre números, personajes, problemas y curiosidades - Editorial: Siglo Veintiuno.
- Perero, M. (1914). Historia e historias matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Páginas de Internet:

- http://www.educ.ar/educar
- http://www.recursosmatematicos.com
- http://www.matematicas.net
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/index.html

Para el docente:

- Ávila, A. (1996). “Fundamentos y retos para transformar el currículum de matemáticas en la educación de jóvenes y adultos”, en Vargas, J., Rivero, J. y Aguilera, M. (comp.): Construyendo la modernidad educativa en América Latina. Nuevos desarrollos curriculares para la educación de jóvenes y adultos. Unesco, Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. Versión mimeo.
- Ávila, A. (1997). “Repensando el currículo de matemáticas para la educación de los adultos”, en UNESCO-Santiago (ed.), Conocimiento matemático en la Educación de Jóvenes y adultos 101-118. San-

tiago de Chile, UNESCO.
- Ávila, A. (2003). “Matemáticas y educación de jóvenes y adultos”, en Revista Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos. Nº Primavera 2003: 5-7. México DF.
- Bastán, M. y Elguero, C. (2002). Aportes para la construcción de un marco desde el cual realizar propuestas alternativas de formación matemática para jóvenes y adultos del nivel medio. Ponencia en II CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN. Córdoba.
- Bastán, M. y Elguero, C. (2005). El escenario socio-cultural en la formación matemática del sujeto adulto. Una indagación en alumnos del Nivel Medio. Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática), 7 (27), 23-35.Recuperado el 3 de febrero del 2013 de http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_26/Elguero.pdf.
- De Agüero, M. (2002). La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas. Un modelo dialógico. Tesis doctoral. Barcelona, Facultad de Pedagogía. Universidad de Barcelona.
- De Agüero, M. (2003). “Interpretación y retos de las etnomatemáticas para la educación básica de adultos”, en Revista Decisio. Saberes para la acción en Educación de Adultos. Nº Primavera 2003: 41-45. México DF.
- Delprato, M. F. (2005). “Educación de Adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos?”, en Revista RELIME, vol. 8, Nº 2: 129-144. Recuperado el 20 de abril del 2013 de http://www.clame.org.mx/relime/200502b.pdf
- Libro de Matemática para el maestro de secundaria-Secretaría de Educación Pública, 1994, México, D.F. Recuperado el 20 de marzo de 2012 de: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/pdf/orientaciones/libromaestro.pdf
- Vera, S.A (2014). “Lo numérico en la educación secundaria para adultos; análisis de propuestas para su enseñanza”. Trabajo Final de Especialización en Didáctica de las Ciencias, orientación Matemática. Universidad Nacional de General Sarmiento. Los Polvorines, Argentina. Disponible en http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/?page_id=921

RIOSAL
Red de Investigadores y Organizaciones Sociales de Latinoamérica CLACSO

IMPRENTA COOP. CHILAVERT

Para nosotros desarrollar una educación de jóvenes y adultos supone concebir una educación popular para la liberación, que sirva a la formación integral del sujeto y que permita la apropiación de diferentes saberes. Consideramos que la educación debe ser entendida como un diálogo entre el educador y el educando. Es por eso que a la hora de diseñar una propuesta de trabajo para los estudiantes de Bachilleratos de Jovenes y Adultos es fundamental tomar como punto de partida los saberes previos de todos los estudiantes para trabajar con ellos colectivamente. Desde esta perspectiva, la matemática es una herramienta de análisis imprescindible como ciencia emergente de un proceso social, surgida del interés y la necesidad. Y como conocimiento abierto a la revisión, la matemática no constituye un saber dado, sino una actividad y un proceso comunitario. Es importante entonces tener en cuenta los intereses y motivaciones de los estudiantes. Este debe ser el punto de partida para pensar actividades y situaciones matemáticas que permitan que estos elementos se articulen para ayudar a que los estudiantes adquieran gradualmente un conocimiento matemático formal. Basado en estos presupuestos, el presente libro de texto brinda contenidos de matemática que pueden ser trabajados con los estudiantes que cursan una introducción a la matemativa para jovenes y adultos. Los temas que se desarrollan abarcan cuestiones vinculadas a los números naturales, cálculos de porcentajes, perímetro de figuras planas, nociones básicas de álgebra elemental y el trabajo con fracciones. Sobre la base de los fundamentos expuestos anteriormente, los contenidos se presentan a partir de situaciones concretas. Intentamos no abundar en tecnicismos, más allá de lo que resulte necesario para el desarrollo y comprensión del tema. Cada capítulo consta de una situación introductoria del tema a desarrollar. A partir de esta situación inicial, en la siguiente sección se despliega la teoría. Luego se propone una guía de actividades y ejercicios para la práctica de los estudiantes. Además, cada capítulo contiene una sección donde se desarrollan cuestiones vinculadas a la historia de la matemática, problemas que permiten reflexionar y profundizar sobre el contenido matemático planteado. Por último, se propone un trabajo integrador con diferentes actividades de cierre e investigación para el estudiante.

Sebastian Vera
Compilador y autor
Prof. de matemática Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS)
Posgrado Didactica de las Ciencias (Matematica-UNGS)
Prof. Bachillerato El Telar y Bachillerato Popular IMPA