Ciclo Básico de Educación Secundaria Escuelas Rurales

MATEMÁTICA

CUADERNO DE ESTUDIO

2

Serie Horizontes

En las provincias donde el Nivel de Educación Secundaria es de 5 años, este material está destinado a 1° año.

La presente publicación se ajusta a la cartografía oficial establecida por el Poder Ejecutivo Nacional a través del Instituto Geográfico Militar por Ley 22.963 y fue aprobada en diciembre de 2007 con número de expediente GG07 2039/5.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología
Cuaderno de estudio 2: Matemática. - 1a ed. - Buenos Aires:
Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2007.
192 p. ; 27x20 cm.

ISBN 978-950-00-0649-1

1. Libro de Textos . 2. Matemática. 3. Educación Secundario. I. Título
CDD 510.712

Pizzurno 935, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN 978-950-00-0649-1

Se terminó de imprimir en Quebecor World Pilar en el mes de diciembre de 2007.

AUTORIDADES NACIONALES

Presidente de la Nación
Dr. Néstor Kirchner

Ministro de Educación, Ciencia y Tecnología
Lic. Daniel Filmus

Secretario de Educación
Lic. Juan Carlos Tedesco

Subsecretaria de Equidad y Calidad Educativa
Lic. Alejandra Birgin

Subsecretario de Coordinación Administrativa
Lic. Gustavo Iglesias

Directora Nacional de Gestión
Curricular y Formación Docente
Lic. Laura Pitman

Directora General
Unidad de Financiamiento Internacional
A.G. María Inés Martínez

Serie Horizontes
Ciclo Básico de Educación Secundaria
Escuelas Rurales

Área de Educación Rural

Guillermo Golzman, *coordinador*
Olga Zattera, *coordinadora pedagógica*
Viviana Fidel, *coordinadora de materiales impresos*

Desarrollo de contenidos

Norma Sanguinetti de Saggese, *coordinadora del Área de Matemática*
Alicia Susana Hevia, Graciela Inés Daroca, María Cristina Bisbal de Labato, *autores*

Producción editorial

Gonzalo Blanco, *coordinacióno*
Doris Ziger, *edición*
Norma Sosa, *corrección*
Santiago Causa, *dirección de arte*
Mariela Camodeca, *diseño de tapa y diagramación*
Martín Bustamante, *ilustración*
Miguel Forchi, *cartografía*
María Celeste Iglesias, *documentación fotográfica*

PROMER - Proyecto de Mejoramiento de la Educación Rural
Préstamo BIRF 7353-AR

Leonardo D. Palladino, *coordinador general*
Martín Sabbatella, *responsable de adquisiciones y contrataciones*
María Cavanagh, *especialista delegada*

Agradecemos especialmente a las instituciones que han autorizado en forma gratuita la reproducción de las imágenes y los textos incluidos en esta obra.

ESTUDIAR MATEMÁTICA

El proyecto anual de trabajo en el *Cuaderno de estudio 2. Matemática* presenta una selección de temas organizados alrededor de los números y las operaciones, la geometría y los procesos de medición, y el tratamiento de la información. Seguramente tenés conocimientos de estos temas por haberlos explorado en años anteriores.

El *Cuaderno de estudio 2* está organizado en dieciséis unidades. Cada una consta de una secuencia de actividades que, con la guía de tu docente y la colaboración de tus compañeros, te permitirán aprender nuevas ideas y formas de expresión. En ellas encontrarás las informaciones y explicaciones que te ayudarán a resolverlas. La serie de actividades de cada unidad está pensada para que la resuelvas en dos semanas de clase; consultá con tu docente cómo vas a organizar la tarea. Siempre podrás volver sobre los temas y unidades cuando necesites consultar o repasar algo.

A medida que avances en el estudio de las unidades irás aprendiendo el lenguaje que se usa en Matemática para describir situaciones reales, experiencias y fenómenos relacionados con los números y las formas geométricas. La experiencia es, en buena medida, la base del conocimiento matemático. Al hacer experimentos con los datos de un problema, verás que se te ocurrirá más fácilmente la forma de resolverlo.

También, a medida que vayas trabajando, tendrás oportunidad de practicar una cantidad de juegos y de crear otros para compartir con tus amigos y tu familia, aún más allá de la escuela, en los ratos que decidas destinar a resolverlos.

Sugerencias para el trabajo con este cuaderno

Las actividades propuestas pueden ser muy diversas: en algunas unidades te sugerimos que busques información o hagas observaciones fuera de la escuela, para desarrollar el conocimiento matemático más allá de lo escolar. Algunas actividades están pensadas para que las resuelvas en forma individual. Otras, que tienen este ícono, deberás resolverlas en forma grupal con tus compañeros. Tu docente decidirá en esos casos cómo organizar la tarea. Cuando necesites buscar y tener preparados algunos materiales, antes de empezar la actividad vas a encontrar una lista con la descripción de ellos junto al ícono.

En la mayoría de los casos, las actividades incluyen trabajos escritos que irás resolviendo en tu carpeta. De ese modo podrás organizar tu tarea, revisar lo que vayas aprendiendo, notar los progresos que vayas alcanzando en el trabajo con cada una de las unidades.

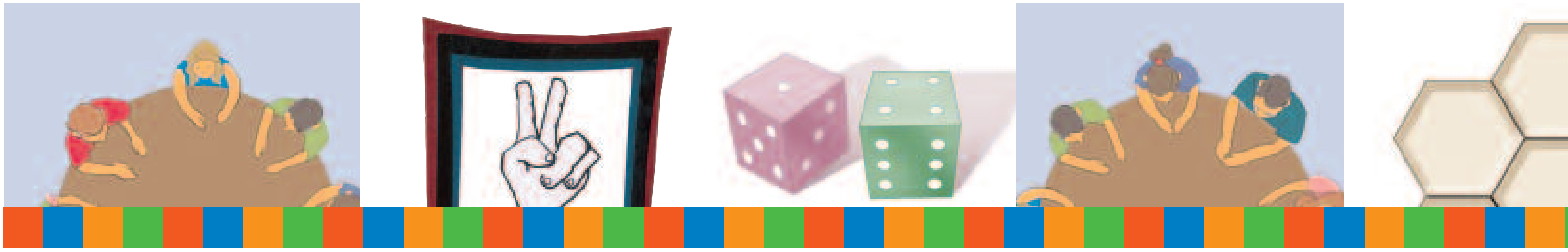
Vas a encontrar algunos textos destacados que contienen conclusiones o reglas matemáticas importantes, algunas nuevas y otras conocidas: prestá especial atención en ellos. Los que aparecen enmarcados, con un signo de admiración al costado, son conceptos fundamentales que hace falta que retengas para el futuro.

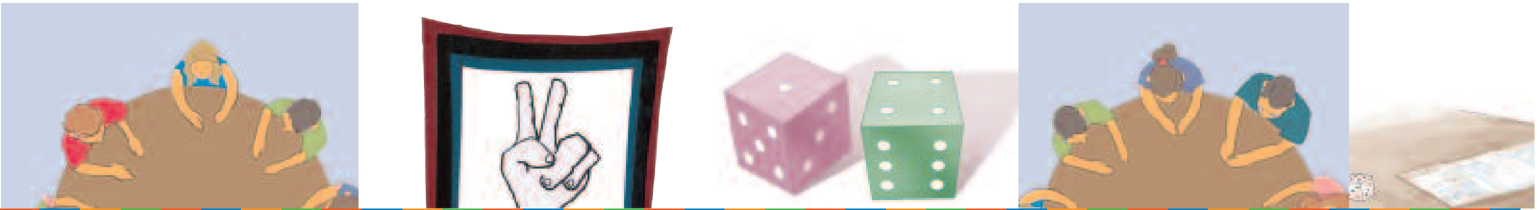
Al finalizar cada unidad encontrarás una sección denominada “Desafíos matemáticos”. Se trata de una serie de enunciados que pueden contener relatos, juegos, curiosidades, adivinanzas o rompecabezas, relacionados o no con los temas que hayas estudiado en la unidad; son para que los encares libremente. De todos modos, al llegar a ese punto conversá con tu docente acerca de la conveniencia de resolver todos o algunos, en tu casa o en la escuela.

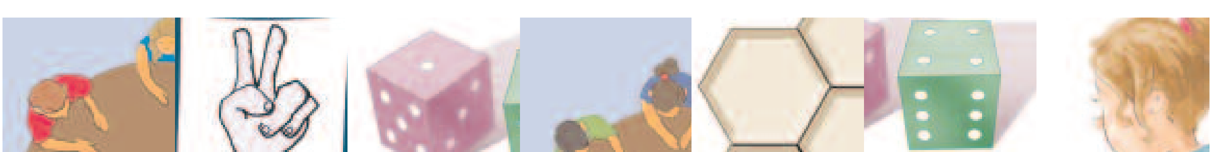
A medida que avances en el trabajo con las unidades podrás elaborar síntesis propias acerca de lo que aprendiste y plantearte nuevos interrogantes para seguir aprendiendo y disfrutando de la matemática.

En muchas actividades te pedimos que escribas reflexiones y comentarios acerca de la tarea, que los compartas con tus compañeros y se los muestren al docente. Para que esto sea posible, es necesario que cada vez que trabajes en tu carpeta, indiques la fecha, la unidad, el número y título de la actividad y la letra de la consigna que estés resolviendo. La prolijidad con la que realices la tarea te facilitará la búsqueda cuando, más adelante, necesites recurrir a tus respuestas anteriores.

Deseamos que no sólo aprendas, resolviendo por escrito actividades en tu carpeta, sino que descubras la presencia de la Matemática en cuanto te rodea y que disfrutes sintiendo que tenés cada vez mayores posibilidades para pensar y comprender el mundo.







UNIDAD 1 Números enteros

En numerosas ocasiones en que necesitamos representar numéricamente cambios y otras situaciones cotidianas para las que no alcanzan los números naturales empleamos números enteros. Con ellos indicamos la temperatura del invierno antártico, la profundidad a la que se encuentra una fosa marina, la fecha en que se fundó Roma, anterior a Cristo. Así decimos, respectivamente, –40 grados; –10.000 m, y año –73. También los usamos cuando se nos presentan fenómenos que exigen contar en dos sentidos, por ejemplo, el dinero ganado y, en sentido contrario, el que se ha perdido.

En todas estas situaciones se hace referencia a un origen o punto de partida convencional que representamos con el número cero: 0 grados de temperatura, para que el agua se transforme en hielo; 0 metros la altura correspondiente al nivel del mar; año 0, el nacimiento de Cristo como el inicio para señalar fechas. Así, con respecto a un origen se representan datos empleando los signos "+" y "– ", para codificar y/o decodificar situaciones relativas.

Esta unidad está destinada a que avances en el conocimiento de los números enteros, sus usos y las operaciones que es necesario hacer con ellos. Verás que los números enteros se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir respetando las reglas de las operaciones en ese campo numérico.

A partir de aquí comienza la tarea con la primera unidad. Para resolver las actividades en forma ordenada y para poder recurrir a tus respuestas cuando necesites revisarlas, cada vez que trabajes en tu carpeta indicá la fecha, el número y título de la actividad y la letra de la consigna que estés resolviendo.

Para realizar la siguiente actividad vas a necesitar alrededor de 60 semillas, piedritas, fichas u otros elementos que sirvan para contar. Leé las instrucciones de cómo preparar el resto del material en la misma actividad.

TEMA 1: CONTAR EN DOS SENTIDOS

Los números enteros son números con signo: hay enteros positivos y enteros negativos. Cada número negativo es el opuesto de un número natural. En el campo de los números enteros, los naturales se escriben anteponiéndoles el signo +.

Consultá con tu docente cómo organizar la tarea en la próxima actividad.

A 1. “Tomo o pongo”

a) Vas a jugar con tus compañeros a “Tomo o pongo”. Para ello deberán construir entre todos el material para poder jugar.

1. Preparen:

- Las semillas, piedritas, fichas u otros elementos que sirvan para contar. Los llamaremos “contadores”.
- Una colección de tarjetas formada por cinco ejemplares de cada una con las siguientes inscripciones:

0	**+1**	**+3**	**−2**	**−4**

2. Lean las instrucciones:

- Pueden participar 2, 3 o 4 jugadores. Antes de empezar a jugar hay que poner 20 contadores sobre la mesa en un montón, mezclar bien las cartas, ponerlas boca abajo formando un mazo y repartir los otros contadores entre los jugadores de modo que a cada uno le toque la misma cantidad.
- El juego consiste en que cada jugador, por turno, extrae una carta del mazo: si es un 0, pierde el turno; si es un número con signo + toma del montón tantos contadores como indica el número; si es un número con signo – entrega al montón tantos contadores propios como indica el número. Las tarjetas extraídas se colocan aparte.
- El juego termina cuando no hay más tarjetas para completar una vuelta con todos los jugadores.
- Gana el participante que tiene más contadores.
- Para variar el juego se pueden fabricar otras tarjetas con inscripciones del tipo: “toma el pozo completo”, “entrega todo lo que tiene”, “le pasa la mitad de lo que tiene al jugador que sigue”, “toma la mitad de lo que tiene el jugador anterior”, “toma lo que tienen los demás jugadores”.
- Si un jugador se queda sin contadores se le puede permitir ir sacando tarjetas a su turno y cumplir sus consignas o quedar en deuda hasta que pueda cumplirlas.

3. Jueguen entre todos los integrantes del grupo a “Tomo o pongo”.

b) Marcos, Pablo y Andrés jugaron cada día de la semana un partido de “Tomo o pongo” usando 65 fichas como contadores. Marcos comenzó con 15 fichas y anotó cada día cuántas fichas más o cuántas fichas menos había logrado. Este es un registro.

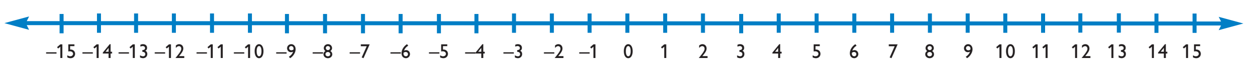
lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
+8	-6	+12	+10	0	-11	-9

1. Trabajá en tu carpeta. Poné como título “Actividad 1: Tomo o pongo”. Escribí los resultados de Marcos ordenados desde el peor hasta el mejor.

2. Respondé las siguientes preguntas:

- ¿Qué indica el signo + delante de los números? ¿Y el signo –?
- ¿Qué día tuvo Marcos su mejor resultado? ¿Y el peor?

3. Dibujá en tu carpeta una recta numérica como esta. Marcá sobre la recta numérica cada resultado de Marcos y escribí debajo el día en que se produjo.



c) Resolvé en tu carpeta la pregunta que plantea la siguiente situación.

El 2 de abril de 1997, la Selección Argentina de Fútbol debía enfrentar a Bolivia en la ciudad de La Paz. El periódico *Olé* publicó la tabla de posiciones de los equipos que jugaban las eliminatorias para el Mundial ´98.

Observá que hay varios pares de equipos que tienen el mismo puntaje. Sin embargo están ordenados según la diferencia de goles. (Gf – Gc). Por ejemplo: Colombia (14 – 6 = 8) está más arriba que Paraguay (10 – 4 = 6).

Posiciones

Equipo	Pts	J	G	E	P	Gf	Gc
Colombia	17	8	5	2	1	14	6
Paraguay	17	8	5	2	1	10	4
Argentina	13	8	3	4	1	11	7
Ecuador	12	8	4	0	4	12	9
Bolivia	10	8	2	4	2	12	8
Uruguay	10	8	3	1	4	6	10
Chile	9	8	2	3	3	11	12
Perú	9	8	2	3	3	9	11
Venezuela	1	8	0	1	7	5	23

En este cuadro figuran:

- los equipos (Equipo)
- los puntos que obtuvieron (Pts)
- los partidos jugados (J)
- los partidos ganados (G)
- los partidos empatados (E)
- los partidos perdidos(P)
- los goles a favor (Gf)
- los goles en contra (Gc)

- ¿Por qué Bolivia está en mejor posición que Uruguay?

En general, si los goles en contra son más que los goles a favor se dice que la diferencia de goles es negativa. En caso contrario, se dice que es positiva. Para poder identificarla, los números que indican una diferencia negativa llevan un signo menos y los que tienen una diferencia positiva, un signo más. Por ejemplo: Bolivia (12 – 8 = +4) y Uruguay (6 –10 = –4).

Los signos + y – delante de un número entero describen situaciones opuestas entre sí.

A 2. Números con signo

Cuando es necesario distinguir situaciones que se producen en un sentido y en el sentido opuesto se recurre a los números con signo.

a) Escribí en tu carpeta los números con signo que corresponden a los siguientes hechos:

1. Adelgazar 3 kg.

2. Perder 9 figuritas.

3. Subir 9 escalones de una escalera.

4. Ganar 30 alfajores en una rifa.

5. Bajar 2 puestos en una tabla de clasificación.

6. Ascender una montaña de 600 m partiendo desde el nivel del mar.

7. Descender 200 m desde la cima de una montaña.

b) Leé el siguiente texto. En él se registran los distintos significados que tienen las situaciones en las que es necesario usar dos series numéricas para contar en dos sentidos opuestos.

Un número con signo más (+) o con signo menos (-) sirve para representar distinto tipo de situaciones:

Una acción que transforma; por ejemplo, modificar la cantidad de contadores de un jugador entregando o tomando contadores.

Una cantidad que tiene sentido contrario a otra; por ejemplo, contadores ganados o contadores perdidos, como en las anotaciones de Marcos.

Una ubicación en el orden de una recta numérica; por ejemplo, el puntaje en un juego como "Tomo o pongo".

Las diferencias entre dos cantidades tomadas en un cierto orden; por ejemplo, la diferencia entre goles a favor y goles en contra.

Los cambios en un proceso; por ejemplo, escalar 9 metros y descender 10 metros.

c) Respondé las siguientes preguntas.

1. ¿Qué significa 0 en cada uno de los cinco ejemplos anteriores?

2. ¿Qué significa +2 en cada uno de los cinco ejemplos?

3. ¿Qué significa –3 en cada uno de los cinco ejemplos?

De ahora en adelante recordá que los números con signo se llaman ***números enteros*** *y que todo número natural es equivalente a un número entero positivo o cero. Por ejemplo, 3 es equivalente a +3. El conjunto de los números enteros está formado por los números enteros positivos, los números enteros negativos y el cero.*

A 3. El orden de los números enteros

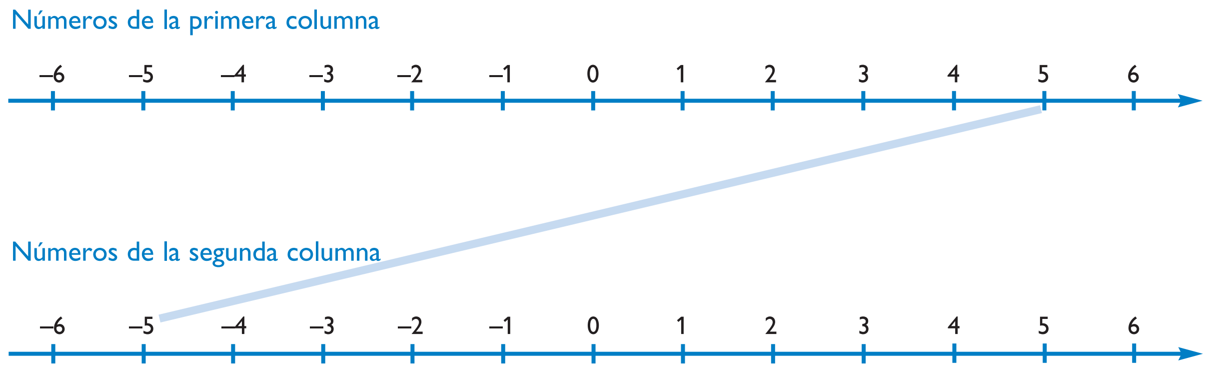
Las situaciones que analizaste en la actividad **1** pueden servir como ejemplo para ayudarte a comprender la relación de orden que caracteriza a los números enteros.

En una recta numérica, el 0 es un punto equidistante de cada par de números enteros opuestos que sólo se diferencian por el signo. Asimismo, si dos números enteros sólo se diferencian por el signo, se representan en la recta numérica en puntos simétricos respecto de 0.

a) Copiá la tabla que sigue y completala: a cada número le corresponde en la recta numérica el que está ubicado en el punto simétrico respecto del 0.

5	–5
–4	4
0	0
	1
–6	
	3
–2	

1. Copiá las siguientes rectas numéricas en tu carpeta y marcá con color, en cada una, los números que se indican. En la primera recta, los de la primera columna y en la segunda recta, los de la segunda columna.



2. Uní con flechas cada número de la primera columna con su correspondiente en la otra. Por ejemplo: el 5 de la recta de la primera columna con el ~~–5~~ de la recta de la segunda columna.

3. Leé la siguiente afirmación y respondé las preguntas.

La tabla y el diagrama de flechas muestran una correspondencia en la que a cada número le corresponde su **opuesto**.

- ¿Cuál es el opuesto de +9?
- ¿Cuál es el opuesto de –1?
- ¿Cuál es el opuesto de 0?

b) Respondé en tu carpeta.

1. Si se toman dos números cualesquiera sobre la recta numérica y vemos que uno queda ubicado a la izquierda del otro, ¿cuál es el mayor?

2. Sobre la recta numérica dibujada en el punto **a**, la punta de la flecha indica un sentido. En el sentido de la flecha, ¿los números enteros crecen o decrecen?

c) Escribí las siguientes expresiones en tu carpeta y completalas escribiendo “es mayor que”, “es menor que” o “es igual a”.

3 .... –8	3 – 7 .... 3 – 3
–6 2	6 – 8 .... 11 – 15
4 + 5 .... 12 – 3	6 – 5 .... 12 – 4

d) Repetí usando “<” en lugar de “es menor que”; “>” en lugar de “es mayor que”; e “=” en lugar de “es igual a”.

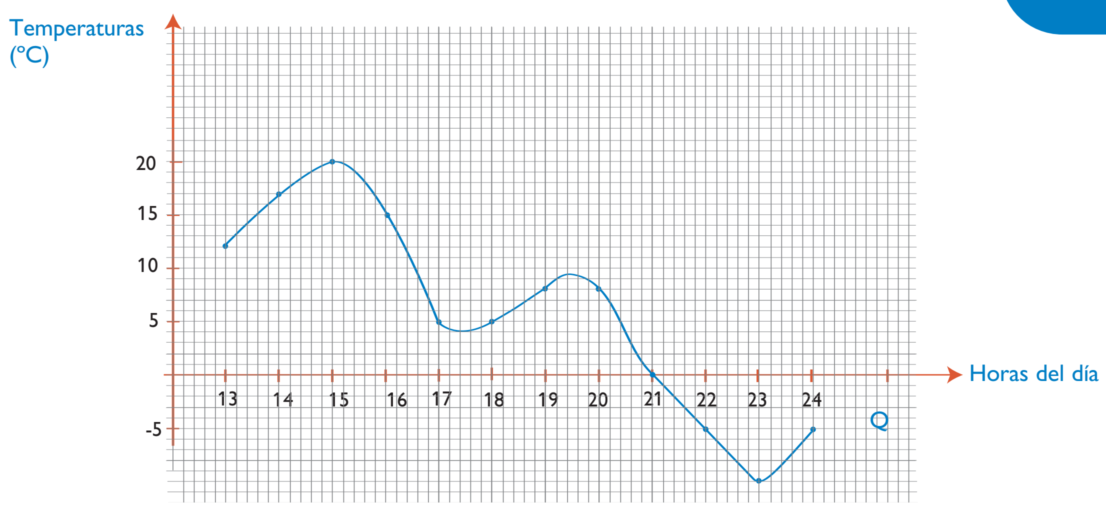
*El conjunto de los **números enteros** está ordenado en dos sentidos: uno, el de la relación “**es menor que**”, y el otro, el de la relación “**es mayor que**”.*

e) Escribí en tu carpeta, de mayor a menor, los números enteros que siguen.

12, –8, –15, 3, 10, –9, 0, –20, 15.

*Cualquier entero positivo es **mayor que** cualquier entero negativo. El 0 no es positivo ni negativo; es menor que cualquier número entero positivo y mayor que cualquier negativo.*

f) El **termógrafo** es un instrumento que registra las distintas temperaturas. Si se grafican en forma continua las temperaturas que marca el termógrafo, se obtiene un gráfico que se llama un **termograma**. Observá el siguiente termograma y respondé en tu carpeta.



1. ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima que se registraron?

2. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura entre las 17 y las 20 horas?, ¿y entre las 13 y las 15?, ¿y entre las 22 y las 24?

3. ¿Entre qué horas la temperatura ha aumentado 3°?

4. ¿Entre qué horas el cambio de temperatura fue de –17°?

5. ¿A qué horas no ha cambiado la temperatura?

6. ¿A qué horas se dio la mayor variación de temperatura?

Hasta aquí exploraste situaciones en las que cobra sentido el uso de números enteros. En las actividades siguientes trabajarás con las operaciones entre esos números: la suma, la resta, la multiplicación y la división.

TEMA 2: LAS OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Un número entero tiene dos partes: el **signo** y el **valor absoluto**. El valor absoluto indica su distancia al 0; cualquier número entero y su opuesto tienen el mismo valor absoluto porque son simétricos con respecto a 0. Por ejemplo, el número entero –5 tiene signo negativo y valor absoluto 5. Su opuesto +5 tiene el mismo valor absoluto y el signo contrario positivo.

El valor absoluto se indica escribiendo entre dos barras el número con su signo, por ejemplo:

$|-8| = 8$ y $|+8| = 8$

Recordá que en la recta numérica los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda del 0. El 0 no es positivo ni negativo; sumar o restar 0 no cambia un resultado.

A 4. Valor absoluto de los números enteros

a) Copiá en tu carpeta estas expresiones y completalas de modo que la igualdad sea verdadera. Si hay más de una solución anotalas todas. Si no hay ninguna, escribí al lado "no tiene solución".

$\mid -7 \mid = \ldots$	$\mid \ldots \mid = 2$	$\mid 1 \mid = \ldots$
$\mid \ldots \mid = -3$	$\mid 0 \mid = \ldots$	$\mid \ldots \mid = 0$

b) En las siguientes expresiones, ¿qué números enteros puestos en lugar de las letras hacen verdadera la igualdad o la desigualdad? Si no hay ninguno, explicá por qué. Si hay una cantidad finita de números posibles anotalos todos. Si existen infinitos, anotá algunos que muestren la tendencia de los demás.

Por ejemplo: Si $|a| > 1$, entonces a puede ser 2, -2, 3, -3, …..8, -8, ….95, -95, ….

1.	$x < -6$	**5.**	$y > -6$
2.	$z = 0$	**6.**	$\mid w \mid < 2$
3.	$a + (-8) = 12$	**7.**	$-x = 3$
4.	$-y < -1$	**8.**	$-b + (-3) = -6$

En la siguiente actividad vas a poder aplicar lo que aprendiste sobre el valor absoluto de los números enteros y las sumas y restas entre ellos.

A 5. Resta de números enteros

a) Durante los días de la semana en que se desarrolló la feria del plato en una Asociación de Fomento hubo ingresos y se efectuaron gastos. Los organizadores decidieron redondear las cifras a pesos para facilitar la tarea de registro.

1. Copiá una tabla como esta en la que se registra la cantidad de dinero, en pesos, que se recibió y la que se gastó cada día.

Día	Ingresos	Gastos	Cantidad mayor	Resultado final del día
Lunes	120	180	Gastos	–60
Martes	132	82		
Miércoles	150	160		
Jueves	156	70		
Viernes	290	141		
Sábado	360	197		
TOTALES				

2. Escribí en la última columna la ganancia o la pérdida, usando para las ganancias el signo + y para las pérdidas, el signo –.

3. Luego de analizar los datos de la tabla, respondé:

- ¿Cuál fue el día de mayores ingresos?
- ¿Cuál fue el día de mayores gastos?
- ¿Cuál fue el día de mayor ganancia?
- ¿Cuál fue el día de mayor pérdida?
- En total, ¿ganaron o perdieron? ¿Cuánto?

b) Escribí cada una de las operaciones que hiciste para completar la última columna del cuadro.

c) Luego de leer el texto, respondé las preguntas.

No olvides que cada número tiene su signo y que, como además se trata de la **reunión** de dos resultados, se usa el signo de la operación suma o adición "+". Por ejemplo: –180 + (+120) = –60. Como podés ver, cuando aparecen dos signos juntos es necesario usar **paréntesis** para no confundir el signo de la operación y el signo propio del número entero. En el cuadro anterior escribiste el importe en pesos de las ganancias (positivas) y de las pérdidas (negativas). Cada una de ellas se escribe con un **signo** y un **número**.

En esta actividad restaste números enteros. Como recordarás, en la operación de **sustracción**, el número del que se parte es el **minuendo** y el número que quitás es el **sustraendo**.

1. ¿Qué sucede cuando se quita un número negativo?

2. ¿Qué sucede cuando se quita un número positivo?

Observá que hay casos en que el número que restaste es negativo y otros en los que es un número positivo. Cuando se tiene que restar un número negativo se obtiene el mismo resultado que si se suma el opuesto de ese número; por ejemplo: –2 – (–5) = –2 + (+5) = +3.

d) ¿Podés restarle a un número otro que sea menor? Si lo hiciste, da el ejemplo y comentalo con tu docente.

e) Copiá una tabla como esta, completala e inventá los ejemplos que faltan.

a	b	a – b	Opuesto de b	a + opuesto de b
+5	+3	2	–3	+5+(–3)= +2
–7	+2			
+6	-9			
+11	–11			
–10	–23			

1. ¿Cómo resultan las columnas *a – b* y *a + opuesto de b*? ¿Qué conclusiones podés sacar?

Restar dos números enteros da el mismo resultado que sumarle al primero el opuesto del segundo.

Consultá con tu docente cómo organizarte para realizar las actividades que siguen y de cuánto tiempo disponés para ello.

A

6. Otras operaciones con números enteros: multiplicar y dividir

Los chicos inventaron una variante con las tarjetas del juego "Tomo o pongo". La llamaron "Tarjetas repetidas". Toman en cuenta sólo los resultados repetidos. Es decir, si un jugador tenía la tarjeta (–2) y no volvía a sacar el mismo puntaje, tenía que ceder el turno al siguiente, ya que sólo podía considerar otra tarjeta igual a la primera. Además, acordaron que no era obligatorio empezar con la tarjeta del primer turno, sino que cada uno podía esperar para elegir su tarjeta. El ganador es el que saca el menor puntaje.

a) Cuando jugaron Daniel y Juan, Daniel sacó 3 veces –4 mientras que Juan obtuvo 3 veces +4.
Daniel, para calcular su puntaje, se dio cuenta de que con la suma (–4) + (–4) +(–4) = –12 había hecho una multiplicación, y escribió: 3 x (– 4) = –12 porque 3 veces (–4) es –12.
Juan dijo que había hecho: 3 x (+4) = +12 y que se había olvidado de que ganaba el número menor; por eso no esperó otro turno para elegir su tarjeta. Vieron que gracias a la distracción de Juan tenían ejemplos de cuentas de multiplicar con números positivos y negativos.

1. ¿Es correcto lo que dijo Daniel?

Los chicos vieron que el **producto** de 3 que es **positivo** por (–4) que es **negativo** da un resultado **negativo**, –12. En cambio, el producto de **dos positivos** como 3 x (+4) da +12 y es **positivo**.

2. Completá los resultados de sacar:

Tarjetas	Operación	Resultado
4 tarjetas (+3)		
5 tarjetas (–4)		
3 tarjetas (–5)		

Reglas de los signos de la multiplicación

Cuando se multiplica un número positivo por otro positivo, da un resultado positivo y cuando se multiplica un número positivo por uno negativo, da un resultado negativo. ¿Qué pasará cuando los dos factores son negativos? La regla para los signos de los resultados de las multiplicaciones de números enteros es:

	Segundo factor	
Primer factor	+	–
+	+	–
–	–	+

Cuando se multiplican dos números enteros de ***distinto signo*** *el resultado es* ***negativo****. Si los dos números tienen igual signo el resultado es* ***positivo****. Esto constituye la* ***regla de los signos de la multiplicación de números enteros****.*

Como ya aprendiste al trabajar con números naturales, la división es la operación inversa de la multiplicación. Responder a la pregunta ¿cuál es el resultado de **12 : 3**? es lo mismo que averiguar ¿cuál es el número que multiplicado por **3** da **12**? La respuesta es **4**. Hasta aquí no encontrás nada nuevo a lo que conocías acerca de números positivos. Si trabajás con enteros tendrás que tomar cada número con su signo y su valor absoluto. A la pregunta ¿cuánto es **(–12) : (+3)**? tendrás que responder con el número x que haga verdadera la relación **(+ 3) . x = (–12)**.

Busquemos x:

- su valor absoluto será 12 : 3 = | 4|,
- respecto de su signo, para decidir si un producto de dos factores es negativo, se usa la regla de los signos de la multiplicación,
- la regla dice que los dos deben tener distinto signo. En forma abreviada se dice que "más por menos da menos",
- el resultado de dividir los valores absolutos del dividendo y del divisor tendrá que ser $|x| = 4$ y el **signo de** x por la regla de los signos es –.

Entonces, comprobás que, en efecto, (+ 3) · (–4) = (–12). Así ves que la regla de los signos de la división de números enteros es la siguiente:

		Divisor	
		+	–
Dividendo	+	+	–
	–	–	+

Cuando se dividen dos números enteros, el cociente tiene por ***valor absoluto*** *el* ***cociente de los valores absolutos*** *del dividendo y del divisor.*
Si los dos números tienen ***distinto signo,*** *el resultado es* ***negativo,*** *y si tienen* ***igual signo,*** *el resultado es* ***positivo****.*

b) Comprobá la regla de los signos de la división completando un cuadro con ejemplos numéricos.

Los textos que leés al finalizar cada unidad recuperan los temas que trabajaste en ella. A veces, como en el que sigue, es conveniente que revises la síntesis a través de algún ejemplo.

Para finalizar

En esta unidad trabajaste con el conjunto de los números enteros que incluye los positivos, los negativos y el cero.

Aprendiste que los números enteros se usan para representar situaciones opuestas; tienen dos componentes: el signo y el valor absoluto. A cada entero le corresponde su opuesto, que tiene el mismo valor absoluto y distinto signo, por lo que, al representarlos en la recta numérica, ambos se ubican en puntos simétricos con respecto a 0.

El 0 es opuesto de sí mismo y no es positivo ni negativo.

Los números enteros hacen posible realizar restas en las que el minuendo es menor que el sustraendo, que no se pueden efectuar entre números naturales; por ejemplo, $3 - 5 = -2$.

Efectuaste sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números enteros. Para operar con estos números aprendiste que hay que considerar su signo y su valor absoluto.

El cuadro siguiente sintetiza todo lo expresado al tomar dos números enteros a y b. La resta de enteros equivale a la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo, por lo que sólo está la columna de sumas, ya que $a - b = a + (-b)$.

Signo		Suma a + b		Multiplicación a · b		División a : b	
a	**b**	signo	valor absoluto	signo	valor absoluto	signo	valor absoluto
+	+	+	$\|a\| + \|b\|$	+	$\|a\| \cdot \|b\|$	+	$\|a\| : \|b\|$
–	–	–	$\|a\| + \|b\|$	+	$\|a\| \cdot \|b\|$	+	$\|a\| : \|b\|$
+	–	el del número de mayor valor absoluto	$\|a\| - \|b\|$	–	$\|a\| \cdot \|b\|$	–	$\|a\| : \|b\|$
–	+						

El signo + indica que el número es positivo y el –, que es negativo.

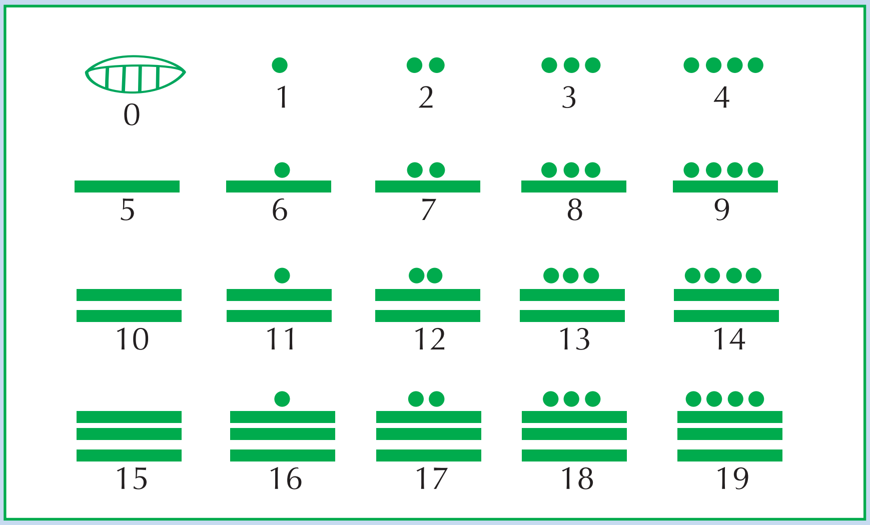
- **Para mostrar todo lo que aprendiste completá una tabla como la anterior tomando, por ejemplo: $a = 5$ y $b = -7$. Resolvé las operaciones indicadas en los casilleros y anotá los resultados.**

Al llegar a este punto conversá con tu docente acerca de la conveniencia de resolver todos o algunos de los siguientes desafíos matemáticos en tu casa o en la escuela.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Sistemas de numeración y un poco de historia

Los mayas pertenecían a un pueblo que vivió en el sur de México y América Central con una rica historia de unos 3000 años. La civilización maya fue una de las culturas más importante de Centroamérica antes de la llegada de los españoles. Crearon un notable sistema de numeración que usaba la notación posicional y el importante concepto del cero, aproximadamente mil años antes de la invención del sistema "arábigo" en la India y casi 2000 años antes de que este se empleara en Europa.
La numeración maya es de base 20, pero sólo requiere tres signos: el que corresponde al cero, el "punto" (el 1) y la "raya" (el 5, probablemente derivado de cinco puntos tachados). En la figura se muestran los signos del 0 al 19.



a) Si los mayas hubieran conocido nuestro calendario, ¿cómo hubieran escrito el día de tu cumpleaños?

2. Temperaturas extremas

En diversos puntos de la Tierra se han registrado temperaturas extremas:

- En el Gran Cañón del Colorado, en los Estados Unidos: 57 °C.
- En San Petersburgo, en Rusia: –32 °C.
- En la Puna, a 4000 metros de altura: –15 °C.
- En Ushuaia, en Tierra del Fuego –18 °C.

a) ¿Cuál es la mayor de las temperaturas?, ¿y la menor?

b) Ordená las temperaturas de mayor a menor.

3. Pares y nones

¿Puede ser que la suma de los veinte primeros números naturales impares sea igual a la suma de los veinte primeros números naturales pares? ¿Por qué?

4. Una fascinante familia de cuadrados

Te presentamos varias igualdades que muestran números elevados al cuadrado.
Observalas y tratá de encontrar alguna regularidad que te permita continuar la serie.

$4^2 = 16$

$34^2 = 1156$

$334^2 = 111556$

$3334^2 = 11115556$

$33334^2 = 1111155556$

a) Escribí otras dos igualdades de la colección.

5. Una curiosidad

Se llaman números perfectos a los que son iguales a la suma de sus divisores, con excepción de sí mismo. El más pequeño es el 6 : 6 = 1 + 2 + 3.

El siguiente es el 28 : 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Después del 28, no aparece ningún número perfecto hasta el 496. El desafío consiste en que pruebes que 496 es un número perfecto.

El cuarto número perfecto es el 8.128, el quinto perfecto es 33.550.336. Se observa que cada número perfecto es mucho mayor que el anterior. Euclides descubrió la fórmula para obtener números perfectos:

$2^{n-1} \times (2^n - 1)$ siempre que $(2^n - 1)$ sea un número primo, es decir que solo sea divisible por 1 y por sí mismo.

¡Este Euclides era un genio!

UNIDAD 2 Números racionales

Los números enteros que estudiaste en la unidad 1 se crearon por la necesidad de resolver problemas que implican contar en dos sentidos opuestos, como las temperaturas sobre cero y bajo cero o las alturas sobre el nivel del mar y por debajo de ese nivel. En esta nueva unidad ampliarás el conocimiento matemático de los campos numéricos explorando el conjunto de los números racionales que incluye, además de los números enteros, las familias de fracciones equivalentes, tanto positivas como negativas. Vas a emplear los números racionales expresados como una fracción o como una expresión decimal. Como en la unidad anterior, usarás la recta numérica como un recurso para aprender y también para representar e interpretar situaciones reales. Además, aplicarás todos esos conocimientos en la resolución de problemas.

Al final de la unidad, igual que en todas las unidades de este cuaderno, encontrarás algunos desafíos matemáticos que seguramente te van a entretener y pondrán a prueba tu creatividad.

TEMA 1: ¿QUÉ SON LOS NÚMEROS RACIONALES?

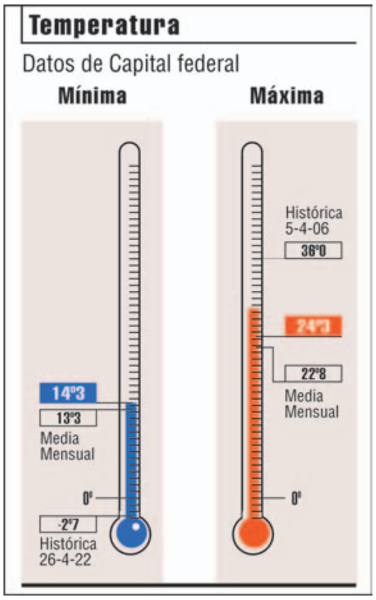
Esta actividad tiene partes que vas a resolver solo y otras en las que sería bueno que trabajes con tus compañeros. Consultá con tu docente para que te ayude a organizar la tarea.

A

1. Fracciones opuestas y equivalentes

En muchas situaciones se presenta la necesidad de contar en dos sentidos opuestos con relación a cantidades que no son enteras sino fraccionarias. A continuación vas a analizar algunas de estas situaciones, y con ellas aparecerá con mayor claridad la necesidad de introducir una nueva clase de números.

a) Si en la escuela o en sus alrededores se han registrado temperaturas negativas, anotá en tu carpeta aquellas que incluyan décimas de grado. Si no fuese así, buscá en la biblioteca algunas referencias sobre temperaturas medias y extremas en diferentes provincias o en otros países, y cuando encuentres ejemplos de temperaturas bajo cero que incluyan décimos de grado, escribilos. Recordá anotar como título: Actividad 1: “Fracciones opuestas y equivalentes”.



b) Observen el siguiente mapa de América del Sur y el texto que lo acompaña.

Este mapa muestra alturas y profundidades en América del Sur. Las referencias indican la cantidad de metros sobre o debajo del nivel del mar que corresponde a cada color.

Por ejemplo:

- En la parte superior de la escala de color, **1000** significa más de 1000 metros de altura sobre el nivel del mar y menos de 3000 m.
- En la parte inferior de la escala de color, **2000** significa más de 2000 metros de profundidad bajo el nivel del mar y menos de 4000 m.

En cambio, cuando se escribe un texto, los metros de altura se indican con un signo **+** (positivo) y los metros de profundidad se indican con un signo **–** (negativo).

Observen que, según la unidad, en ocasiones es necesario usar expresiones decimales, como –3,8 km y –1,5 km. Del mismo modo, en algunos lugares, las marcas en los termómetros ambientales descienden por debajo de 0 ºC de temperatura. Esas marcas se registran como temperaturas negativas. Así –2,7 ºC indica 2 grados y 7 décimos de grado bajo 0.

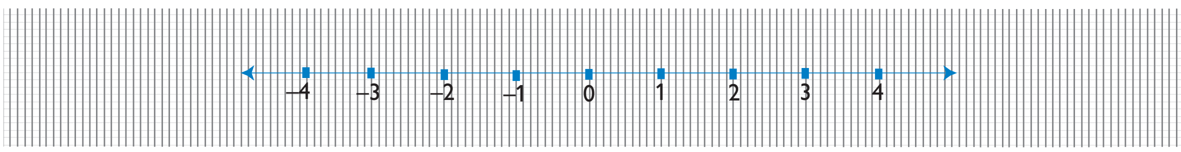
c) Teniendo en cuenta la información anterior y el significado de los signos, localicen las zonas del mapa en las que se encuentran puntos que cumplen con las condiciones descritas en las siguientes referencias:

x: está a una profundidad de –150 m,
y: está a una altura de 495 m,
z: está a una profundidad de –3,8 km,
w: está a –1,5 km de profundidad.

Las temperaturas se pueden representar sobre una recta numérica. Lo primero que podés observar es que algunas temperaturas no se indican con números enteros sino decimales porque el aumento o la disminución de la temperatura no se produce por saltos sino en forma gradual. En efecto: –2,7 ºC o 3,5 ºC son temperaturas con parte entera y parte decimal que corresponden a fracciones con denominador 10: $-\frac{27}{10}$ y $\frac{35}{10}$, respectivamente.

Entre las marcas correspondientes a una diferencia de un grado entero hay que marcar diez partes iguales o sea, diez décimas de grado. Para contarlas hay que fijarse en los espacios entre dos marcas: cada espacio es una décima de grado. Para marcar +3,5 ºC hay que desplazarse desde el punto 0 de origen, 3 enteros hacia la derecha y 5 décimos más en el mismo sentido. Para marcar –2,7 ºC hay que trasladarse desde 0 a 2 grados enteros negativos y 7 décimos más hacia la izquierda.

d) Dibujá en tu carpeta una recta como la siguiente.



1. Hacé una marca con color, sobre la recta que dibujaste, en el punto +3,5 y anotá la temperatura representada.

2. Marcá con color el punto –2,7 y anotá la temperatura representada.

3. Marcá sobre una recta numérica todas las temperaturas que encontraste al principio de la consigna **a** de esta actividad.

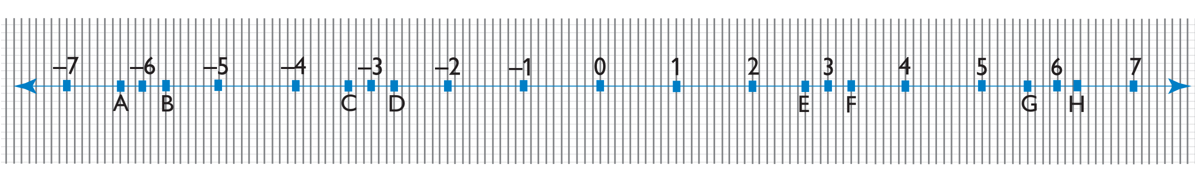
e) En la consigna **b** de esta actividad localizaste en el mapa puntos a los que les corresponden números positivos y negativos. Algunos de ellos no son enteros. Observá en qué unidad de longitud está expresado cada ejemplo.

1. Para unificar las unidades, expresá todos valores en kilómetros aunque tengas que usar números decimales.

2. Dibujá en tu carpeta una recta numérica que abarque desde –4 km hasta +4 km. Ubicá el punto –720 m = –0,72 km y compará con otros compañeros si lo ubicaste bien. Si tienen dificultades consulten con el docente.

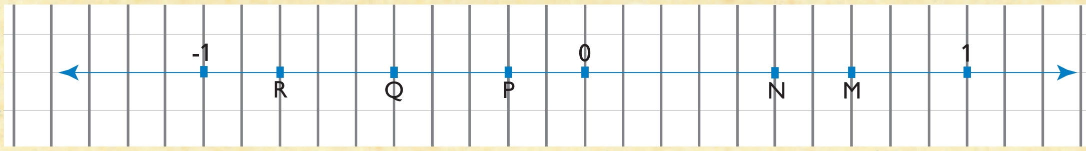
3. Entre dos números enteros, positivos o negativos, es posible señalar sobre la recta numérica fracciones que no sean décimos. Por ejemplo, el pico de una montaña como el Famatina tiene una altura de aproximadamente $6\,\frac{1}{4}$ km o un océano como el Atlántico tiene $-3\,\frac{1}{3}$ km de profundidad media.

Observá la recta numérica y decidí cuál de las marcas indica $6\,\frac{1}{4}$ km y cuál indica $3\,\frac{1}{3}$ km .



4. Compará tus resultados con los de otros compañeros. Si no están de acuerdo, consulten con su docente.

La recta numérica de la figura está dibujada sobre papel cuadriculado para poder leer subdivisiones de la unidad que, como ves, abarca diez lados de cuadraditos.



f) Respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

En la recta:

1. ¿Qué fracción representa 1 cm?, ¿y 1 mm?

2. ¿A qué distancia de 0, en cm, está $\frac{1}{2}$?, ¿y $\frac{2}{4}$?

3. ¿Qué longitud en cm tiene $\frac{1}{5}$? ¿y $\frac{4}{20}$?

4. ¿A qué distancia de 0 está $-\frac{3}{4}$? ¿y $-\frac{9}{12}$?

g) Usá tu regla para averiguar qué número fraccionario corresponde a cada uno de los puntos *M, N, P, Q* y *R*. Escribilos en tu carpeta, expresalos con más de una fracción, usando fracciones equivalentes.

Para corroborar tu trabajo podés consultar la información proporcionada en la actividad que sigue. Revisala junto con el docente para ir comprobando qué es lo que ya sabés y qué es lo nuevo que tenés que aprender.

A 2. ¿Cómo darse cuenta cuando dos fracciones son equivalentes?

Para decidir si dos fracciones son equivalentes se puede hacer uso de la siguiente regla: Multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número se obtienen fracciones equivalentes.

a) Leé el siguiente texto.

1. A veces, el numerador y el denominador de una de las fracciones puede obtenerse multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador de la otra por un mismo número.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$, entonces $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$.

$\frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5}$; entonces $\frac{6}{15}$ es equivalente a $\frac{2}{5}$.

2. En todos los pares de fracciones puede explorarse la equivalencia haciendo las siguientes operaciones:
• multiplicar los denominadores entre sí para obtener un denominador común;
• multiplicar cada numerador por el mismo número que se usó para multiplicar su denominador;
• comparar los resultados; si se obtiene la misma fracción, las fracciones originales son equivalentes.

Por ejemplo, explorar $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{15}$.

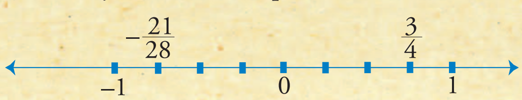
Producto de los denominadores 12 y 15 = 180.

$\frac{8 \times 15}{12 \times 15} = \frac{120}{180}$ y $\frac{10 \times 12}{15 \times 12} = \frac{120}{180}$

Entonces $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{10}{15}$ y su expresión decimal es 0,666…

3. A toda una familia de fracciones equivalentes le corresponde una única expresión decimal, como muestra este ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{21}{28} = 0{,}75$.

4. Dos fracciones de distinto signo, por ejemplo $\frac{3}{4}$ y $-\frac{21}{28}$, no pueden ser equivalentes; una estará a la derecha del cero y la otra a la izquierda:



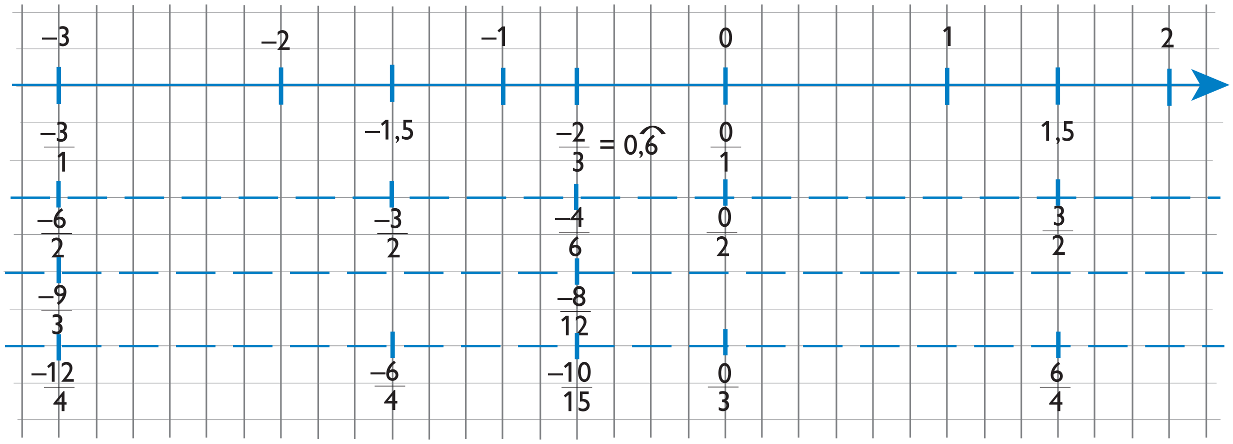
• *Una fracción indica el cociente entre dos números enteros.*
• *El denominador de una fracción no puede ser cero.*

Después de resolver estas actividades habrás visto que, además de los naturales y los enteros, existe otro tipo de números a los que llamamos **números racionales**.

Estos números indican un conjunto de fracciones equivalentes y se representan sobre la recta numérica de tal modo que a un mismo punto le corresponden infinitas fracciones pero un solo número racional.

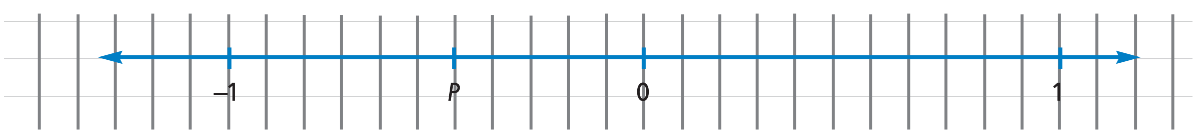
Por ejemplo: 5 pertenece al conjunto de los números naturales y por eso sirve para contar. En el mismo punto representamos el +5 que pertenece al conjunto de los enteros; es decir, está orientado en un cierto sentido con respecto a los demás números. La expresión $+\frac{10}{2}$ también se representa en el mismo punto que el natural 5 y es un número racional; está orientado y le corresponde el mismo punto que al entero +5 ya que es equivalente a una colección de fracciones ($\frac{10}{2}$; $\frac{20}{4}$, ...) cuya expresión más simple es 5.

De igual forma, –2 es entero, y en consecuencia, como número racional, equivalente a la familia de fracciones, $-\frac{4}{2} = -\frac{8}{4} = \ldots$



*Un **número racional** representa toda la clase de fracciones equivalentes a una dada. Habrás visto que a dos puntos simétricos respecto de 0 les corresponden dos números racionales que llamamos **opuestos**.*

b) Dibujá una recta numérica como esta y marcá, además del 0 y del punto *P*, el punto simétrico de *P* con respecto a 0. Llamálo *P*'.



1. ¿Qué número racional corresponde a *P*? ¿y a *P*'?

2. Indicá los números racionales *P* y *P*' con una serie de fracciones equivalentes.

3. Escribí alguna expresión decimal exacta o aproximada que corresponda a *P* y otra, que corresponda a *P*´.

4. Comentá con tu docente tus respuestas.

En este primer tema viste de qué se tratan los números racionales trabajando con conjuntos de fracciones equivalentes y también qué son los números opuestos usando la recta numérica. En las próximas dos actividades vas a estudiar algunas características de los números racionales, a partir de tener presentes las características que ya conocés de los números enteros. Comenzarás en el próximo tema a decidir cuándo un número racional es mayor, menor o igual que otro.

Como estás más o menos en la mitad de esta unidad, consultá con tu docente cómo usar el tiempo para la tarea que te queda por resolver.

TEMA 2: CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

A

3. El orden en los números racionales

Como ya sabés, el conjunto de los números enteros es un conjunto ordenado. Este nuevo conjunto que acabás de explorar, el de los racionales, ¿también estará ordenado como el de los enteros?

a) Anotá en tu carpeta cuál es la mayor temperatura registrada y cuál es la menor de las encontradas en la consigna **a** de la actividad **1**.

Temperatura mayor. ....; ¿dónde se registró?.........................

Temperatura menor. ....; ¿dónde se registró?.........................

b) En una representación de las temperaturas sobre la recta numérica, si nos trasladamos de izquierda a derecha, ¿las temperaturas aumentan o disminuyen? Respondé en tu carpeta y explicá por qué.

c) Copiá los siguientes pares de números y escribí el signo que corresponde. (Recordá que "<" se lee "es menor que", ">" se lee "es mayor que".)

3,5 °C .... –6 °C   –2,7 °C .... 0 °C

1,5 °C .... 0,5 °C   –0,5 °C .... -1.5

d) En el ejemplo de la consigna **a** de la actividad **1** se pueden ordenar los puntos geográficos desde el que está a mayor profundidad hasta el que está a más altura. Su representación se puede hacer en una recta numérica. Construí una que te ayude a decidir si las siguientes desigualdades son falsas o verdaderas.

1. Escribilas en tu carpeta poniendo en el recuadro F (falso) o V (verdadero) según corresponda.

–1,5 km > 0,495 km ☐   0,495 km < 0 km ☐

1,5 km < –3,8 km ☐   –3,8 km > –0,150 km ☐

La representación en la recta numérica muestra que todos los números racionales están ordenados. Podemos concluir que:

> *El conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado.*

4. Ordenando racionales

a) Aplicá lo que has aprendido resolviendo en tu carpeta los siguientes ejercicios. Copiá y completá con <, > o = según corresponda.

$\frac{1}{5}$ .... 0,2 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ 4

$\frac{3}{4}$ .... $\frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{9}{3}$ .... –1,5

b) Escribí las siguientes expresiones completando cada afirmación con un número racional de modo que resulte verdadera.

$-7,1 <$ .... $\qquad$ .... < 0

$\frac{4}{3} >$ .... $\qquad$ .... $< 0,5$

$-5 =$ .... $\qquad$ .... $= 1$

1. ¿Cuántos números racionales podés elegir en cada caso? (Recordá que dos fracciones equivalentes de distinta escritura indican el mismo número racional.) Respondé caso por caso.

En los temas **1** y **2** de esta unidad conociste el conjunto de los números racionales y también cómo está ordenado. En el tema siguiente verás cómo se considera el valor absoluto de los números racionales, y luego, aplicando esta noción, aprenderás a resolver operaciones de suma y resta entre ellos.

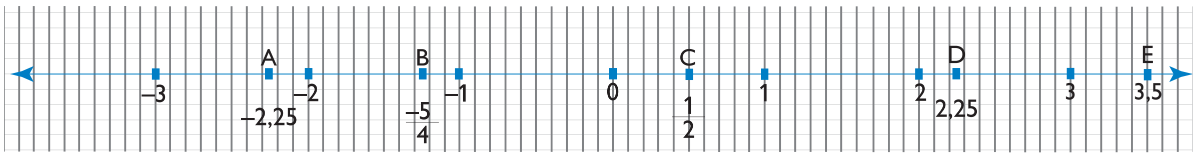
TEMA 3: VALOR ABSOLUTO Y OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

5. ¿Cómo saber el valor absoluto de un número racional?

Una noción importante respecto de los números racionales es la de valor absoluto. En la unidad **1** trabajaste con el valor absoluto de los números enteros como una forma que indica la distancia entre un número y el 0 sobre la recta numérica. Hablar de distancia es hablar de una medida de longitud que es siempre positiva.

En la unidad anterior aprendiste a distinguir la función del valor absoluto de los números enteros de su correspondiente signo. En esta oportunidad verás cómo funciona esto en el campo de los números racionales.

a) Observá la figura y respondé en tu carpeta: ¿cuál es la distancia al punto 0 de cada uno de los siguientes puntos: *A, B, C, D, E?*



Para representar simbólicamente el valor absoluto de x se usa $|x|$.
Por ejemplo: valor absoluto de 3 se anota $|3|$ y, como su valor es 3, se escribe $|3| = 3$; valor absoluto de –3 se anota $|-3|$ y, como su valor es 3 se escribe $|-3| = 3$.

A 6. Sumar y restar números racionales

En la unidad **1** aprendiste a sumar y restar números enteros. Ahora podrás resolver estas operaciones con números racionales. En el caso particular de la resta, recordá que se considera como la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo.

a) Copiá en tu carpeta un cuadro como el que sigue y completalo.

a	b	a + b	a – b	–b	a + (–b)
–2	5				
2	–5				
–2	–5				
5	–2				
–5	–2				
–2	–5				
3,4	1,8				
–3,4	1,8				
3,4	–1,8				
–3,4	$-\frac{1}{8}$				
0	$-\frac{1}{3}$				
0	$-\frac{1}{3}$				
$-\frac{1}{3}$	0				
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$				

1. Fijate que **a** y **b** tienen los valores indicados en las primeras columnas. Para completar la última fila elegí vos un valor.

b) Observá el cuadro y respondé en tu carpeta:

1. ¿Qué operación da siempre el mismo resultado que **a** – **b**?

2. ¿Cuál es el resultado de sumar 0 a un número racional?

3. ¿Cuál es el resultado de una resta en la que el minuendo es 0?

4. ¿Cuál es el resultado de una resta en la que el sustraendo es 0?

c) Buscá los casos del cuadro en los que los dos números racionales **a** y **b** cumplan con la condición enunciada:

- tienen distinto signo,
- el valor absoluto del positivo es mayor que el valor absoluto del negativo.

1. Anotalas en un cuadro como el que sigue en tu carpeta; si quedan filas en blanco completalas inventando otros ejemplos que cumplan las condiciones indicadas.

a	|a|	Sg a	b	|b|	Sg b	a + b	|a + b|	Sg (a + b)

2. ¿Cuál es el signo de la suma?

3. ¿Qué relación hay entre los valores absolutos de la suma y los de los sumandos?

d) Buscá los casos del primer cuadro en el que los dos números racionales cumplan con la condición enunciada:

- tienen distinto signo,
- el valor absoluto del positivo es menor que el valor absoluto del negativo.

e) Construí una tabla como la anterior y respondé las mismas preguntas de los puntos **2** y **3** de la consigna **c**.

f) Observá todos los casos del cuadro en que los dos números tienen signo positivo y analizá qué signo tiene la suma y cómo se relaciona el valor absoluto de la suma con los valores absolutos de los sumandos. Anotá tus observaciones en la carpeta.

g) Hacé lo mismo con todos los casos del cuadro que construiste en los que los dos números tienen signo negativo.

h) Compará tus anotaciones con las informaciones que siguen y conversá con tu docente sobre lo que observes.

Para restar dos números racionales a – b se puede hacer la suma: a + opuesto de b.

En símbolos a – b = a + (–b).

Por ejemplo –3,4 – 1,8 = –3,4 + (–1,8) = –5,2.

3,4 – (–1,8) = 3,4 + 1,8 = 5,2.

Así, la resta es la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo y resultan válidas las propiedades de la suma.

Hasta aquí estuviste explorando los procedimientos para resolver operaciones de adición y sustracción de números racionales. A continuación encontrarás algunas conclusiones sobre los resultados de las operaciones que hiciste. Volvé a mirarlas y pensá en los ejemplos a medida que vayas leyendo las conclusiones, para que te queden más claras cada una de ellas.

Conclusiones sobre los resultados de la suma de números racionales:

• Caso de **dos números positivos**: el resultado es positivo y el valor absoluto de la suma es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Ejemplo: 3,4 + 1,8 = 5,2 y |3,4 + 1,8| = |3,4| + |1,8|.

• Caso de **dos números negativos**: el resultado es **negativo** y el valor absoluto de la suma es la suma de los valores absolutos de los sumandos.

Ejemplo: –3 + –5 = –8 y |–3 + –5| = |–3| + |–5|.

• Caso de **dos números de distinto signo** y tales que el **valor absoluto del positivo es mayor que el del negativo**: el resultado es **positivo** y el valor absoluto de la suma es la diferencia del valor absoluto del positivo menos el valor absoluto del negativo.

Ejemplo: –3 + 5 = 2 y |–3 + 5| = |5| – |–3|.

• Caso de **dos números de distinto signo** y tales que el **valor absoluto del positivo es menor que el del negativo**: el resultado es **negativo** y el valor absoluto de la suma es la diferencia del valor absoluto del negativo menos el valor absoluto del positivo.

Ejemplo: –3,4 + 1,8 = –1,6 y |–3,4 + 1,8| = |–3,4| – |1,8|.

Para finalizar

A partir de la revisión de las características del conjunto de los enteros que viste en la unidad anterior, en esta unidad ampliaste tu conocimiento acerca de los campos numéricos estudiando los números racionales. Seguramente, la representación de los números racionales sobre la recta numérica te ha facilitado visualizar que a un número racional le corresponde una colección de fracciones equivalentes que se ubican en un único punto de la recta. Cuando se trabaja sobre la recta numérica también las relaciones de orden entre los números de este conjunto se ven facilitadas porque los racionales negativos se ubican a la izquierda del cero y los positivos, a la derecha. La distancia de un número racional al punto cero es su valor absoluto y por tratarse de una distancia es siempre positivo.

En esta unidad analizaste con mayor detenimiento las operaciones de adición y sustracción entre los números racionales.

En la unidad siguiente trabajarás sobre las operaciones de multiplicación, potenciación y radicación.

Como al finalizar cada unidad de trabajo, aquí van algunas situaciones interesantes para que las resuelvas como un "desafío matemático". Conversá con tu docente acerca de la conveniencia de resolver todos o algunos de los siguientes desafíos matemáticos en tu casa o en la escuela.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El número desconocido

Si A 0 3 C es un número de cuatro cifras y sabemos que es múltiplo de 6 pero no de 18, determiná los posibles valores de ese número. ¿Será ese número múltiplo de 9? ¿Y de 3? Justificá tus respuestas.

2. La herencia del campesino

Un campesino tenía tres hijos, y toda su fortuna la constituían 11 ovejas. Un día llamó a sus tres hijos para repartir esos animales. Al mayor le dijo que le daba la mitad de las ovejas; al segundo, que le daba la cuarta parte del rebaño, y al menor, sólo la sexta parte. Los hijos extrañados vieron que no se podía cumplir con el pedido de su padre. Fue entonces que un vecino añadió una oveja para que en total fueran 12 y así pudiera repartirlas.
¿Podés indicar qué sucedió y cuántas ovejas recibió cada uno?

3. Una relación matemática

En vinculación con el problema anterior te informamos que hay una relación matemática que dice que todo número es igual a la suma de su mitad más su tercera y su sexta partes. Elegí un número y comprobá con él si esta relación se verifica. Luego probá si esa relación te sirve para conocer la cantidad de ovejas que le tocó a cada uno de los hijos del campesino.

4. Los hermanos de Marcelo

Cuando a Marcelo le preguntaron cuántos hermanos tenía, respondió de un modo bastante raro: “No tengo muchos, un cuarto de esa cantidad es tres cuartos de hermano”. ¿Podés descubrir cuántos hermanos tiene Marcelo?

UNIDAD 3 Potenciación y radicación. Notación científica

La potenciación es una operación que permite escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. En el desarrollo de esta unidad vas a trabajar con potencias estudiando sus elementos —la base y el exponente— sus propiedades y las situaciones en las que es necesario encontrar la operación inversa, es decir, la radicación. Observarás también que esas propiedades son la base de la notación que se usa para escribir números muy grandes o muy pequeños.

En esta unidad se desarrollan tres temas; consultá con tu docente para ver cómo te vas a organizar en el tiempo para resolver las actividades correspondientes a cada uno.
Si disponés de una calculadora, su uso te hará más fácil la tarea y podrás hacer muchos cálculos más rápidamente. Al final, como en todas las unidades, vas a encontrar un apartado con desafíos matemáticos para que te entretengas y al mismo tiempo desarrolles tu creatividad.

TEMA 1: LA POTENCIACIÓN

En esta primera actividad vas a trabajar con la potenciación aplicada a números enteros y racionales, negativos y positivos, y en la actividad **2** analizarás las propiedades de esta operación.

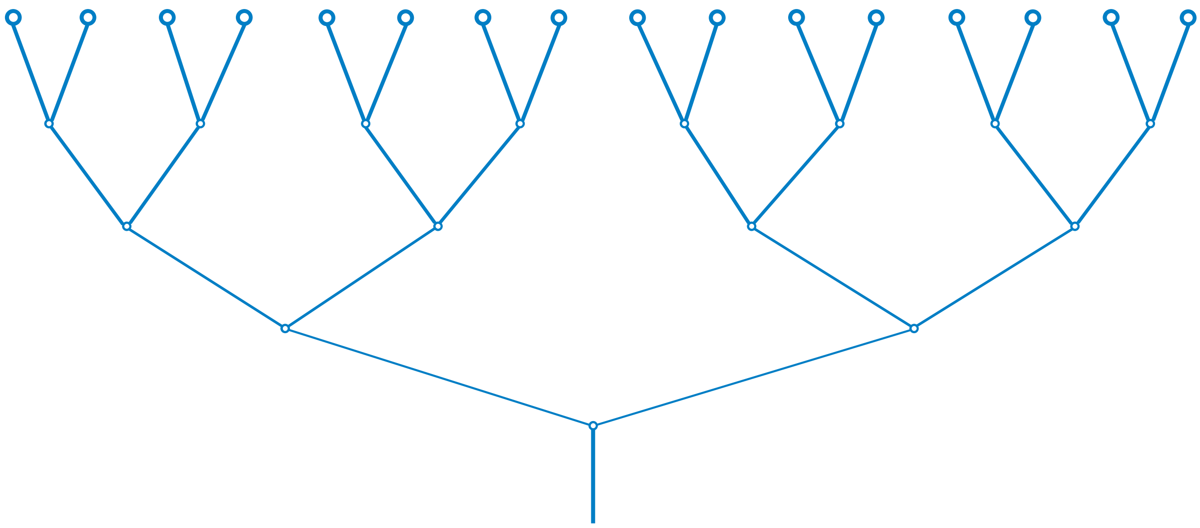
A

1. Potenciación con exponente natural

En muchos casos es útil emplear los llamados diagramas arbolares para contar elementos sin escribirlos uno por uno. Para realizar esos diagramas, los matemáticos se inspiraron en la naturaleza, en la disposición de las ramas de los árboles a partir del tronco y luego de las hojas y de las flores:

• La disposición de las flores es una característica de cada especie; la de algunas plantas constituyen una inflorescencia que es un sistema de ramificación cuyos vástagos terminan en flores.

a) Observá el siguiente esquema que corresponde a una inflorescencia.



b) Respondé: ¿qué cálculo te permite encontrar fácilmente el número de flores de la inflorescencia?

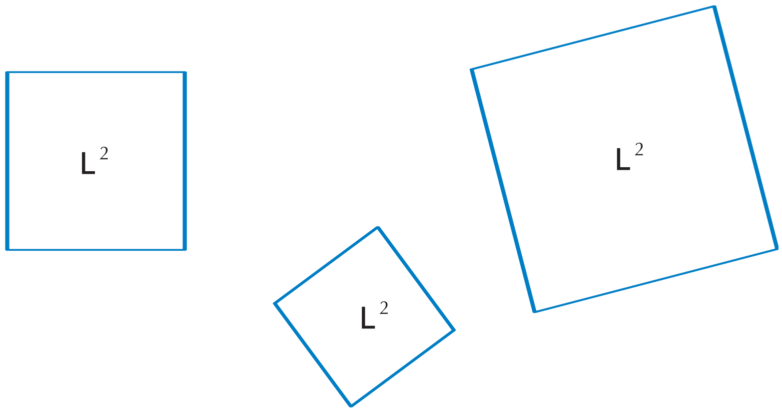
El cálculo $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ puede abreviarse usando la operación de potenciación. En símbolos se escribe 2^5 donde 2 es la **base** y 5, el **exponente**. El resultado de la operación es 32 y se llama **potencia**. El exponente indica el número de veces que se multiplica la base por sí misma.

c) Copiá este cuadro en tu carpeta y completalo con la expresión que es equivalente a cada potenciación y su resultado.

Potenciación	Multiplicación	Resultado
$(-6)^5$	$(-6)\ (-6)\ (-6)(-6)\ (-6)$	-7776
$(-0{,}5)^2$		
$\left(\frac{2}{5}\right)^3$		
	$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$	
	$(3{,}6) \cdot (3{,}6) \cdot (3{,}6)$	
		81

Una de las aplicaciones más interesantes de la potenciación es el cálculo del área de un cuadrado, conocido el lado.

d) Mirá las figuras y realizá la consigna que está a continuación:



1. La siguiente tabla te permitirá observar cómo varían el área y el perímetro de un cuadrado al variar la longitud de su lado. Copiala y completá en tu carpeta los valores de las columnas de área y perímetro para cada una de las medidas del lado de la primera columna.

Lado (cm)	Área (cm^2)	Perímetro (cm)
1	1	4
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

e) Reflexionando en la relación de los valores de la tabla, respondé:

1. ¿Entre qué números enteros está la medida del lado de un cuadrado de área 72,25?

2. Si el lado del cuadrado mide **n**, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

3. Y si el lado se duplica, es decir, si el lado mide **2n**, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

4. La relación lado - perímetro, ¿es de proporcionalidad directa? ¿Por que?

5. Y la relación lado - área, ¿es proporcional? ¿Por qué?

f) Construí en tu carpeta la siguiente tabla con las primeras seis potencias de los números del 1 al 10 y completála. Si tenés una calculadora, podés usarla.

base \ exponente	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4				
3	3	9	27			
4	4	16				
5	5	25				
6	6	36				
7	7	49				
8	8	64				262.144
9	9	81				
10	10	100				1.000.000

Las potencias se leen así: "3 elevado al cuadrado es igual a 9", "3 elevado al cubo es igual a 27", "3 elevado a la cuarta es igual a 81", y así sucesivamente.

Para resolver operaciones combinadas es necesario incluir la potenciación en el orden jerárquico de las operaciones y respetar que:
- Siempre rige la regla de que los paréntesis separan operaciones que deben ser resueltas previamente.
Si no hay paréntesis:
- Las sumas y restas separan más que las multiplicaciones y divisiones.
- Las multiplicaciones y divisiones separan más que las potenciaciones.

g) Analizá los siguientes cálculos, resolvélos y luego explicá el orden en que los resolviste:

1. $7^2 + 2^4 \times 5^4 =$

2. $(0,3 + 2,8) \times 4^3 + 132 =$

h) Ahora tendrás que copiar y completar en tu carpeta el siguiente cuadro de potencias con base entera y exponente natural. Si disponés de calculadora, usala para encontrar los valores de los casilleros vacíos. En la línea horizontal están escritas las bases y en la vertical, los exponentes.

Exponentes

					1	6						
						5						
			81			4			81			
				–8	–1	3	1	8				
36						2						
						1						6
-6	-5	-4	-3	-2	-1		1	2	3	4	5	6

Bases

Por ejemplo: $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= 4 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= (-8)\ (-2) \cdot (-2)$

$= 16 \cdot (-2)$

$= -32$

¡Atención! No trabajarás por ahora en el estudio de la potenciación con exponente 0 o exponentes que no sean enteros positivos. El análisis de esas situaciones requiere un estudio más complejo de la potenciación.

i) Observá los resultados de las potencias con base negativa y respondé:

1. ¿En qué casos son positivos?

2. ¿En qué casos son negativos?

j) Copiá en tu carpeta y completá las siguientes reglas según tus observaciones:

Las potencias de base negativa y exponente par dan resultados ....

Las potencias de base negativa y exponente impar dan resultados ....

A 2. Las propiedades de la potenciación

a) Copiá y completá en tu carpeta cada una de las siguientes igualdades, poniendo los exponentes que corresponden para hacerlas verdaderas:

1. $(-3)^2 \,.\, (-3) \,.\, (-3)^{\cdots} = (-3)^{\cdots}\ (-3)^{\cdots} = (-3)^4$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\cdots} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

b) Observen el primer miembro de cada igualdad de la consigna **a** y respondan.

1. ¿Con qué operación se combina la potenciación?

2. ¿Cómo son las bases de las potencias?

3. ¿Cómo organizaron los exponentes que faltan para obtener la igualdad?

4. Escriban una conclusión sobre el significado de estas igualdades. Si pueden, antes de escribirla en sus carpetas, conversen con sus compañeros sobre las conclusiones que sacaron.

c) Compará el texto que escribiste en el punto anterior con la información dada a continuación y, si encontrás diferencias, con tu docente.

Cuando se multiplican dos o más potencias de igual base, el resultado es una potencia de la misma base con un exponente que es la suma de los exponentes de los factores.
En símbolos: $\boldsymbol{a^x \cdot a^y \cdot a^7 = a^{x+y+z}}$

Recordá que la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma se expresa:

$a\ (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ y también: $a\ (m + n) = a\,m + a\,n$.

La acción de pasar de $a\ (m + n)$ a su equivalente $a \cdot m + a \cdot n$ se llama **distribuir**.

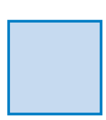
La propiedad distributiva del producto sobre la suma permite cambiar el orden de las operaciones y obtener el mismo resultado. Vas a considerar si la potenciación es distributiva sobre la suma.

d) Elegí dos números positivos como valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

1. Dibujá en tu carpeta un cuadrado de lado ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$).

2. Recortá en un papel de color un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ y un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$.

3. ¿Con qué cálculo se obtiene el área de cada cuadrado? Anotalo sobre cada uno. Por ejemplo, en el cuadrado de lado $\boldsymbol{L}$ hacés la cuenta y anotás: área $\boldsymbol{L^2}$.



L

A medida que vayas pensando en las consignas siguientes anotá en tu carpeta lo que necesites para terminar de resolverlas.

e) Trabajá con los cuadrados que construiste para ver si juntando los dos cuadrados a^2 y b^2 cubrís la misma superficie que con el cuadrado de lado igual a la suma **(a + b)** o sea $(a + b)^2$.

f) Trabajá con los cuadrados de los números **a** y **b** que elegiste como medida de los lados de tus figuras para efectuar dos operaciones diferentes:

1. Suma de cuadrados. $a^2 + b^2 =$

2. Cuadrado de la suma. $(a + b)^2 =$

3. ¿Dan el mismo resultado?

g) ¿Qué relación hay entre la experiencia geométrica y esta comprobación aritmética?

h) Leé la información siguiente y conversá con tus compañeros y con tu docente sobre las conclusiones.

No es lo mismo el cuadrado de la suma de dos números que la suma de sus cuadrados.

Ejemplo: $3^2 + 4^2 \neq (3 + 4)^2$

$9 + 16 \neq 7^2$

ya que $25 \neq 49$

Dados dos números cualesquiera **a** y **b** no es cierto que $a^2 + b^2$ es igual a $(a + b)^2$.

i) Copiá en tu cuaderno y completá cada igualdad para hacerla verdadera poniendo los números que correspondan en el lugar de los puntos suspensivos.

$$2^3 \cdot 3^3 = 6^{\cdots}$$

$$(-0{,}2)^2 \cdot 4^2 = (\ldots)^2$$

1. ¿Cómo son los exponentes de las potencias en cada producto?

2. ¿A qué es equivalente el resultado de multiplicar dos o más potencias de igual exponente?

3. Compará tu respuesta con la información que sigue. Si encontrás diferencias, conversá con tu docente.

Cuando se multiplican dos o más potencias con el mismo exponente, el resultado es igual a otra potencia que tiene:

- *como **exponente**, el **mismo** de los factores,*
- *como **base**, el **producto** de las bases.*

En símbolos: $(a \cdot b \cdot c)^x = a^x \cdot b^x \cdot c^x$

*Esta es la propiedad **distributiva** de la potenciación sobre el producto.*

j) Reunite con tus compañeros para leer el siguiente texto.

Una operación entre dos elementos es conmutativa si cambiando el orden de los elementos se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, la adición es conmutativa porque $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$; la multiplicación es conmutativa porque $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; la división no es conmutativa porque $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \neq \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$. Cuando en matemática se muestra con un ejemplo que una propiedad no se cumple se lo llama contraejemplo. En este caso $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ es un **contraejemplo** que permite afirmar que la división no es conmutativa.

Averiguar si la potenciación es una operación conmutativa o no es lo mismo que preguntarse: ¿se puede cambiar el orden entre la base y el exponente sin que cambie la potencia? O a través de un ejemplo: ¿$\mathbf{2^3}$ es lo mismo que $\mathbf{3^2}$? Y en general, ¿$\mathbf{a^x}$ es lo mismo que $\mathbf{x^a}$? Un contraejemplo permite afirmar que: La potenciación no es una operación conmutativa.

Por no ser una operación conmutativa, la potenciación tiene dos operaciones inversas:

1. Conocida la potencia y el exponente se puede encontrar la base; la operación que permite esta búsqueda es la **radicación**. Por ejemplo, dada la potencia **8** y el exponente **3**, la radicación indica que la base es **2** porque $\mathbf{2^3 = 8}$.
2. Conocida la potencia y la base se puede encontrar el exponente llamado también **logaritmo**; la operación que permite encontrarlo es la **logaritmación**. Por ejemplo, dada la potencia **8** y la base **2**, el **logaritmo de 8 en base 2** es **3** porque $\mathbf{2^3 = 8}$.

De igual modo que en la actividad anterior, en la siguiente vas a tener que seguir algunos razonamientos. En ellos, lo que se explica en cada paso es indispensable para entender el siguiente y todos juntos te llevan a comprender el concepto que estás estudiando. Para poder seguir el razonamiento sin perderte nada, detenete donde veas que algo no te quedó claro y volvé a leer, hacé todas las cuentas, esquemas, gráficos que necesites para darte una idea de lo que se está diciendo con ejemplos y hacé anotaciones en tu carpeta que te sirvan para ir acordándote de los pasos que fuiste siguiendo.

TEMA 2: LA RADICACIÓN

A 3. ¿Qué es la raíz cuadrada?

Tal como acabás de ver, la consecuencia de que la potenciación no sea una operación conmutativa es que tiene dos operaciones inversas. En la actividad **3** trabajarás sobre una de ellas: la radicación.

a) Leé el siguiente texto.

Si tomamos como punto de partida un número y le aplicamos una operación llegamos a un resultado. Para volver al número inicial partiendo del resultado, se aplica la operación inversa.

$$4 \xrightarrow{+\,12} 16 \qquad\qquad 4 \xrightarrow{\times\,4} 16$$

$$16 \xrightarrow{-\,12} 4 \qquad\qquad 16 \xrightarrow{\div\,4} 4$$

$$\boxed{4^2 = 16 \ \text{ y } \ \sqrt{16} = 4}$$

Aplicar a un número la operación **raíz cuadrada** consiste en encontrar los dos factores iguales que dan como producto ese número.

*La **raíz cuadrada** es la **operación inversa** de elevar al **cuadrado**, y se indica con el signo* $\sqrt{\ \ }$.

Aplicar la operación inversa significa obtener como resultado el número primitivo, es decir, el número al que se aplicó la operación directa. Si conocemos el cubo de un número y queremos saber cuál es ese número tenemos que buscar la raíz cúbica, que es la operación inversa de elevar al cubo. Por ejemplo, encontrar la raíz cúbica de 8 es buscar un número **n** tal que **n** · **n** · **n** = 8. En símbolos, $\sqrt[3]{8} = 2$.

En $\sqrt[3]{8} = 2$*: 8 es el **radicando**, 3 es el **índice**, 2 es la **raíz** y el signo* $\sqrt{\ }$ *se llama **signo radical.***

Por ejemplo, si nos dicen que un cuadrado tiene 25 cm^2 de superficie y queremos conocer la medida del lado, pensamos cuál es el número que elevado al cuadrado da 25, o sea, $\sqrt{25}$ y como $\sqrt{25} = 5$, el lado del cuadrado mide 5 cm. Aquí 25 es el radicando, y 5, la raíz.

Número original n → Número elevado al cuadrado n^2 → Número original $\sqrt{n^2} = n$

Por convención, el índice 2 no se escribe y en ese caso la raíz cuadrada queda expresada por el signo radical sin anotar el índice.

Hay números cuyas raíces cuadradas son exactas como $\sqrt{49} = 7$ y $\sqrt{100} = 10$; a estos números se los llama cuadrados perfectos. Podés ver cuáles son algunos cuadrados perfectos en la tabla de potencias que completaste en la actividad **1**, ítem **d**.

Para los números que no son cuadrados perfectos se puede encontrar una raíz cuadrada aproximada. Por ejemplo, si lo que buscamos es la $\sqrt{40}$, es decir, el lado de un cuadrado cuya área sea 40, no hay ningún número entero que elevado al cuadrado dé 40. Sin embargo –siempre que se trabaje con las mismas unidades de medida– sabemos que un cuadrado de área 40 es más grande que uno de área 36 y más pequeño que otro de área 49. Luego podemos ordenar los lados de los tres cuadrados de la misma manera que sus áreas. Es decir que, como el cuadrado de área 36 es menor que el cuadrado de área 40, y que este es menor que el cuadrado de área 49, entonces el lado del cuadrado de área 36 es menor que el lado del cuadrado de área 40, y que este es menor que el lado del cuadrado de área 49.

En símbolos:

cuadrado de área 36 < cuadrado de área 40 < cuadrado de área 49

6 < lado del cuadrado de área 40 < 7

$$6 < \sqrt{40} < 7$$

De este modo no se obtiene un valor exacto pero sí aproximado. Si tenés oportunidad de usar una calculadora podés encontrar que $6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$ y seguir aproximando.

b) Resolvé en tu carpeta:

- $\sqrt[3]{8}$ = 2 porque $2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{125}$ = ... porque ....
- $\sqrt[3]{16}$ = ... porque ....
- $\sqrt[4]{81}$ = ... porque ....
- $\sqrt{144}$ = ... porque ....
- .... < $\sqrt{12}$ < ....

c) Dibujá un cuadrado de 45 mm de lado; si es posible usá papel milimetrado.

1. Calculá su área.

2. Comprobá el resultado con el dibujo que hiciste.

3. Escribí las operaciones que permiten obtener para este cuadrado:

- el área, conociendo el lado;
- el lado, conociendo el área.

TEMA 3: NOTACIÓN CIENTÍFICA

A

4. Números muy grandes o muy chicos

a) En algunas ocasiones expresar un número puede presentar dificultades por tener una gran cantidad de cifras, ya sea por ser muy grande, como la distancia entre planetas, o muy pequeño, como las medidas microscópicas. En el siguiente texto se explica cómo los científicos expresan esos números.

Las potencias de 10 permiten escribir números con su valor exacto o aproximado, en la modalidad denominada **notación científica**.

Así, el radio de la Tierra se indica con **6,37 · 10^6 metros**; si hacemos los cálculos resulta: **6,37 · 1.000.000 metros = 6.370.000 metros**

10.000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

El exponente:
- positivo, indica el número de ceros escritos a la derecha de 1;
- negativo, indica el número de ceros escritos a la izquierda de 1.

*En la **notación científica**, un número se expresa con una sola cifra en la parte entera y hasta dos cifras en la parte decimal, multiplicado por la potencia de 10 correspondiente.*

b) Escribí en tu carpeta usando notación científica:

1. Treinta mil millones de pesos.

2. La distancia de la Tierra a la Luna que es aproximadamente 60 veces el radio de la Tierra.

3. La distancia del Sol a la Tierra que es aproximadamente 149.000.000.000 metros. Expresala en kilómetros.

4. La milésima parte de un mes.

5. La razón entre el peso de un virus que es 10^{-21} kg y el de un niño de un año que pesa 8 kilogramos.

Para finalizar

En esta unidad estudiaste dos operaciones: la potenciación, como operación directa, y la radicación, como la inversa de la potenciación que permite hallar la base conociendo el exponente y la potencia.

Aprendiste que hay propiedades que tienen validez en algunas operaciones y no tienen sentido en otras; por ejemplo, tiene sentido la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma y la resta, pero no ocurre lo mismo con la potenciación ni la radicación.

Para expresar números que por ser muy grandes o muy pequeños requieren muchas cifras en su escritura en el sistema decimal se usa la notación científica, que muchas veces aparece en las calculadoras y computadoras.

Tanto la potenciación como la radicación se emplean para resolver problemas geométricos y calcular medidas de superficies y volúmenes.

A continuación van algunos desafíos matemáticos para que los resuelvas, acordando previamente con tu docente cuándo y dónde realizarlos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Balas como naranjas

En el siglo XVIII, las balas de cañón eran esféricas y se apilaban formando pirámides de base triangular o cuadrada, como se hace hoy con las naranjas en los mercados. En un regimiento de artillería tenían sus balas formando una pirámide. Una tormenta empapó las balas y el coronel ordenó colocarlas en el suelo para secarlas. Cuando lo hicieron formaban un cuadrado perfecto. ¿Cuántas balas había? ¿Cómo era la pirámide?, ¿cuántos pisos tenía?

2. ¿Será cierto?

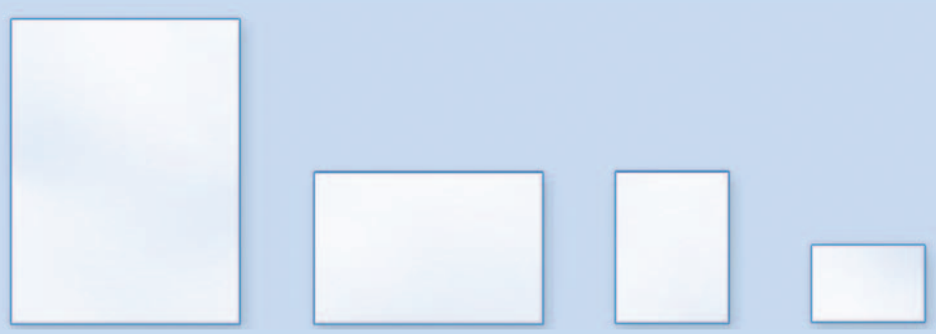
Si los enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ..., se elevan al cuadrado, se obtiene 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, y se observa la siguiente ley:

La cifra de las unidades de estos cuadrados forman un período simétrico:
0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0

3. Un problema para pensar

Veamos un ejemplo de la utilidad de la "notación científica": es un problema en el que se puede pensar y calcular pero, si tuviéramos una hoja de papel suficientemente grande, ¿se podría efectuar la solución en la práctica?

Supongamos una hoja de papel muy fino, papel de seda, de un grosor de tan solo un milésimo de centímetro. Si la dobláramos 4 veces, tomando siempre la hoja plegada por los dobleces que ya hicimos; el grosor del cuadernillo formado sería: 2^4 = 16 milésimas de cm. Si la dobláramos 10 veces; el grosor del cuadernillo formado sería: 2^{10} = 1024 milésimas de cm = 1 cm aproximadamente. Si el número de veces que la dobláramos fueran 17: 2^{17} = 131 072 milésimas de cm = 1,31 m. Si pudiéramos doblarla 27 veces: 227 = 134 217 728 milésimas de cm = 1342 m.
Y puestos a imaginar, si pudiéramos hacerle sucesivamente 50 dobleces a la hoja de papel de seda, la pila de papel obtenida alcanzaría una altura sorprendente: 2^{50} = 1 125 899 906 842 624 milésimas de cm = 11 258 999 068 m. ¡Más de 11 millones de kilómetros!
¿Se podría practicar esa cantidad de dobleces?



4. El calendario

Se trata de sumar los nueve números contenidos en un cuadrado seleccionado en el calendario, solo con que nos digan el número menor del cuadrado.

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

En este caso se trata del número 7.

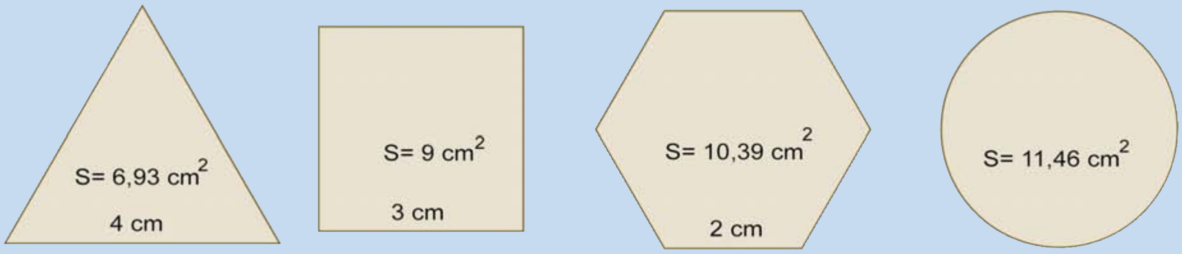
Para averiguar la suma, debemos sumar 8 al número menor que nos dieron y después multiplicar por 9: $(7 + 8) \cdot 9 = 135$.

Esta "receta" ¿vale para cualquier cuadrado de nueve números en el calendario de cualquier año y de cualquier mes? ¿Por qué?

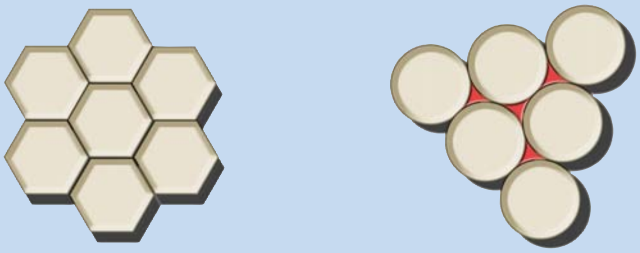
5. Un panal de rica miel

Para almacenar la miel, las abejas construyen sus panales con celdas individuales, que forman un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados. Eso se puede conseguir con celdas triangulares, cuadradas y hexagonales.

Veamos cuáles son las superficies de un *triángulo*, un *cuadrado*, un *hexágono* y un *círculo*, todos de igual perímetro: 12 cm:



La opción empleada por las abejas es la más favorable por ofrecer mayor superficie con igualdad de perímetro sin dejar huecos entre celdas. ¿Cuál es esa opción? ¿Por qué?



UNIDAD 4 Combinatoria y estrategias de conteo

En esta unidad y la siguiente vas a conocer algunas nociones matemáticas que te permitirán relacionar datos para hacer predicciones sobre diferentes fenómenos.

El tema de esta unidad, la combinatoria, es el estudio de todas las formas en que pueden presentarse los elementos, es decir, las variables que intervienen en un mismo fenómeno, caso o problema. Por ejemplo, cómo hacer para saber de cuántas maneras diferentes se pueden acomodar 8 libros en un estante o cuántas comisiones diferentes de 3 alumnos se pueden formar con 4 niñas y 3 varones si en cada una debe haber por lo menos una niña y un varón son problemas de los que se ocupa la combinatoria.

En esta unidad aprenderás algunas estrategias para contar fácilmente el número de resultados posibles de experimentos como los de los ejemplos, en los que se combinan más de una variable. Para introducirte en el tema, analizarás el caso de una familia que está dispuesta a comenzar un negocio.

TEMA 1: COMBINACIONES

A 1. Organizar la información, un primer paso

En esta actividad trabajarás sobre cómo organizar los datos de un problema para obtener las soluciones.

a) Leé con tus compañeros la siguiente situación.

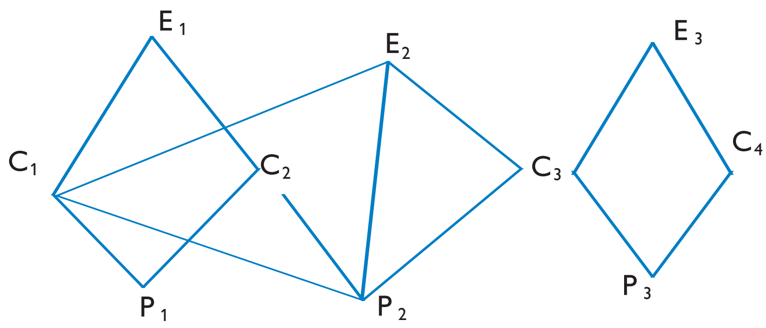
La familia Ocampo ha decidido abrir una casa de comidas sobre la ruta, junto a la estación de servicio. Doña Marcela está haciendo cálculos para ofrecer a los clientes la posibilidad de elegir libremente entre 3 platos fríos como entradas, 4 platos calientes y 3 postres. Todos los miembros de la familia aportan ideas para colaborar con parte del trabajo, atraer clientela y ofrecer un buen servicio.
Don José propone colocar un pizarrón con la oferta de un menú compuesto por un plato frío, uno caliente y un postre a muy bajo precio, y agrega que pueden armarse 7 menúes diferentes, uno para cada día de la semana. A los hijos del matrimonio –Leandro, Ariel y Delfina– les parece una buena idea pero creen que pueden armar más de 7 menúes diferentes con la misma cantidad de platos.

1. Discutan entre ustedes cómo podrían ayudar a los Ocampo en el cálculo de cuántos menúes diferentes compuestos por una entrada, un plato caliente y un postre se pueden ofrecer si cuentan con 3 entradas, 4 platos calientes y 3 postres. Escriban las opciones que vayan encontrando.

2. Después de haber intercambiado ideas entre ustedes, lean qué hicieron los hermanos Ocampo.
Leandro escribió en un papel:

E_1 C_1 P_1 E_2 C_2 P_2 E_3 C_3 P_3 C_4

Luego dibujó algunos trazos para ayudarse a buscar las combinaciones posibles:

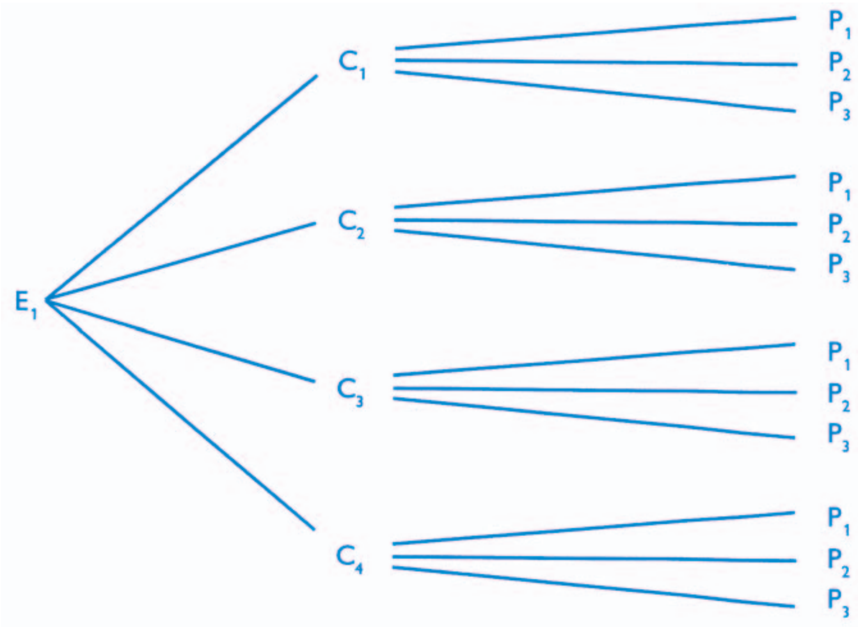


Y dijo: "Esto es muy complicado, pero ¡hay más que siete menúes!".

Ariel propuso: "Es mejor organizar las opciones así"

E_1 C_1 P_1	E_1 C_2 P_1	E_1 C_3 P_1	E_1 C_4 P_1
E_1 C_1 P_2	E_1 C_2 P_2	E_1 C_3 P_2	E_1 C_4 P_2
E_1 C_1 P_3	E_1 C_2 P_3	E_1 C_3 P_3	E_1 C_4 P_3

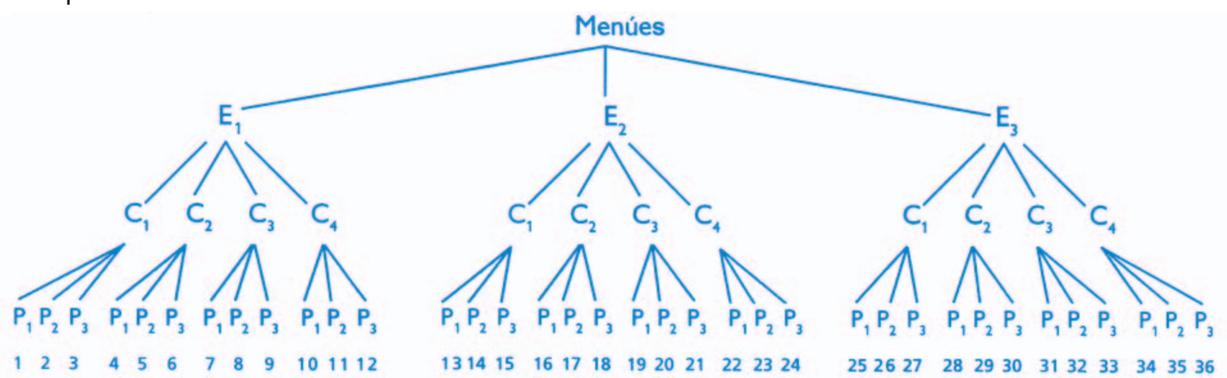
Delfina propuso dibujar un diagrama como este para contar más rápido.



En Matemática, muchas veces es útil representar situaciones haciendo diagramas. Los diagramas son formas de representación mediante esquemas que sirven para organizar una situación matemática, visualizar más fácilmente las relaciones entre sus elementos y facilitar así su resolución.

b) Ahora que conocen cómo organizó el problema cada uno de los chicos, ¿qué procedimiento elegirían ustedes para calcular cuántos menúes diferentes se pueden formar con 3 entradas, 4 platos y 3 postres? Responda cada uno en su carpeta y entre todos escriban un breve comentario explicando cómo lo resolvieron. Muéstrenselo al docente. ¿Se parece al que discutieran en el apartado **1** de la consigna **a**?

c) Este esquema corresponde a la solución que propuso Delfina. Analícenlo y expliquen el procedimiento que lleva a la solución.



*En la actividad siguiente vas a explorar las características de los diagramas del tipo que viste aquí y cómo se pueden obtener fórmulas para calcular combinaciones posibles a partir de ellos. En la unidad **3** ya estuviste trabajando con este tipo de diagramas, los diagramas arbolares.*

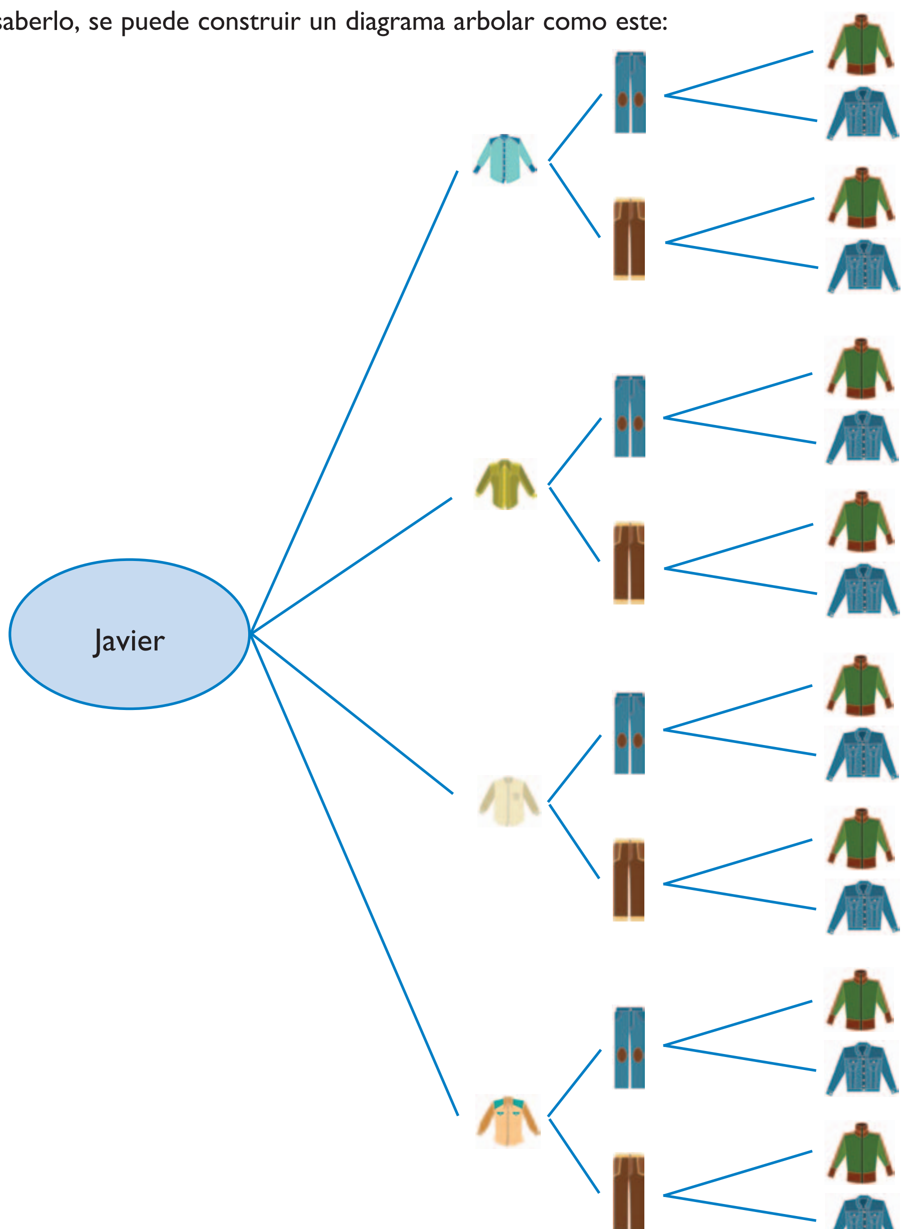
A 2. Los diagramas arbolares en la combinatoria

Los diagramas arbolares brindan la posibilidad de indicar cómo combinar los elementos de un conjunto con los elementos de otros, sin omitir ni repetir ninguno. Los extremos finales de las ramas permiten contar el número de combinaciones posibles que difieren por lo menos en un elemento.

a) Analizá este otro ejemplo con la ropa de Javier.

Javier tiene 4 camisas, 2 pantalones y 2 camperas ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir?

Para saberlo, se puede construir un diagrama arbolar como este:



Ahora, según el diagrama, escribí en números de cuántas maneras diferentes puede vestirse Javier.

b) Resolvé en tu carpeta, dibujando diagramas arbolares, los siguientes problemas.

1. El viaje de la ciudad de Buenos Aires a la de Mar del Plata se puede hacer en avión, en tren o en micro. Cada uno se ofrece en categoría "turista", "servicio plus" o "servicio ejecutivo". ¿De cuántas maneras se puede viajar?

2. Para elegir una comisión en la Junta Vecinal se propusieron 4 candidatos para presidente y 2 candidatos para secretario. Ninguna persona se propuso para los dos cargos; ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerse la elección?

3. Para ir desde el pueblo Arsenal hasta Robles se pueden tomar 2 caminos diferentes: uno de tierra y otro consolidado. Para ir desde Robles hasta Valdemosa se puede elegir entre 3 carreteras: la costera, la de la loma y la autopista. ¿Cuántos trayectos diferentes se pueden recorrer para ir desde Arsenal hasta Valdemosa pasando por Robles?

c) Compará los diagramas arbolares que hiciste para resolver los problemas anteriores. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

1. En los diagramas, ¿cómo se puede contar el número total de combinaciones posibles? ¿Cómo se puede calcular ese número?

2. Escribí las respuestas en tu carpeta, comparalas con las de tus compañeros y mostraselas al docente.

En los diagramas arbolares se ve que, para calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos o más conjuntos diferentes, tomados en cierto orden, se multiplica el número de elementos del primer conjunto por el número de elementos del segundo conjunto y así sucesivamente.
Por ejemplo, en el caso de Javier, la respuesta es que se puede vestir de 16 maneras diferentes porque:

$$4 \times 2 \times 2 = 16$$

camisas pantalones camperas combinaciones

Si llamamos $\mathbf{n_1}$ *al número de maneras diferentes en que se puede hacer una elección, y a continuación se puede realizar otra elección de* $\mathbf{n_2}$ *maneras distintas, entonces las dos elecciones combinadas dan* $\mathbf{n_1 \cdot n_2}$ *combinaciones diferentes.*

En símbolos:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = C$ *donde* $\mathbf{n_1}$ *es el número de elementos del primer conjunto,*
$\mathbf{n_2}$ *es el número de elementos del segundo,*
$\mathbf{n_3}$ *es el número de elementos del tercero*
y $\mathbf{C}$ *es el número de combinaciones posibles.*

En estas actividades trabajaste combinando los elementos de distintos conjuntos (entradas - platos - postres: $3 \cdot 4 \cdot 3$) (remeras - pantalones - camperas: $4 \cdot 2 \cdot 2$) (medios de transporte-categorías: $3 \cdot 3$) (candidatos-cargos: $4 \cdot 2$) (caminos - carreteras: $2 \cdot 3$) y usaste diagramas arbolares para simplificar el conteo de casos numerosos.

El tema siguiente te va a permitir explorar una estrategia de conteo que se aplica para resolver otro tipo de situaciones.

TEMA 2: PERMUTACIONES

Cuando lo que se quiere estudiar son los ordenamientos posibles de los elementos de un único conjunto se habla de permutaciones. Por ejemplo, las maneras diferentes en que se pueden distribuir los cargos de presidente, secretario y tesorero entre 3 personas que fueron elegidas para formar una comisión vecinal es un problema de permutaciones. Los diagramas arbolares también ayudan a contar las diferentes maneras en que se pueden presentar esos ordenamientos.

A 3. Cambios en el orden

a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas y, al concluir, conversá con tus compañeros sobre las formas que encontró cada uno para resolverlos.

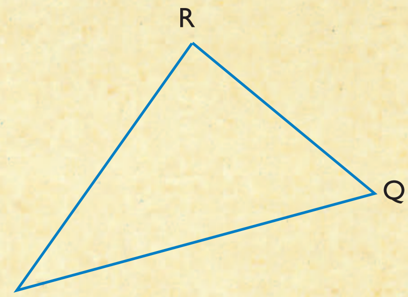
1. ¿Cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden formar con las cifras 2, 4, 5 y 9? Escribilos todos.

2. Luis, Miguel, Javier y Agustín se van a sentar en un tablón para ver un partido de fútbol entre vecinos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar?

3. Si resolviste los problemas anteriores dibujando diagramas arbolares, comparalos: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian? Si no usaste diagramas, explicá cómo resolviste los problemas.

b) Leé la siguiente información sobre las maneras de nombrar un triángulo.

• • • Triángulos



Para identificar un triángulo se mencionan sus 3 vértices.

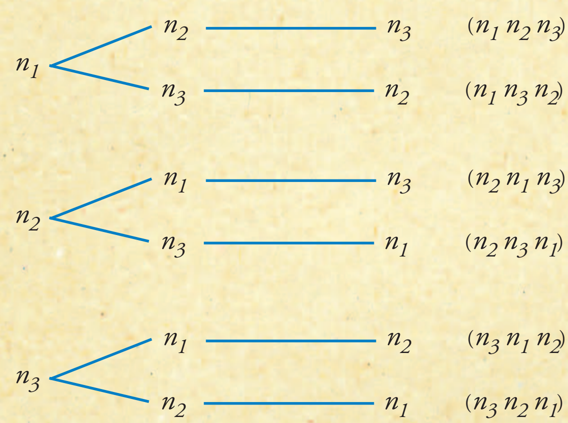
Se puede comenzar por cualquiera y mencionarlos en diferente orden.

Por ejemplo, comenzando por *P: PQR* o bien *PRQ;*
comenzando por *Q: QPR* o bien *QRP;*
comenzando por *R: RPQ* o bien *RQP.*

En total hay seis maneras diferentes de nombrar al triángulo.

Si llamamos ***n*** *al número de elementos disponibles, las posibles disposiciones diferentes en las que se toman todos con distinto orden se llaman permutaciones de n elementos.*

En el caso de cualquier terna de objetos, por ejemplo, los lados de un triángulo o lanas de tres colores para tejer una bufanda a rayas, si llamamos n_1, n_2 y n_3 a los tres elementos, el siguiente diagrama arbolar muestra el número de permutaciones posibles:



Observando las ramas del gráfico se puede escribir que el número de permutaciones de 3 elementos es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Para calcular el número de permutaciones de 4 elementos, se multiplica: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, y para calcular el número de permutaciones de 5 elementos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Cuando se trabaja con n elementos, dos permutaciones se consideran diferentes si por lo menos dos de los n elementos están dispuestos en distinto orden.

c) Respondé en tu carpeta:

- Los problemas **1** y **2** de la consigna **a** de esta actividad ¿se pueden resolver mediante el cálculo de permutaciones? Justificá tu respuesta.

A 4. Combinaciones y permutaciones

Los problemas que siguen te permitirán aplicar lo que aprendiste en esta unidad. En ellos, el uso de los diagramas arbolares y la realización de cálculos a partir de las fórmulas estudiadas te facilitará la obtención de las posibles soluciones.

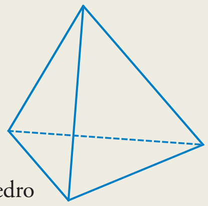
a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas.

1. Si usás las diez cifras desde el 0 hasta el 9, ¿cuántos números de 3 cifras diferentes se podrían formar? Explicá cómo lo podés calcular y respondé si se podría usar 0 en la cifra de las centenas? ¿Por qué?

2. En cada página de un cuaderno hay 28 renglones. Si en cada renglón escribieras 12 de los números del problema anterior, ¿cuántas páginas de cuaderno necesitás para escribir los 648 números posibles?

3. Ponele letras a los cuatro vértices del tetraedro.

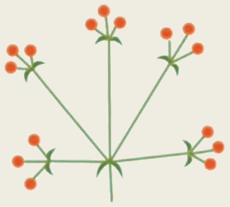
- Nombrá los vértices de la base de todas las formas distintas que sea posible.
- Nombrá al tetraedro de todas las formas distintas que sea posible, sin olvidarte ninguna.


Tetraedro

4. Los siguientes esquemas corresponden a especies florales distintas. Representan inflorescencias, es decir, sistemas de ramificación de los tallos que terminan en flores y que son características de cada especie floral. Escribí, en cada caso, el cálculo que permite conocer el número de flores de cada inflorescencia.


Umbela de umbelas


Racimo de racimos


Umbela formada por umbelas más pequeñas

Para finalizar

En esta unidad, analizaste situaciones en las que se pueden hacer sucesivas elecciones y utilizaste diagramas arbolares para resolverlas. Esta es una estrategia que te facilita el cálculo del número de combinaciones entre los elementos de diferentes conjuntos y también del número de permutaciones en los elementos de un único conjunto.

Te preguntarás si en alguna profesión hay quienes trabajan con estas estrategias. A propósito, es bueno que sepas que la combinatoria está muy vinculada con el cálculo de probabilidad y estadística que es el estudio de los mejores modos de acumular y organizar la información para poder inferir conclusiones. Y ese es justamente el tema de la próxima unidad.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. En la cancha de bochas

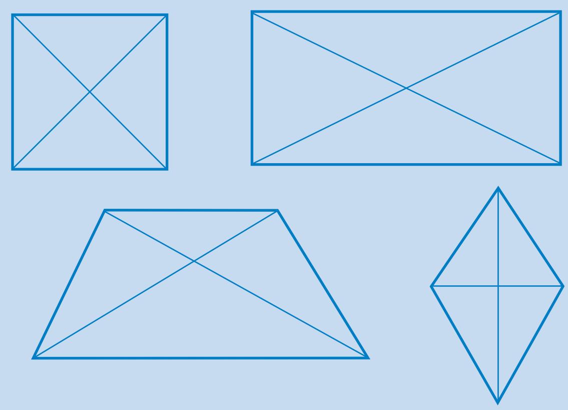
Diez amigos se reúnen a jugar a las bochas. Juegan tres partidos y al final de cada uno anotan en una planilla el nombre del ganador. ¿De cuántas maneras diferentes pudieron completar la planilla?

2. Cuadriláteros

a) Analizá qué cuadrilátero se forma según que las diagonales sean:

1. iguales o distintas,
2. se corten o no en el punto medio,
3. se corten o no perpendicularmente.

b) Armá un diagrama arbolar con todas las alternativas. ¿Por qué al recorrer algunas de las ramas se obtienen cuadriláteros del mismo tipo que en otras?



3. Números y más

a) ¿Cuántos números mayores que 10 y menores que 100 no tienen cero? ¿Cómo pensás que se puede averiguar?

b) Formá todos los productos posibles de dos números eligiéndolos entre 2, 3, y 5.

1. Sin repetir los factores.
2. Repitiendo factores.
3. ¿Cuál es el producto mayor? ¿Y el menor?

4. A ordenar

¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar seis libros en una estantería?

5. Los caballeros de la mesa redonda

Los señores Pérez, Salinas, González y Rizzo y sus esposas compartieron una mesa redonda. Se sentaron de forma que:

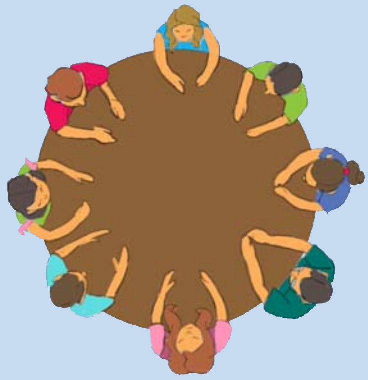
a. ninguna mujer se sentó junto a su marido,

b. no había dos mujeres juntas,

c. enfrente de Salinas se sentó Rizzo y,

d. a la derecha de la esposa de Salinas, se sentó González.

¿Quién se sentó entre Salinas y Pérez?

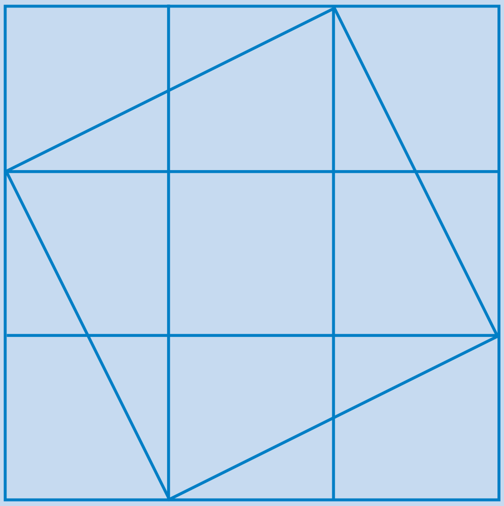


6. Cuadrados en cuadrados

En un cuadrado se pueden insertar otros cuadrados. De entre ellos, considerá aquellos cuyos vértices son puntos de intersección de las cuadrículas con los lados del cuadrado inicial.

1. En un cuadrado como este, ¿cuántos cuadrados con esas condiciones se pueden dibujar?

2. ¿Y en cuadrados de 4 x 4?, ¿y de 5 x 5?, ¿y de 6 x 6? Ampliá tu estudio a cuadrados con dimensiones diferentes.



UNIDAD 5 Probabilidad

En esta unidad vas a introducirte en el mundo del cálculo de probabilidades, es decir, vas a enterarte de cuáles son las estrategias matemáticas que permiten predecir cuándo un acontecimiento va a ocurrir siempre de la misma manera, cuándo es seguro que no ocurrirá o cuándo es probable que pase de un modo o de otro.

A medida que avances en el desarrollo de esta unidad distinguirás los sucesos inciertos – o aleatorios – de los que son imposibles y los sucesos seguros de los que son inciertos, y verás cómo se puede calcular la probabilidad de que ocurra un suceso.

*Para realizar los experimentos de la actividad **2** vas a necesitar: una moneda y dos dados. Andá buscando los materiales con anticipación.*

TEMA 1: CÁLCULO DE PROBABILIDADES

A 1. Imposible, 0; Seguro, 1

a) ¿ Podrías afirmar que hay cosas que jamás se puede esperar que sucedan?

1. Probá tu respuesta con el siguiente listado de experimentos y de sucesos que se pueden esperar como resultado de ellos.

- Arrojar un dado y obtener un número mayor que 6.
- Arrojar dos dados y obtener como suma un número menor que 13.
- Arrojar dos dados, restar los resultados y obtener como diferencia 6.
- Arrojar una moneda y obtener cara.
- Encontrar entre los renglones de esta página uno que tenga 150 letras.
- Arrojar un dado y que salga un número par.
- Encontrar una persona que tenga 3 m de altura.
- Dar vuelta un tazón con piedrecillas y que no caiga ninguna.
- Arrojar una piedra hacia arriba y que luego caiga.
- Esconder una piedra en un puño y que otra persona adivine en qué mano está.
- Observar que el Sol se pone por el Este.
- Colocar un trozo de hielo en agua tibia y que se derrita.
- Calentar agua a 100 °C y que no hierva.

2. Examiná cada uno de los experimentos de la lista, seleccioná aquellos que considerás como “sucesos imposibles”.

3. Copiá el listado en tu carpeta y agregá otros dos ejemplos que se te ocurran.

b) Releé el listado anterior, seleccioná y copiá de la lista los que consideres “sucesos seguros” y agregá otros dos ejemplos que se te ocurran.

c) Releé los listados que escribiste en tu carpeta. Compáralos con los de un compañero. Si tienen alguna diferencia, analicen en cada caso si los experimentos están correctamente seleccionados como sucesos imposibles o como sucesos seguros. Mostraselos a tu docente.

d) Volvé a mirar el listado y fijate en los experimentos que no copiaste en los puntos anteriores. Esos son ejemplos de **sucesos probables** pero no seguros.

No hay ninguna duda acerca de cuántos días va a tener cada uno de los meses del año o de que el primer día de un nuevo año es el 1º de enero. Tampoco se duda de que el día posterior a un sábado será domingo.

Cuando se puede afirmar con toda certeza que algo va a ocurrir, como en el caso de los hechos anteriores, se dice que se trata de un **suceso seguro**. En cambio, hay otros acontecimientos cuyo resultado no se puede predecir con certeza porque dependen del azar. Por ejemplo, si se arroja al aire una moneda, no se puede asegurar si quedará cara o ceca hasta que haya caído. En los estudios de probabilidad se habla de experimentos y de sucesos. Son experimentos las experiencias que se hacen para obtener resultados y son sucesos los distintos resultados que se obtienen haciendo los experimentos. Por ejemplo, el **experimento** que consiste en arrojar una moneda tiene dos **resultados** o **sucesos posibles**: cara y ceca.

*En Matemática, la probabilidad de que ocurra un suceso se puede medir asignándole un número. A los sucesos imposibles les corresponde la **probabilidad 0** y a los sucesos seguros, la **probabilidad 1**. Los demás sucesos posibles pero no seguros tienen una probabilidad comprendida entre 0 y 1.*

Al efectuar un experimento es importante considerar la probabilidad de ocurrencia (éxito) y de no ocurrencia (fracaso) de determinado resultado.

Se llama probabilidad de un suceso (P(s)) a la razón entre el número de casos favorables (f) y el número total de casos posibles (t). En símbolos, $P(S) = \frac{f}{t}$. *Por ejemplo, la probabilidad de obtener un 3 al arrojar un dado es la razón entre 1 (caso favorable) y 6 (casos posibles); o sea que* $P(3) = \frac{1}{6}$.

En la siguiente actividad vas a calcular la probabilidad de un suceso a partir de experiencias cuyo resultado no es seguro ni imposible porque dependen del azar, por ejemplo: arrojar una moneda al aire, el lanzamiento de un dado, o de dos dados simultáneamente, y el juego "Piedra, papel y tijera".
Es posible que parte de esta actividad la resuelvas en tu casa y que para otras necesites reunirte con un compañero. Consultá con tu docente cómo organizar la tarea.

A

2. Cuatro situaciones

Esta actividad consiste en la resolución de cuatro experimentos diferentes que te van a permitir analizar distintas situaciones de probabilidad.

a) Primer experimento: arrojar una moneda al aire

Seguramente habrás jugado muchas veces al "cara o ceca" con una moneda. La tirás al aire y la moneda cae con alguna de sus dos caras hacia arriba: solo hay dos opciones, "cara" o "ceca".

a) Realizá la experiencia, registrá las veces que sale cara y anotá las respuestas en tu carpeta:

1. Tirá la moneda al aire 10 veces; ¿cuántas veces resulta cara?

2. ¿Y cuando la arrojás 20 veces?

3. ¿Y cuando la arrojás 50 veces?

4. Si la tiraras 100 veces, ¿cuántas veces creés que resultará cara?, ¿y si la tiraras 1000 veces?

5. ¿Creés que el número de "cecas" será muy distinto al número de caras? ¿Por qué?

6. ¿A qué fracción se aproxima la razón, es decir, el cociente, entre el número de "cecas" y el número de tiros?

En esta experiencia, el número de casos posibles es 2: cara y ceca.

La probabilidad de que al lanzar una moneda resulte cara es:

$$P(\text{cara}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

La probabilidad de que en el mismo lanzamiento no resulte cara es: $P(\text{no cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

La suma de ambas probabilidades es $P(\text{éxito}) + P(\text{fracaso}) = 1$, o sea $0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

b) Segundo experimento: lanzamiento de un dado

1. Tirá el dado 50 veces y registrá en tu carpeta, en una tabla como esta, los números que aparecen en la cara superior. Podés dibujar un palito cada vez que obtengas el número. Cuando hayas hecho 4 palitos dibujá el quinto atravesando los anteriores. Así, te van a quedar dibujados grupos de 5 palitos que te facilitarán el conteo al final.

Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Palitos que registran las tiradas						
TOTAL						

2. Si tenés oportunidad de trabajar con otros compañeros, sumen los resultados de todos, cara por cara, y escríbanlos en una tabla como esta:

Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Suma de los resultados						

3. Fijáte si los números que indican el total de veces que apareció cada cara del dado son muy diferentes.

4. ¿Cuál es la conclusión de esta experiencia?

En el lanzamiento de un dado, las seis caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba; de este tipo de observaciones surge la siguiente relación:

Si queremos que al lanzar un dado resulte el número 2, su probabilidad es: $P(2) = \frac{1}{6}$ porque el dado tiene una sola cara con el número 2 y tiene seis caras diferentes.

Lanzamiento de un dado						
Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Probalidad	$P(1) = \frac{1}{6}$	$P(2) = \frac{1}{6}$	$P(3) = \frac{1}{6}$	$P(4) = \frac{1}{6}$	$P(5) = \frac{1}{6}$	$P(6) = \frac{1}{6}$

Al observar el cuadro que sintetiza el lanzamiento de un dado, se comprueba que las 6 caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba.

Dos o más sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir se llaman ***equiprobables****.*

Si una experiencia se repite pocas veces, los resultados suelen parecer caprichosos. En cambio, a medida que se la reitera un número importante de veces, se puede observar que los resultados adquieren cierta regularidad vinculada con la probabilidad del suceso.

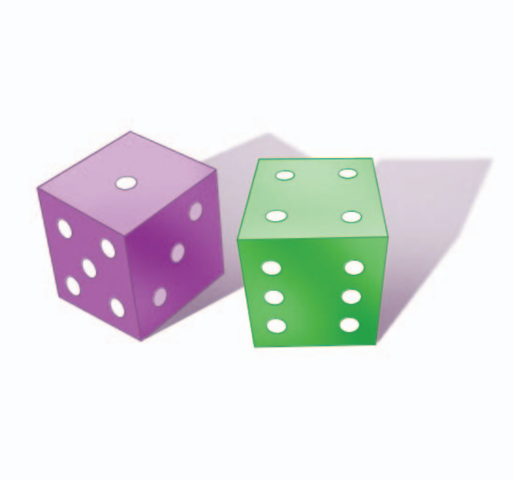
Después de un número suficientemente alto de pruebas, la probabilidad de un suceso se identifica con la frecuencia relativa. Se trata de una estimación que se considera más fiable a medida que aumenta el número de pruebas. La frecuencia relativa es un número que muestra en qué proporción se repite cada caso favorable con respecto al total. Suele expresarse como porcentaje.

Se llama ***frecuencia relativa*** *de un suceso al cociente entre el número de éxitos y el número total de experiencias.*

c) Tercer experimento: lanzamiento de dos dados

1. Para que esta experiencia te resulte más fácil utilizá dos dados de distinto color o de diferente tamaño. Para calcular el número de casos posibles, completá una tabla como la que aparece abajo y que indica en las columnas los resultados posibles de uno de los dados y en las filas, los del otro dado. Escribí en cada casilla la suma de las dos caras posibles: la que encabeza la fila y la que encabeza la columna.

2. ¿Cuántas sumas posibles registraste en el cuadro?



+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6				10		

3. Para analizar si alguna suma tiene más probabilidad de salir que otras, completá una tabla como la siguiente en la que se muestran todas las posibilidades. Vas a indicar las sumas del cuadro anterior que dan el mismo resultado. Te damos como ejemplo las sumas 1, 2, 3, 4 y 12.

Resultado de la suma	Formas distintas de obtener el mismo resultado	Número de formas distintas
1	Suceso imposible	0
2	1 + 1	1
3	1 + 2; 2 + 1	2
4	1 + 3; 2 + 2; 3 + 1	3
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12	6 + 6	1
Total de sucesos distintos: ……		Total de formas distintas:……

4. Observá la tabla anterior y respondé las preguntas en tu carpeta.

• Cuando se tiran simultáneamente dos dados, ¿cuántos resultados distintos puede tener la suma?

• ¿Cuántos casos dan como suma 7?

• ¿Cuántos casos dan como suma 8?

• ¿Cuántos casos dan como suma 11?

• ¿Todos estos sucesos tienen la misma probabilidad?

• ¿Cuál de todas las sumas tiene mayor probabilidad de ocurrencia?

5. Copiá la siguiente tabla y completala con la probabilidad de cada una de las sumas. Para calcularla recordá la definición.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	3	10	11	12
Probabilidad	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				

6. Leé el siguiente problema y escribí en tu carpeta todos los comentarios que te sugiera la situación.

Dos jugadores, **A** y **B** juegan a arrojar simultáneamente dos dados y a calcular la suma. Si la suma es 6, 7 u 8, el jugador **A** se anota un punto. Si la suma es distinta de esos números, el jugador **B** se anota un punto.

7. ¿Considerás que **A** y **B** tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

d) Cuarto experimento: "Piedra, papel y tijera"

1. Si ya conocés el juego, jugá con algún compañero. Si no lo conocés, leé el recuadro siguiente y luego practicá con otro chico o con algún familiar.

Piedra, papel o tijera

Dos jugadores empiezan el juego cada uno con una mano escondida tras la espalda. A la voz de "¡Ya!" muestran al mismo tiempo la mano que tenían tras la espalda, en una de las siguientes posiciones:

La mano cerrada representa la piedra.

Todos los dedos extendidos representan el papel.

Dos dedos extendidos representan la tijera.

Se gana según las siguientes reglas:
- La piedra rompe la tijera.
- La tijera corta el papel.
- El papel envuelve a la piedra.

Dicho en otras palabras, la piedra le gana a la tijera, la tijera le gana al papel y el papel le gana a la piedra.

2. Si dos personas, **A** y **B** juegan a "Piedra, papel y tijera" puede suceder que ambas muestren lo mismo al mismo tiempo, o bien, que no coincidan. Hacé un diagrama arbolar para analizar las posibilidades del juego y respondé en tu carpeta las consignas siguientes.

- ¿Cuántos empates pueden producirse?
- ¿En cuántos puede ganar el jugador **A**?
- ¿En cuántos puede ganar el jugador **B**?
- Que gane el jugador **A**, que gane el jugador **B** y que se produzca un empate ¿son sucesos equiprobables? ¿Por qué?

Ahora que ya hiciste algunos experimentos en los que se ponen en juego cálculos de probabilidad, seguí animándote con otros más complicados para profundizar en el tema.

A 3. Otros experimentos

a) Hacé un diagrama arbolar en tu carpeta para analizar los sucesos esperables cuando se arrojan al aire dos monedas al mismo tiempo. Si es posible, para resolver las preguntas, conversá con un compañero.

1. ¿Cuántos son los sucesos posibles?

2. ¿Qué suceso es más probable: una cara y una ceca, dos caras o dos cecas? ¿Por qué?

b) Hacé otro diagrama arbolar para registrar cuando se tiran al aire tres monedas juntas y respondé:

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 cecas?

2. ¿La probabilidad de obtener 3 caras es igual que la de obtener una cara y dos cecas?

3. Si se tratara de tirar una sola moneda, ¿vale la pena hacer un diagrama arbolar?

4. Mostrale tu cuaderno al docente y conversá con él sobre la utilidad de los diagramas de árbol.

c) El cuadro que sigue resume el análisis de los juegos de azar con los que estuviste trabajando. Leelo atentamente, volvé a leer lo que escribiste en tu carpeta y hacé las correcciones que sean necesarias.

Experimentos	Sucesos posibles	Probabilidad
Arrojar una moneda	Cara – ceca Ambos sucesos tienen la misma probabilidad	P(cara) = P(ceca) = $\frac{1}{2}$
Arrojar un dado	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 son sucesos equiprobables	La probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{6}$
Arrojar dos dados	La suma puede ser 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 No todos son sucesos equiprobables	La probabilidad de que la suma sea 2 o 12 es $\frac{1}{6}$ 3 u 11 es $\frac{1}{18}$ 4 o 10 es $\frac{1}{12}$ 5 o 9 es $\frac{1}{9}$ 6 u 8 es $\frac{5}{36}$ 7 es $\frac{1}{6}$
“Piedra, papel y tijera”	Gana **A**, gana **B**, empate. Son sucesos equiprobables	La probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{3}$
Arrojar dos monedas	Cara-cara; Cara-ceca = Ceca-cara; ceca-ceca	P(cara-cara) = P(ceca-ceca) = $\frac{1}{4}$ P(cara-ceca) = $\frac{1}{2}$

Para finalizar

En el desarrollo de esta unidad aprendiste a calcular las probabilidades de éxito en juegos relacionados con el azar. Estás en condiciones de aplicar lo que aprendiste a la revisión de los juegos matemáticos que fuiste armando con tus compañeros. Por ejemplo, podés analizar en “Tomo o pongo”, en la unidad 1, si todos los sucesos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

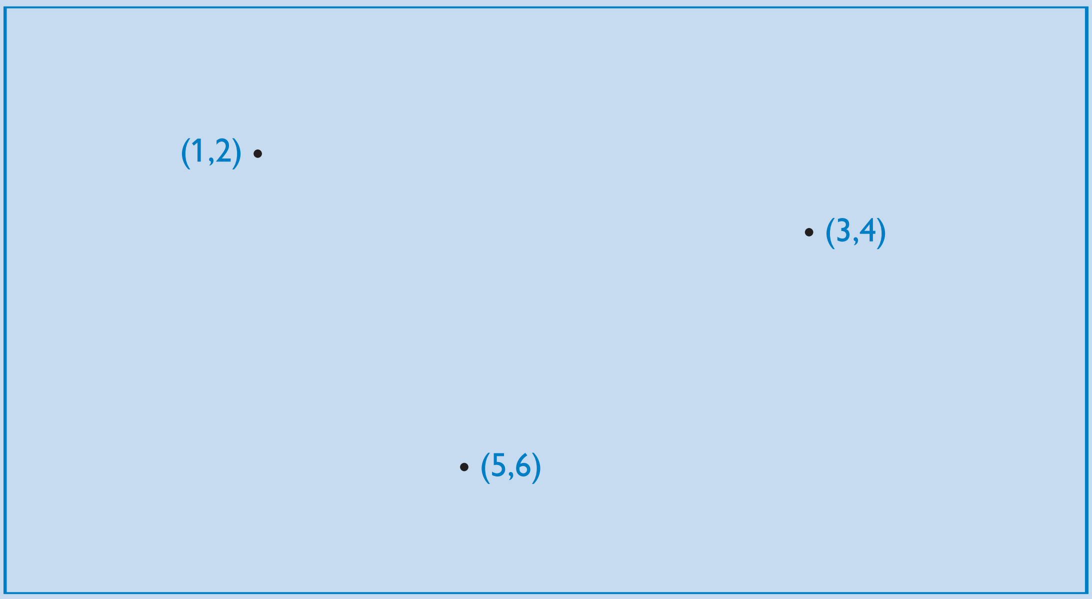
En sus comienzos, el cálculo matemático de probabilidades estuvo muy vinculado con el estudio de los juegos de azar. Más adelante, su evolución facilitó la inducción científica que permite plantear conclusiones con cierta generalidad sobre un tema de interés, a partir de los registros de hechos y observaciones experimentales, como en el caso de la Estadística. Cuando se dispone de una cantidad importante de información acerca de algún objeto en estudio, la teoría de la probabilidad ayuda a la Estadística y a sus aplicaciones en las ciencias. Esto ocurre por ejemplo cuando se quiere estudiar la propagación de una epidemia, probar un medicamento, calcular la cantidad de agua potable o el número de escuelas necesarias para una población en los próximos años o estimar cuántas semillas deben sembrarse para obtener un determinado número de plantas.

Ahora preparate para enfrentar los desafíos matemáticos de la página siguiente con los que descubrirás casos interesantes de cálculos de probabilidad y de otro tipo de cálculos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El juego del caos

Necesitás un dado, una regla que tenga los números marcados, un lápiz rojo y... mucho tiempo.
Toma una hoja de papel tamaño oficio, o una cartulina o un pliego de papel afiche, y marcá tres puntos cualesquiera que no estén alineados, como si fueran los vértices de un triángulo. Indicalos con (1,2), (3,4) y (5,6).



- Elegí arbitrariamente un punto "negro" de partida y arrojá un dado.
- Marcá el punto medio de la distancia que existe entre el punto "negro" de partida y el punto que tenga el número que ha salido en el dado que arrojaste. Este será el nuevo punto "negro" de partida.
- Arrojá el dado de nuevo y repetí el procedimiento para encontrar un nuevo punto "negro".
- Así otra y otra y otra vez...

Este juego no termina nunca... Jugá cada vez que puedas, invitá a otros chicos para aumentar las tiradas del dado, guardá la hoja de papel para observar qué va ocurriendo a medida que pasa el tiempo y las tiradas del dado.
El diseño resultante es asombroso.

UNIDAD 6 Transformaciones geométricas

Ya habrás descubierto que en muchas de las creaciones humanas se encuentra presente la Geometría. Desde la antigüedad se puede ver la existencia de esta ciencia en los dibujos y diseños hechos por el hombre, donde se aprecian cálculos de relaciones espaciales. Te asombrará saber que casi toda la Geometría que estudiás en la escuela sigue la misma teoría que escribió el matemático griego Euclides hacia el año 300 a.C.

En esta unidad, que es la primera de este año en la que tratarás contenidos de Geometría, trabajarás con las figuras geométricas que ya conocés para descubrir transformaciones que no modifican la forma ni el tamaño y que permiten no sólo resolver problemas sino también producir bellos diseños. Una de esas creaciones son las guardas que habrás observado, por ejemplo, en telas, tejidos, piezas de alfarería, decoración de edificios y monumentos. Las hay de variados diseños y en ellas se encuentran figuras geométricas que se repiten como si se hubiesen puesto en movimiento.

Los temas que vas a ir descubriendo a lo largo de la unidad —las transformaciones (movimientos y simetría) y los movimientos en el plano (traslación y rotación)— te van a ir dando las claves para comprender la construcción de esos diseños.

TEMA 1: TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

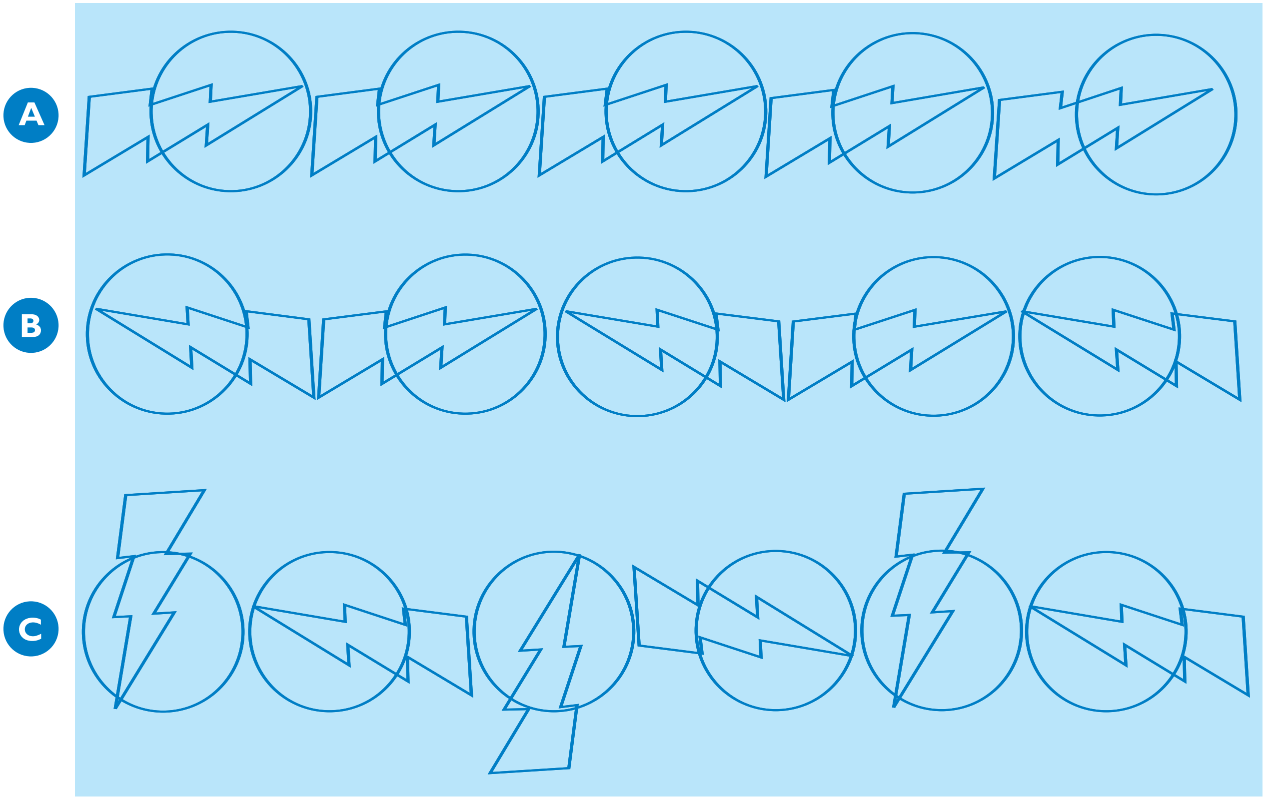
Las actividades de este tema te ofrecen la posibilidad de conocer movimientos que permiten desplazar figuras en el plano sin cambiar su forma ni sus dimensiones
Consultá con tu docente cómo te vas a organizar para realizar estas actividades y cuánto tiempo le vas a dedicar a completar cada una de ellas.

Para realizar las actividades de esta unidad necesitás un espejo de mano plano con un borde recto, papel de calcar, papel cuadriculado, cartulinas y los útiles de Geometría.

A 1. ¿Qué movimientos se usan para hacer guardas?

En las imágenes de esta actividad se han combinado distintos desplazamientos de figuras para construir guardas.

a) Observá estas guardas *A*, *B* y *C*.

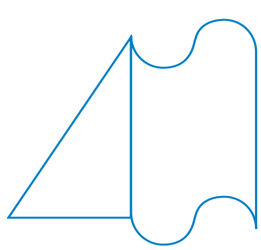


1. ¿Cuál creés que es la guarda más fácil de dibujar?, ¿y la más difícil? ¿Por qué?

2. Anotá lo que pienses. Registrá en qué se parecen y en qué se diferencian las guardas.

b) Para comprobar tus ideas vas a dibujar tres guardas con otro motivo de base al que le aplicarás los mismos desplazamientos que observaste en **a**.

1. Calcá el motivo siguiente y recortalo en cartulina para usarlo como molde.



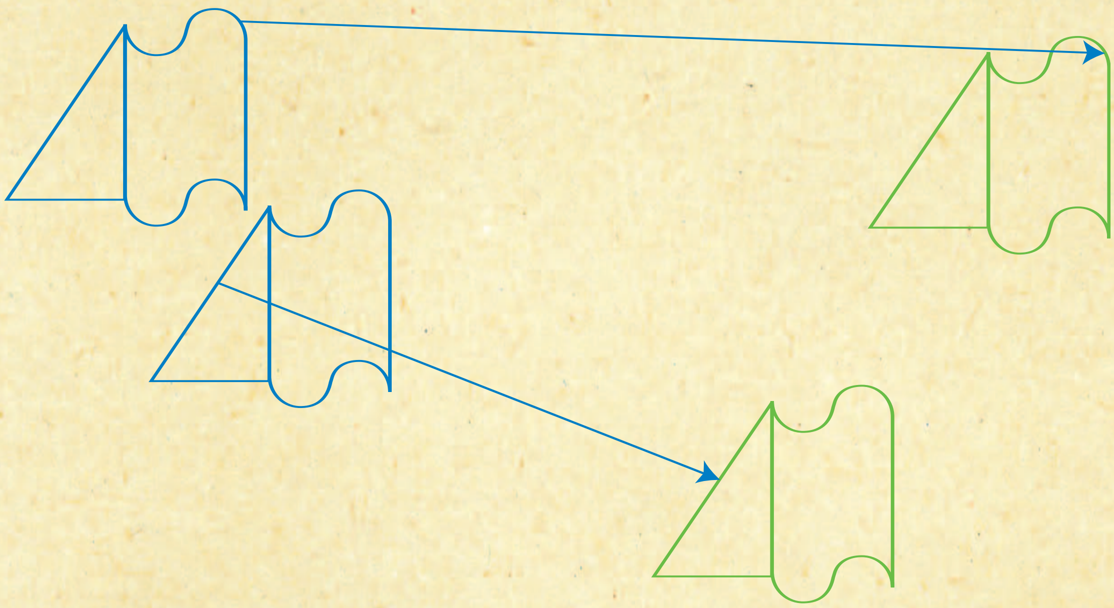
2. Pasá un lápiz por el contorno las veces que sean necesarias para dibujar guardas con movimientos similares a los que aparecen en A, B y C. Realizá cada una de los motivos en una hoja grande.

3. Anotá para cada uno qué movimientos tuviste que hacer con el molde para construirlos.

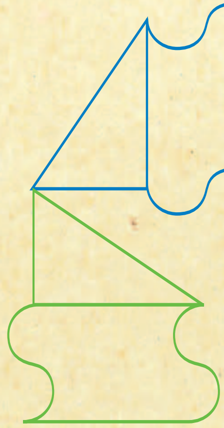
c) Leé la siguiente información y comparala con tus anotaciones:

Para formar las tres nuevas guardas hubo que trasladar el molde. En un caso fue suficiente con realizar giros; en cambio, en otro fue necesario dar vuelta el molde en el aire y dibujar el modelo como si se lo viera en un espejo.

Al mover el molde deslizándolo según una dirección, sin girarlo, se obtiene una imagen de la figura inicial de la misma forma y el mismo tamaño. En matemática se dice que se ha aplicado un movimiento de **traslación**. Se lo denota mediante una flecha que indica la dirección y el sentido del desplazamiento.

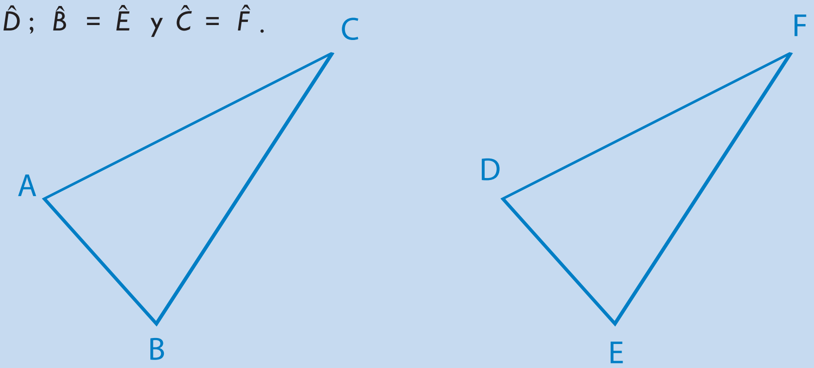


En la guarda **C**, al girar el molde y dibujar las nuevas figuras, realizaste una **rotación**. Esta transformación tampoco modificó la forma ni el tamaño de la figura original, sólo cambió su ubicación.

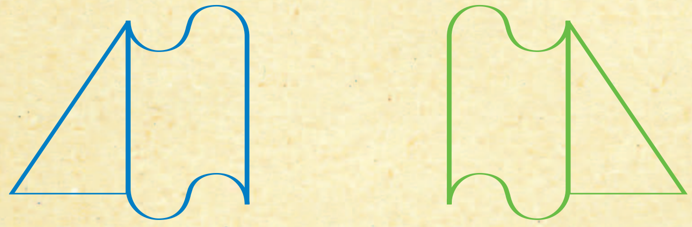


Al realizar una traslación o una rotación se obtiene una nueva figura que es la imagen de la primera. Esta imagen se puede superponer sobre el modelo original y coincide exactamente con él, pues no se modificaron su forma ni su tamaño.

Cuando dos figuras que se superponen coinciden exactamente se dice que son congruentes.Por ejemplo, si dos triángulos ABC y DEF son congruentes anotamos $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$. *Los lados de estos triángulos son congruentes* AB = DE; AC = DF; CB = FE. *Y también son congruentes sus ángulos* $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$ y $\hat{C} = \hat{F}$.



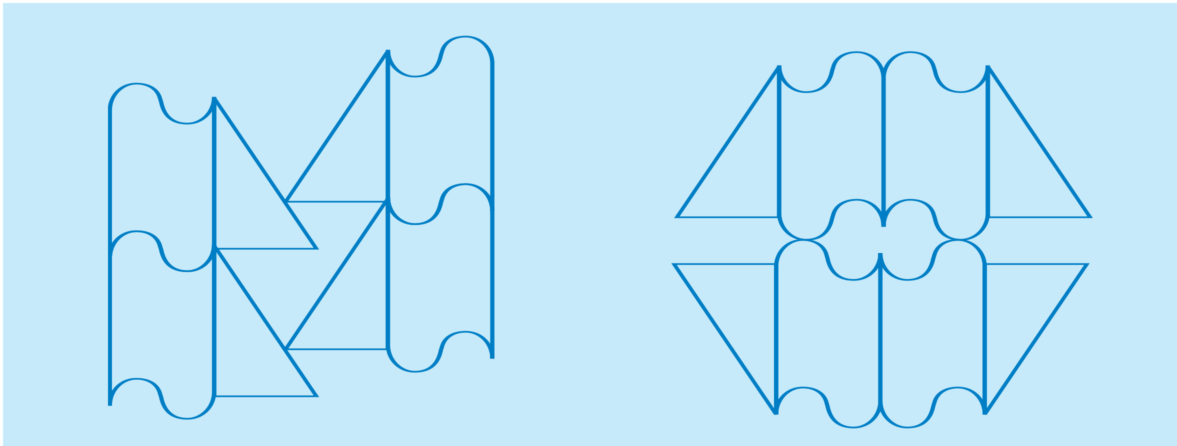
En el caso de la guarda **B**, antes de hacer traslaciones para completar la guarda, fue necesario dibujar la imagen como si estuviera reflejada en un espejo. Esa transformación también mantiene la forma y el tamaño, pero cambia el sentido de la figura. Es una **simetría**.



En este caso, la figura original y su imagen no resultan congruentes sino simétricas.

Las traslaciones y las rotaciones son **movimientos directos** del plano porque las imágenes tienen el mismo sentido que las figuras originales, es decir que resultan congruentes. En cambio, la simetría si bien es una transformación que no modifica las dimensiones, no se puede considerar un movimiento en el plano porque, para obtener la imagen simétrica de una figura, es necesario "darla vuelta" y cambiar su sentido.

d) Observá estas figuras e imaginá qué transformaciones hay que aplicarle al modelo que ya usaste en la consigna **b** para formarlas. ¿Identificás traslaciones? ¿Creés que será necesario hacer rotaciones?, ¿y simetrías? Anotá tus observaciones.



Para verificar tus notas podes reproducir las figuras en papel de calcar.

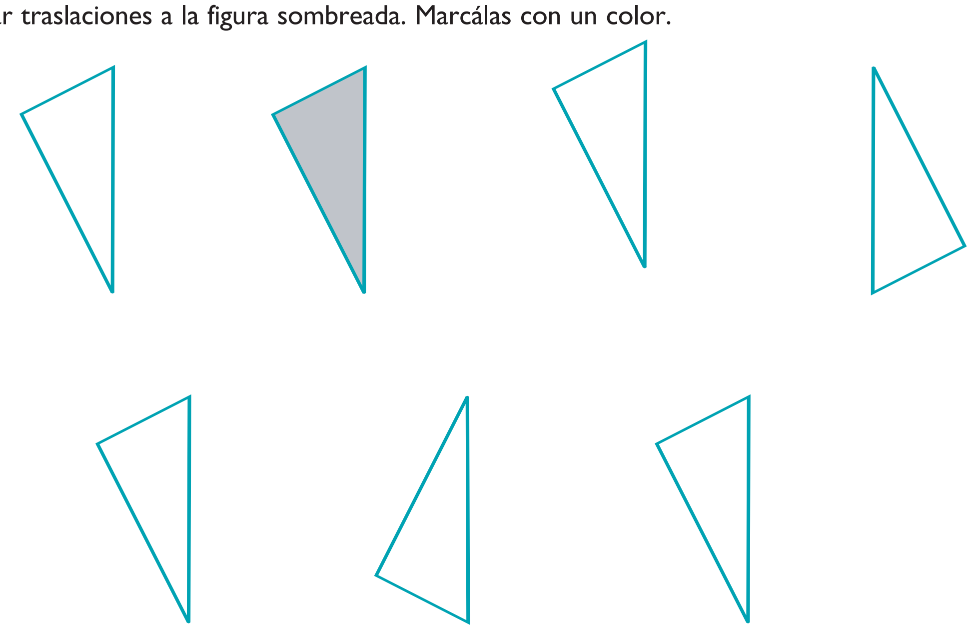
En las actividades que siguen verás cómo definir con precisión estas transformaciones: los movimientos de traslación y rotación, y además, la simetría. Vas a tener oportunidad de expresar vos mismo tus observaciones y después compararlas con formas de expresarlas simbólicamente a través del lenguaje matemático.

Recordá tener a mano los materiales que te fueran pedidos con antelación.

A 2. ¿Cómo se indican las traslaciones?

En la actividad anterior aprendiste a mover figuras para obtener imágenes sucesivas. Ahora aprenderás cómo se indican esos movimientos.

a) Calcá los siguientes triángulos en una hoja de papel de calcar y descubrí qué figuras son el resultado de aplicar traslaciones a la figura sombreada. Marcálas con un color.



b) Señalá mediante flechas en tu dibujo calcado en qué dirección y sentido se hicieron las traslaciones. La flecha debe partir de un punto del triángulo original y llegar al punto correspondiente en la imagen que resulta de aplicar el movimiento.

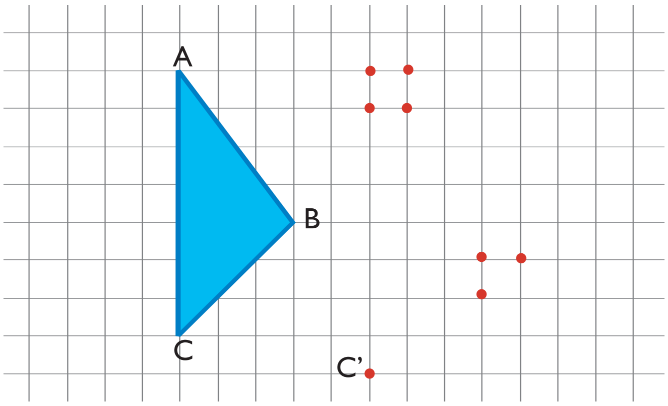
c) Dibujá una figura, llamala ***A*** y otra ***I*** que sea una transformación de ***A***. Copiá la figura ***A*** en una hoja cuadriculada y recortá en cartulina la figura ***I***; luego seguí los siguientes pasos.

1. Entregále la hoja con el dibujo ***A*** y el recorte de cartulina ***I*** a un compañero. Dale instrucciones por escrito para que este compañero, sin ver tu carpeta, pegue la figura de cartulina de modo que las figuras ***A*** e ***I*** en su hoja puedan superponerse exactamente con las figuras ***A*** e ***I*** dibujadas en tu calco. Para eso es necesario que las instrucciones sean muy precisas.

2. Si las figuras no quedaron como en tu calco, tratá de descubrir qué falló y revisá con tu compañero las instrucciones y el dibujo.

3. En cualquier caso, comentá el resultado de esta experiencia con tu docente.

d) En la figura siguiente, tres de los puntos marcados son los vértices del triángulo que se obtiene al realizar una traslación del triángulo *ABC*.



1. El punto *C'* es el trasladado que corresponde al punto C. ¿Cuáles son los que corresponden a los vértices *A* y *B* por la misma traslación? Descubrilos y señalalos con las letras *A'* y *B'*.

2. Anotá cómo te diste cuenta y después compará tu explicación con la información siguiente; si te parece necesario, modificá tu explicación.

Para trasladar una figura se necesita indicar con precisión el movimiento que se desea aplicar.

Por ejemplo, si se trabaja sobre un papel cuadriculado se puede indicar una traslación señalando que cada punto de la figura se desplazará 5 unidades a la derecha y 1 en sentido vertical hacia abajo. Si se tiene como referencia un par de ejes perpendiculares *x* e *y* se anota: $T = 5\,i + (-1)\,j$. En esa notación la letra *i* indica las unidades del desplazamiento en la misma dirección del eje de las *x*, y la letra **j** indica las unidades del desplazamiento vertical en la dirección del eje *y*.

e) Antes de iniciar la próxima actividad escribí en tu carpeta una síntesis de lo que aprendiste sobre traslaciones. Anotá las ideas que consideres más importantes y mostrale tu trabajo al docente.

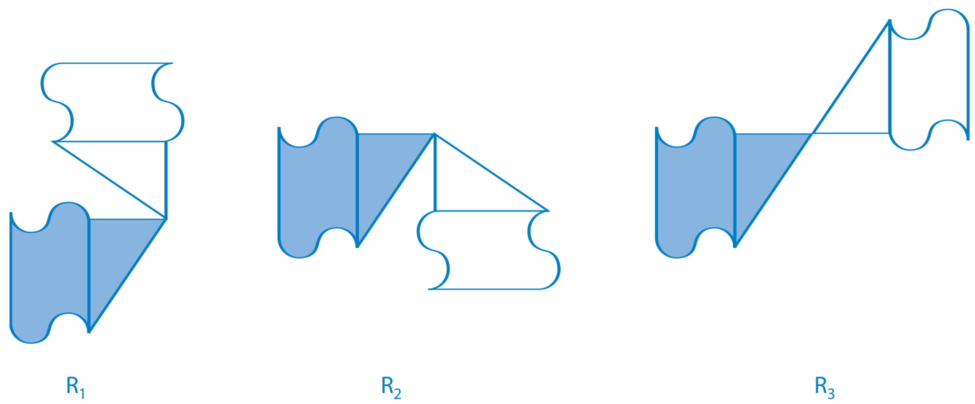
A 3. ¿Cómo se indican las rotaciones?

Tal como se planteó en la actividad anterior, una traslación se puede indicar gráficamente por medio de una flecha y también algebraicamente mediante una expresión que es la suma de dos términos: el número de unidades que un punto se debe trasladar en el sentido del eje x ($\hat{\imath}$) y el número de unidades que se debe trasladar en el sentido del eje y ($\hat{\jmath}$). Ahora vas a estudiar cómo se indican las rotaciones.

Para las actividades del tema siguiente vas a necesitar nuevamente un espejo rectangular y los útiles de Geometría.

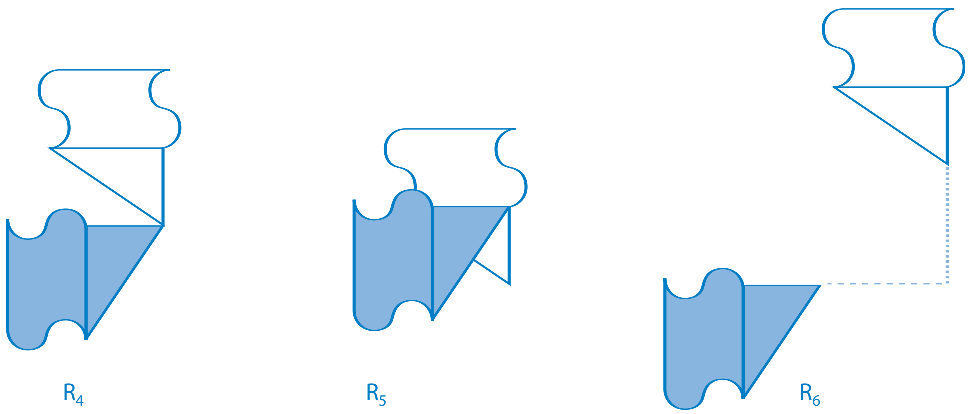
a) Revisá las anotaciones que hiciste en la actividad 1 al realizar la guarda **C**. ¿Qué considerás que es necesario anotar para describir una rotación?

b) Observá estas rotaciones. Los giros se hicieron siempre en el mismo sentido que las agujas del reloj. Escribí en qué se parecen y en qué se diferencian.



1. Si no observás la diferencia, calcá sobre papel transparente una figura como la del modelo. Para hacerla girar, pinchá con un alfiler o una chinche sobre una madera para obtener la imagen de la figura sombreada por las rotaciones R_1, R_2 y R_3. Observá con atención el lugar en que pinchás el papel y el giro que realiza la figura original sombreada para superponerse con la imagen.

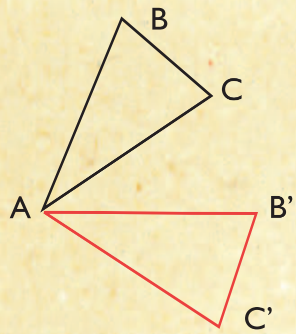
c) Compará ahora R_1 con R_4, R_5 y R_6. ¿Qué se mantiene igual y qué cambia en cada caso?

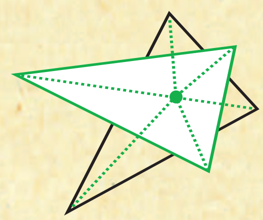


d) Leé la siguiente información y comparala con tus notas.

Como habrás notado, hay un punto alrededor del cual giran las figuras. Este punto que queda fijo se llama **centro de rotación**. En este caso, el centro de rotación es un punto A de la figura, y por lo tanto coincide con su imagen A'. La distancia de cualquier punto de la figura original al centro es la misma que la de su correspondiente por la rotación. Por ejemplo $BA = B'A$ y $CA = C'A$.

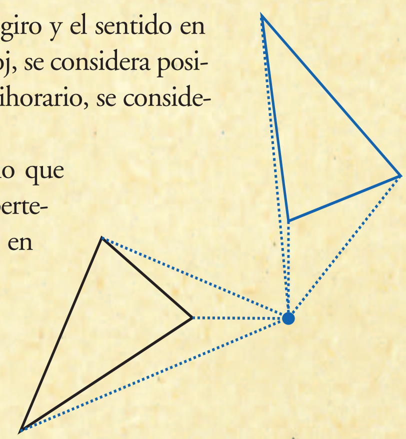
A veces, el centro de rotación es un punto que no pertenece a la figura, como en R_6, o que no corresponde a ninguno de sus vértices, como en R_5.

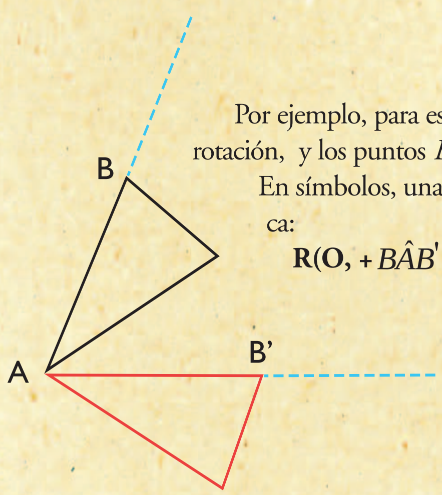




Además del centro hay que definir la amplitud del **ángulo** de giro y el sentido en que se realiza. Si el sentido de la rotación es el de las agujas del reloj, se considera positivo y se indica con el signo +; en caso contrario, el sentido es antihorario, se considera negativo y se indica con el signo –.

Para medir el ángulo de rotación hay que considerar el ángulo que tiene como vértice el centro de la rotación y además, a sus lados pertenece un punto cualquiera de la figura inicial y su correspondiente en la imagen.





Por ejemplo, para estas rotaciones consideramos el punto A como vértice y centro de rotación, y los puntos B y su correspondiente B' pertenecientes a los lados del ángulo.

En símbolos, una rotación de centro O y ángulo BAB' en sentido positivo se indica:

$\mathbf{R}(\mathbf{O}, +B\hat{A}B')$ o bien $\mathbf{R}(\mathbf{O}, B\hat{A}B')$ porque se puede omitir el signo **+** delante del ángulo.

TEMA 2: SIMETRÍA

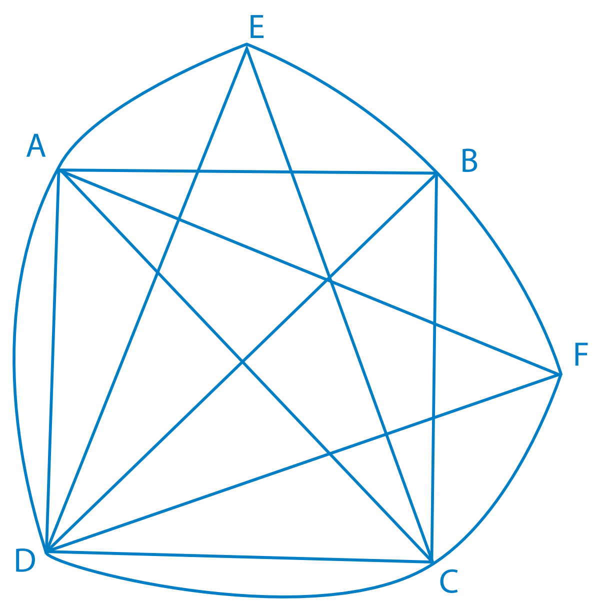
En las actividades anteriores utilizaste lenguaje matemático para indicar simbólicamente las traslaciones y las rotaciones. En el caso de las traslaciones es suficiente con indicar el desplazamiento de cada punto mediante un par de coordenadas x e y; en cambio, una rotación queda bien determinada indicando el centro, el ángulo y el sentido (positivo o negativo) en el que se hace la rotación.

En la actividad que sigue vas a identificar simetrías. Recordá traer los materiales solicitados anteriormente.

A

4. ¿Cómo se indican las simetrías?

a) Apoyá el borde de un espejo rectangular sobre cualquiera de las líneas marcadas en el dibujo siguiente.

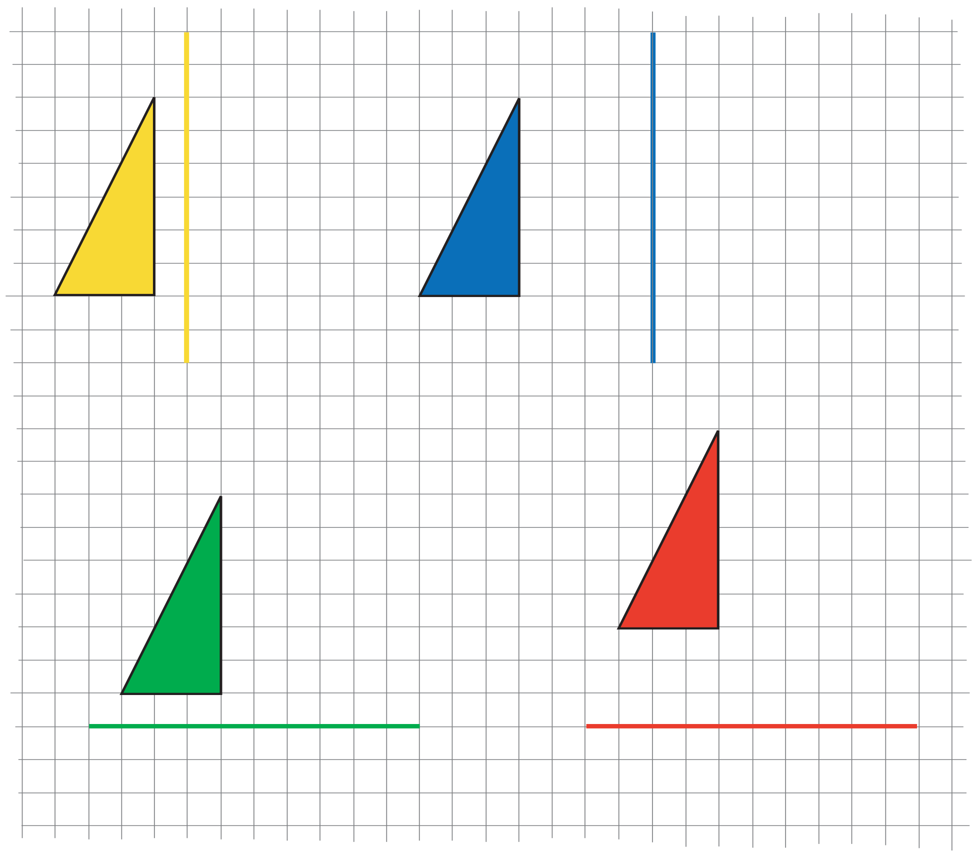


1. Observá la imagen que se refleja y comparala con la parte del dibujo que queda oculta por el espejo. Fijate si coincide.

2. Anotá tus observaciones en la carpeta.

b) Copiá los dibujos de la página siguiente sobre una hoja cuadriculada de la siguiente manera.

1. Dibujá sobre la cuadrícula las imágenes que se ven al apoyar el espejo sobre las líneas marcadas.



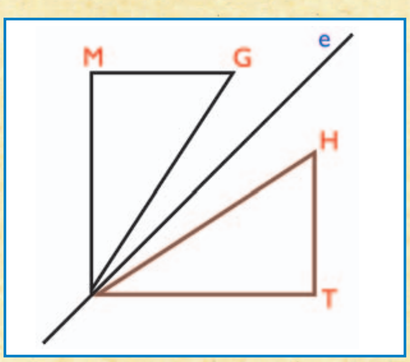
2. Para comprobar si tu dibujo es correcto, calcá los contornos de las figuras y las líneas remarcadas.

3. Si al doblar el papel de calco por la línea las figuras coinciden y el dibujo muestra la imagen del espejo, tu dibujo está bien realizado.

4. Si al doblar el papel los dibujos no coinciden, tratá de descubrir cómo modificarlo para que coincidan.

5. En cualquier caso, mostrale tu trabajo al docente.

c) Leé esta explicación y buscá los elementos que se describen en la figura que realizaste en el punto anterior.



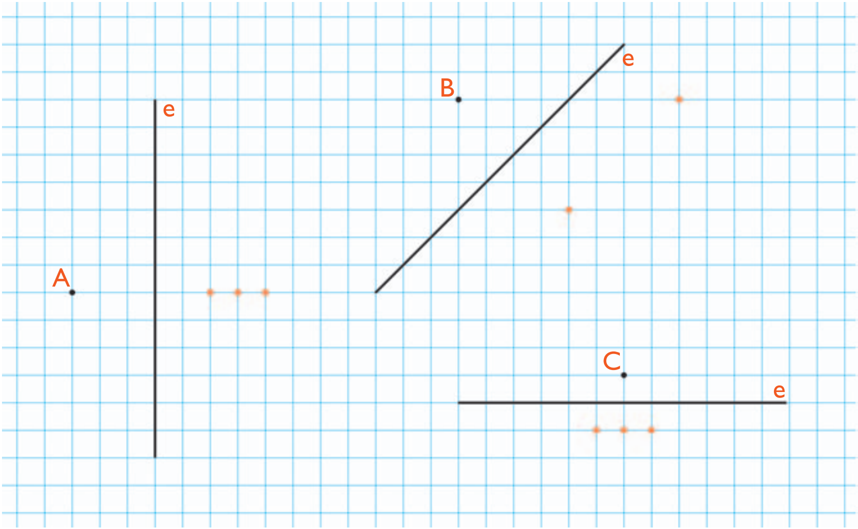
A cada punto de la figura le corresponde un punto que es su simétrico con respecto al eje:

H es el simétrico del punto *G* con respecto al eje *e;*

T es el simétrico del punto *M* con respecto al eje *e.*

En este caso, decimos que la figura es **simétrica** con respecto a esa línea que llamamos **eje de simetría**.

d) Reconocé en la figura siguiente para cada uno de los puntos A, B y C cuál de los puntos marcados es su simétrico con respecto al eje *e*. Indicalo con *A´*, *B´* y *C´* en cada caso. Compará tu trabajo con el de un compañero. Anotá en tu carpeta las conclusiones de esta experiencia.



e) Leé atentamente la información siguiente que define el simétrico de un punto usando el lenguaje matemático y comparala con las conclusiones que escribiste.

*Dos puntos son **simétricos** respecto de un **eje** si se encuentran sobre una misma recta perpendicular al eje y a la misma **distancia** de él. Para expresar en símbolos una simetría de eje e, se indica **S(e)**.*

La distancia de un punto a una recta se toma en la dirección perpendicular a la recta. Si bien es posible medir con regla las distancias OA y OA', esta medida es aproximada y la lectura en la regla puede introducir un error no deseado. El uso del compás es más preciso porque no es necesario medir, basta verificar que las distancias sean iguales.

f) ¿Cómo encontrarías el simétrico de un segmento? ¿Y el de un triángulo?

1. Comentá con un compañero o tu docente la manera que pensaste e intentá verificarla. Si no se te ocurre una forma para hacerlo, volvé a observar las imágenes que dibujaste usando el espejo. Marcá los vértices de las figuras y relacioná esos dibujos con la información anterior.

En la actividad siguiente podrás aplicar lo que aprendiste en esta unidad. Antes de resolverla, seguramente te será útil revisar las actividades anteriores. Podés releer los textos destacados y también volver a analizar los gráficos.

A

5. Diseños, simetrías y movimientos

a) Volvé a observar las guardas de la actividad **1**. Elegí alguna, identificá la figura original y describí las transformaciones sucesivas que se le aplicaron para construirla usando la notación que aprendiste.

b) Te proponemos un ejercicio divertido: "¿Qué dice aquí?". Podés usar un espejo para explorarlo y después resolvé las consignas que siguen.

SUERTE

1. ¿Cómo lo descubriste? Explicalo en tu carpeta.

2. Escribí tu nombre u otras palabras en un papel y sorprendé a tus compañeros con el "lenguaje de los espejos".

Para finalizar

Como se planteó en el texto que presenta la unidad, esta fue la primera unidad de este año en la que trabajaste sobre contenidos de Geometría. Los temas que en ella se desarrollan te habrán resultado familiares porque ya los abordaste en la unidad 9 del *Cuaderno de estudio 1*. En esta oportunidad se trata de que amplíes tu capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos y también tu capacidad de realizar ciertas lecturas visuales a partir de representaciones.

Resolviendo estas actividades profundizaste tus conocimientos acerca de las transformaciones en el plano. Por un lado –traslaciones y rotaciones– que dejan invariantes la forma y el tamaño de las figuras y reciben el nombre de movimientos directos porque no alteran el sentido de las formas orientadas. Las imágenes que se obtienen a partir de estos movimientos directos son congruentes con las figuras originales, vale decir que pueden superponerse exactamente mediante un deslizamiento que no salga del plano. Por otro lado, estudiaste también otras transformaciones, las simetrías, que si bien conservan el tamaño y la forma de las figuras, cambian su orientación de modo que de una figura y su imagen por una simetría no se puede decir que sean congruentes sino simétricas.

Al trabajar sobre rotaciones reafirmaste la importancia de tener en cuenta la orientación de los ángulos, en sentido positivo cuando su amplitud aumenta en el mismo sentido que las agujas del reloj, o bien en el sentido contrario, llamado también negativo. Además, tuviste oportunidad de apreciar otra vez el uso del compás en la determinación de distancias iguales.

No hay duda de que al terminar tu trabajo con esta unidad estás en condiciones de realizar creativos diseños, resolver problemas y expresar lo que aprendiste sobre las figuras y los movimientos utilizando el lenguaje matemático adecuado.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

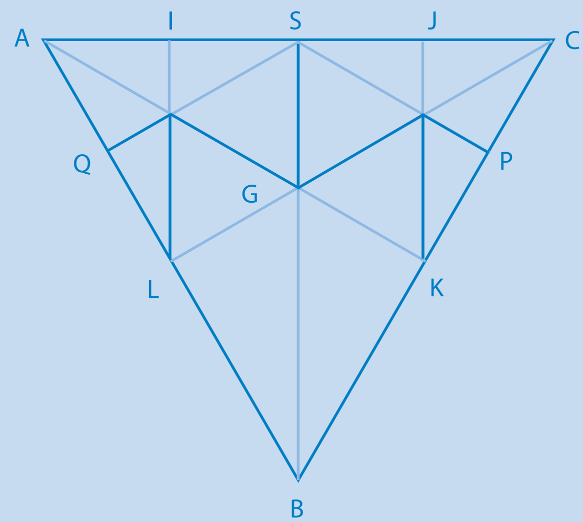
1. Una estrella de seis puntas

Se trata de construir, en cartón o cartulina, un rompecabezas para que a partir de un triángulo equilátero puedas armar una estrella de seis puntas.

Aquí van algunos datos:

- *L* es el punto medio de *AB*.
- *Q* es el punto medio de *AL*.
- *G* es el baricentro.

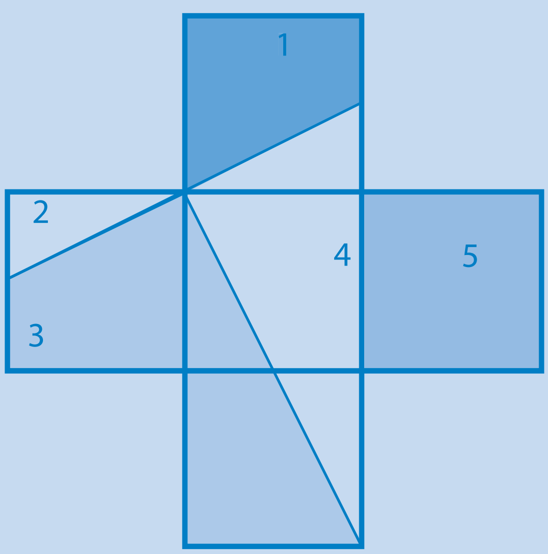
Cuando muevas las piezas, anotá qué movimientos les aplicás.



2. Un rompecabezas en cruz

Construí un rompecabezas como este haciendo dos cortes perpendiculares y usá las cinco piezas como moldes para formar un cuadrado, un rectángulo o un triángulo rectángulo.

En cada caso, anotá los movimientos que le aplicás a las piezas.



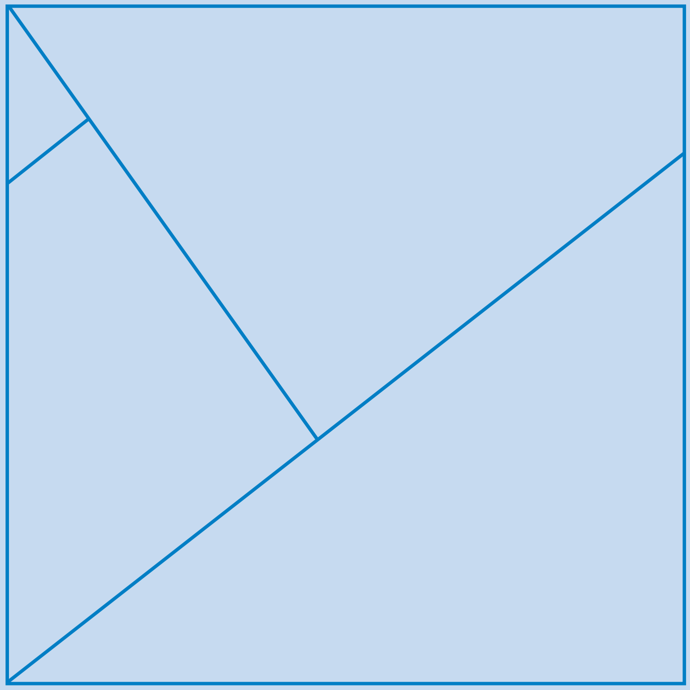
3. Con dos cuadrados

Construí un rompecabezas cuadrado de cuatro piezas como se indica en la figura y con esas piezas armá dos cuadriláteros diferentes.

Algunos datos:

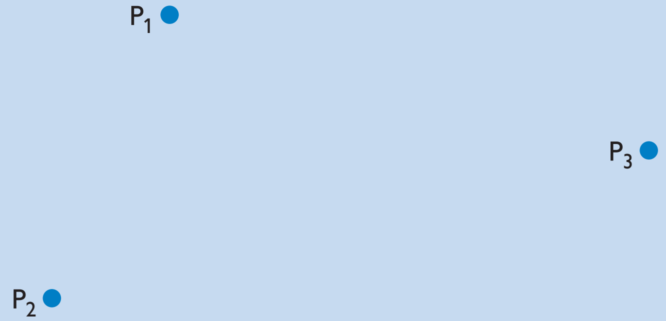
- El cuadrado es de un dm^2.
- El cateto menor del triángulo rectángulo mayor mide 7,5 cm.
- La hipotenusa del triángulo rectángulo más pequeño mide 2,5 cm.

Anotá los movimientos que aplicás a las piezas.



4. A pensar

Tres pueblos necesitan construir un pozo para abastecerse de agua. Cada intendente desea que las conducciones de agua hasta su pueblo no sean más largas que las de cualquiera de sus vecinos; por ello han decidido perforar en un lugar que se encuentre exactamente a la misma distancia de los tres. ¿Cuál sería la ubicación?



UNIDAD 7 Cuadriláteros y simetría

En esta unidad vas a volver a considerar el tema de los cuadriláteros, que seguramente ya trabajaste en la escuela; por ejemplo, cuáles son, en qué se diferencian de otras figuras, cómo identificar algunas de sus propiedades a partir de analizar sus diagonales. Ahora vas a realizar actividades que te permitirán justificar, tanto experimentalmente como de manera formal, otras propiedades de los cuadriláteros. Muchas de esas propiedades vas a poder estudiarlas aquí, porque se ponen en evidencia al aplicar las transformaciones que estudiaste en la unidad anterior. Por lo tanto, vas a volver a estudiar los movimientos de traslación, rotación y simetrías, para analizar los cuadriláteros.

Esas transformaciones se denominan también isometrías; esta palabra proviene del griego (*isos:* igual) y significa igual medida. En este caso, es posible llamarlas así porque se trata de transformaciones que conservan las medidas de las longitudes, de los ángulos y de las superficies de las figuras del plano.

En la próxima actividad vas a necesitar varios sorbetes o varillas y hojas de papel liso.

TEMA 1: CUADRILÁTEROS Y SIMETRÍAS

Antes de avanzar en el análisis de las transformaciones, vas a revisar propiedades de los cuadriláteros a partir de comparar sus lados.

A 1. Características de los cuadriláteros

Así como en la unidad 7 del *Cuaderno de estudio 1* estudiaste algunas propiedades de los cuadriláteros a partir de las propiedades de sus diagonales, ahora vas a estudiar nuevamente los cuadriláteros, pero a partir de observar la congruencia de sus lados y sus ángulos. También vas a ver si las rectas a las que pertenecen los lados son paralelas o no. Para todo ello trabajarás con sorbetes o varillas.

a) Tomá cuatro sorbetes o varillas y colocalos sobre una hoja de manera que se corten formando los bordes de un cuadrilátero cualquiera, cuyos lados no sean congruentes ni paralelos ni perpendiculares.

b) Dibujá en tu carpeta cuadriláteros del mismo tipo del que formaste con las varillas.

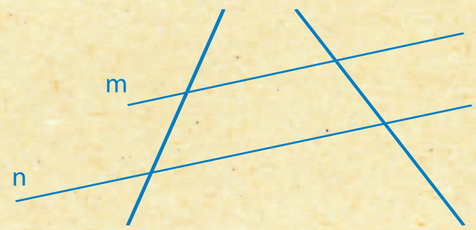
*Dos figuras son **congruentes** cuando al superponerlas coinciden exactamente.*

El símbolo $\ncong$ se lee: "es distinto que" o bien "no es congruente con".

El símbolo // se lee "es paralelo a".

c) Volvé a tomar los sorbetes y ahora colocalos de manera que el cuadrilátero que se forme tenga todos sus lados no congruentes y dos de ellos sean paralelos.

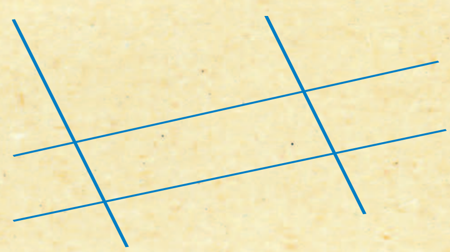
Pudiste haber dibujado un cuadrilátero como este: En este cuadrilátero, las rectas *m* y *n* que contienen a dos de los lados son paralelas. El cuadrilátero dibujado es un **trapecio**.



d) Dibujá un cuadrilátero como el mencionado en tu carpeta, ponele nombres a los vértices, escribí cómo se llama y, en símbolos, sus particularidades con relación a los lados y los ángulos.

e) Volvé a tomar los sorbetes y colocalos sobre una hoja de papel tratando de copiar la posición de ese trapecio. Mové un solo sorbete de modo que quede paralelo al opuesto.

Puede haberte quedado un cuadrilátero como este: En este caso los lados son paralelos dos a dos. El cuadrilátero formado se llama **paralelogramo**.



f) Dibujá en tu carpeta un paralelogramo y escribí simbólicamente sus propiedades.

g) Continuarás construyendo cuadriláteros. Para ello, colocá sobre la hoja los cuatro sorbetes o varillas de modo que cumplan las siguientes condiciones:

1. dos varillas son perpendiculares y,

2. cada una de las otras dos es paralela a una de las anteriores.

h) Dibujá en tu carpeta un cuadrilátero como el que se formó.

1. Observá si los lados consecutivos son iguales o no. ¿Cómo son los ángulos?

2. Escribí el nombre del cuadrilátero y sus propiedades. Si te hace falta, consultá la clasificación en la unidad **7** del *Cuaderno de estudio 1* o bien recurrí a tu docente para que te ayude en la búsqueda de los nombres.

3. ¿Qué cambiarías en la posición de las varillas para que se forme un rombo no cuadrado?

• Hacelo. ¿Cómo son sus ángulos?

• Escribí simbólicamente las propiedades del rombo que podés observar.

i) A partir de la formación de un rombo, ¿cómo cambiarías la posición de las varillas para formar un romboide?

1. ¿Cómo son sus lados?, ¿y sus ángulos?

2. Dibujá el romboide y describí sus propiedades.

A través de la actividad anterior, revisaste algunas clases de cuadriláteros a partir del análisis de sus lados; ahora vas a avanzar en el análisis a partir de las transformaciones. Empezarás por considerar la simetría. Consultá con tu docente cuáles de las consignas de la actividad siguiente vas a resolver, y si lo harás solo o con tus compañeros.

Para realizar todas las actividades de esta unidad que siguen es necesario que cuentes con hojas de papel liso, algunas de papel de calcar y cuadriculadas, los útiles de Geometría y una tijera.

A 2. ¿Cuándo una figura es simétrica?

Como ya viste en la unidad anterior, la simetría es una transformación que vincula los puntos del plano de acuerdo con la siguiente definición: dos puntos de un plano son **simétricos** respecto de un eje si se encuentran sobre una recta perpendicular al eje y a la misma **distancia** de él.

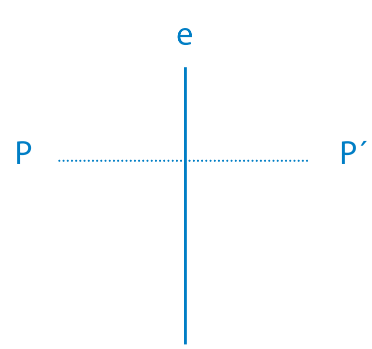
a) Tomá una hoja de papel de calcar y marcá un punto cualquiera *T*. Doblá la hoja en dos partes por una línea a la que no pertenezca *T*. Calcá el punto *T* y llamá *T’* a la imagen *T*. Luego remarcá el doblez con lápiz de color:

1. Trazá el segmento determinado por esos dos puntos: *T* y *T’*.

2. ¿Cómo son entre sí la recta que contiene el doblez y el segmento determinado por los puntos *T* y *T’*?

3. Compará las distancias que hay entre cada uno de los puntos y el eje.

4. Observá el siguiente gráfico y leé el recuadro. Te permitirá revisar el gráfico que realizaste y retomar la definición anterior.



Una simetría de eje **e** *transforma un punto* **P** *del plano en otro punto* **P´** *del plano, tal que el segmento* **PP´** *es perpendicular a la recta* **e** *y la distancia del punto* **P** *al eje* **e** *es igual a la distancia del punto* **P´** *al eje.*

5. Verificá si la recta **e** es perpendicular al segmento ***PP´***, comprobando que los cuatro ángulos que se forman son congruentes.

Si la recta **e** *es perpendicular al segmento y las distancias de los puntos a dicha recta son iguales, la recta es el* ***eje de simetría*** *y los puntos marcados son simétricos respecto de dicho eje.*

b) Para seguir estudiando el eje de simetría resolvé en tu carpeta las siguientes consignas.

1. Dibujá un segmento ***AA´***, determiná su punto medio y marcá el eje **e** de simetría del segmento.

2. Elegí otro punto que pertenezca al eje y llamalo ***M***.

3. Trazá las distancias de ***M*** a los extremos del segmento ***AA´*** y medilas.

4. Marcá otro punto que pertenezca al eje de simetría y hacé lo mismo.

5. Compará las distancias que hay desde cada punto del eje a los extremos del segmento ***AA´*** determinado por pares de puntos simétricos.

Habrás comprobado que estas distancias son iguales y, como aprendiste en la consigna **a**, el eje de simetría es perpendicular al segmento que tiene como extremos dos puntos simétricos.

Recordá que la recta perpendicular a un segmento que lo corta en su punto medio es el eje de simetría y se llama ***mediatriz*** *del segmento.*

Con estos elementos, es posible dar una nueva definición de **puntos simétricos**:
Dos puntos son simétricos respecto de un eje si la **mediatriz** del segmento determinado por dichos puntos es el **eje de simetría** del segmento.

c) Para aprender a construir figuras simétricas con papel y tijera seguí las siguientes instrucciones:

1. Tomá una hoja de papel y doblala por la mitad.

2. Pensá en la figura que querés que salga recortada. Dibujá la mitad de esa figura en una de las superficies de la hoja doblada y recortá la hoja doblada siguiendo tu dibujo. Considerá como ejemplo el siguiente dibujo.

3. Abrí la figura recortada y marcá un punto cualquiera. Dibujá el simétrico con respecto a la recta que contiene al doblez.

4. Observá la ubicación de esos puntos. ¿Ocurre lo mismo con otros puntos de la figura?

Si tal como observaste el simétrico de cualquier punto de la figura pertenece a ella se puede enunciar que una figura es simétrica respecto de un eje cuando todo punto de ella tiene como simétrico otro punto de la misma figura. Y también que una figura es simétrica si se puede determinar una línea que la divida en dos partes de modo que al doblarla por ella ambas partes se pueden superponer exactamente.

Ahora que ya sabés cuándo una figura es simétrica, vas a profundizar en el estudio de los elementos y las propiedades de los cuadriláteros en relación con la simetría. En la siguiente actividad aprenderás a encontrar cuadriláteros simétricos y determinarás aquellos elementos que son sus ejes de simetría.

TEMA 2: CUADRILÁTEROS SIMÉTRICOS

A 3. Ejes de simetría en los cuadriláteros

a) Comenzá trabajando con rectángulos, según las siguientes consignas.

1. Dibujá y recortá dos rectángulos.

2. A cada uno doblalo en dos, tratando que las partes que se forman coincidan. En caso de lograrlo, la línea del doblez es eje de simetría y los rectángulos resultan simétricos con respecto a ese eje.

3. Pegá en tu carpeta estos rectángulos y marcá el o los ejes de simetría que hayas encontrado.

b) Observá la ubicación de los ejes de simetría del rectángulo, leé esta definición y respondé a las preguntas.

*El segmento determinado por los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero se llama **base media**.*

1. Las bases medias de un rectángulo ¿pertenecen a las mediatrices de los lados? ¿Son sus ejes de simetría? ¿Por qué?

2. Las diagonales de un rectángulo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?

3. Tomá uno de los rectángulos con los que trabajaste, dibujalo en tu carpeta y llamálo ***ABCD***.

4. Marcá uno de sus ejes de simetría, llamalo **e**. En la simetría de eje **e**, ¿qué punto es el simétrico del vértice ***A***? ¿Qué punto es el simétrico de ***B***? ¿Dónde están ubicados los puntos simétricos de los puntos que pertenecen al eje?

> *Cuando en una trasformación un punto coincide con su imagen se dice que es un* ***punto doble*** *en esa transformación. O bien: si un punto se transforma en sí mismo, se dice que es un* ***punto doble*** *o* ***invariante***.

5. En las simetrías del rectángulo, ¿dónde se localizan los puntos dobles?

6. Al aplicar las simetrías de un cuadrado, ¿qué puntos son invariantes?

c) Dibujá y recortá dos paralelogramos cualesquiera que no sean rombos. Trazá sus diagonales y doblalos por cada diagonal. Escribí en tu carpeta las respuestas a estas preguntas y mostraselas a tu docente.

1. ¿Son coincidentes las partes que se forman? ¿Por qué?

2. Volvé a tomar esos paralelogramos e intentá, haciendo otros dobleces, que las partes en que los dividís sean coincidentes.

3. Las bases medias de un paralelogramo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?

4. Las diagonales de un paralelogramo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?

d) Además de rectángulos y paralelogramos hay otros cuadriláteros particulares. Para averiguar si algunos de ellos son simétricos, y en el caso de serlo determinar cuál o cuáles son sus ejes de simetría, dibujá y recortá en papel dos trapecios isósceles, dos romboides, dos rombos y dos cuadrados.

1. Doblá cada uno de ellos buscando que las partes en que los dividiste coincidan exactamente una con otra.

2. Cuando así suceda, marcá el doblez (eje de simetría) de la figura con la que estás trabajando.

3. ¿Cuáles de las figuras nombradas tienen ejes de simetría?

4. En cada una de ellas indicá, cuando sea posible, si esos ejes son elementos de la figura, por ejemplo, bases medias y/o diagonales.

5. Pegá los cuadriláteros en tu carpeta, explicá lo que hiciste y escribí tus conclusiones.

6. Compará tus conclusiones con las de otro compañero y muéstrenselas a su docente.

A 4. Propiedades de los cuadriláteros simétricos

En las actividades anteriores trabajaste recortando figuras dibujadas en papel liso. Ahora vas a trabajar con un par de ejes cartesianos x e y dibujados sobre papel cuadriculado para explorar las relaciones entre las coordenadas de puntos del plano, simétricos con relación a esos ejes.

a) Trabajá sobre papel cuadriculado. Trazá un par de ejes perpendiculares ***x*** e ***y***. En el cuadrante inferior izquierdo dibujá un paralelogramo con sus vértices en puntos de la cuadrícula. Llamalo ***ABCD*** y anotá las coordenadas de los vértices.

b) Pensá: ¿en qué cuadrante se ubicaría el paralelogramo ***A´B´C´D´*** simétrico de ***ABCD*** con respecto al eje ***y***? ¿Qué coordenadas tendría? Escribilas. Verificá tu anticipación dibujando ***A´B´C´D´***. ¿En qué cuadrante estaría ubicado el paralelogramo simétrico de ***ABCD*** con respecto al eje ***x***? ¿Cuáles serían sus coordenadas?

c) Seguí trabajando sobre papel cuadriculado, marcá tres puntos no alineados ***P***, ***Q*** y ***R***, anotá sus coordenadas. ¿Qué coordenadas tendrá un punto ***T*** tal que el cuadrilátero ***PQRT*** sea un paralelogramo? ¿La solución es única? ¿Por qué?

d) Escribí en tu carpeta un comentario sobre lo que aprendiste y mostráselo a tu docente.

A 5. Cuadriláteros: propiedades y simetría

Para poner en práctica lo que aprendiste en esta unidad, resolvé esta actividad porque te permitirá hacer una síntesis de lo aprendido.

a) Plegá un papel de modo que puedas obtener un cuadrado haciendo un solo corte.

b) Doblando y recortando convenientemente una hoja de papel, construí figuras simétricas que posean dos ejes de simetría. Indicá los ejes y pegalas en tu carpeta.

c) ¿Hay cuadriláteros con cuatro ejes de simetría? ¿Con sólo tres? ¿Con sólo dos? ¿Con sólo uno? ¿Cuáles no son simétricos?

d) Completá en tu carpeta el siguiente cuadro escribiendo *SÍ* o *NO* en cada casilla.

PROPIEDADES	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Por lo menos una diagonal es eje de simetría					
Cada diagonal es eje de simetría					
Por lo menos una base media es eje de simetría					
Cada base media es eje de simetría					

Para finalizar

En esta unidad exploraste la posición de las rectas a las que pertenecen los lados de los cuadriláteros y vinculaste las propiedades de sus lados y sus ángulos con la posibilidad de establecer si son figuras simétricas o no.

Descubriste que existen algunos cuadriláteros con uno, dos o cuatro ejes de simetría, y que ellos son elementos geométricos particulares de esas figuras.

En el caso del cuadrado habrás encontrado que posee cuatro ejes de simetría, las dos diagonales y las dos bases medias, mientras que el rectángulo tiene dos ejes de simetría que son sus bases medias.

Habrás descubierto que sólo los trapecios isósceles tienen un eje de simetría que es la recta perpendicular a los lados paralelos trazada por los puntos medios de ellos. Esa recta es la mediatriz del lado.

Has comprobado también una propiedad importante: los puntos que pertenecen al eje de simetría son los únicos puntos dobles, vale decir que son simétricos de sí mismos. Por último, pudiste observar la relación que existe entre las coordenadas de puntos simétricos ubicados en diferentes cuadrantes.

En las unidades siguientes aplicarás estos conocimientos al estudio de otros temas geométricos.

A continuación, podrás practicar varios de los temas que estudiaste a lo largo del año en relación con números, combinatoria y Geometría, y comprobar algunas curiosidades aritméticas resolviendo estos desafíos matemáticos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Los relojes

Si tenés dos relojes de arena, uno de 3 minutos y otro de 8 minutos, ¿cómo podés usarlos para controlar la cocción de una comida que debe estar cociéndose exactamente durante 13 minutos?

2. Los libros

En la biblioteca hay libros de todo tipo. Gabriel quiere sacar 10 libros de tres tipos diferentes –policiales, aventura y ciencia ficción– para distribuirlos entre sus compañeros. Su elección incluye por lo menos un libro de cada tipo.

¿De cuántas maneras distintas pudo elegir los libros?

3. Divisiones exactas

Elegí un número de tres cifras y formá otro de seis cifras repitiendo el primero. Por ejemplo: 145.145.

Dividí este número entre 7; después dividí el cociente entre 11 y, por último, el nuevo cociente entre 13.

Comprobá si las divisiones parciales que has encontrado son exactas y al final obtenés tu número inicial.

Respondé: ¿por qué sucede eso con cualquier número de tres cifras?

4. Con un poco de historia

Para calcular el área de un triángulo siempre has buscado como datos la longitud de uno de los lados y la de la altura correspondiente a ese lado. Sin embargo, hay otra forma de calcularla, conociendo la longitud de los tres lados. Consiste en aplicar la fórmula de Herón.

Herón de Alejandría fue un ingeniero griego que vivió posiblemente en el siglo I después de Cristo. Describió un gran número de máquinas sencillas y generalizó el principio de la palanca de Arquímedes. En Matemática pasó a la historia sobre todo por la fórmula que lleva su nombre y que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, aparecida por primera vez en su obra *La Métrica*.

La fórmula de Herón es la siguiente $\mathbf{A} = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)(p-c)}$ en la que **A** es el área de un triángulo; a, b y c los lados y p el semiperímetro: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

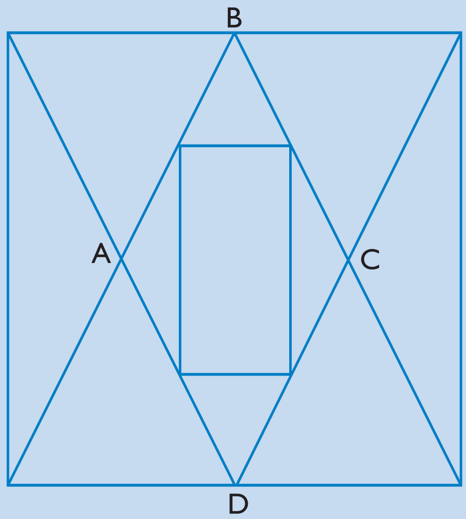
Con toda la información sobre la fórmula de Herón que aparece en esta página, dibujá dos triángulos cualesquiera, medí sus lados, la altura correspondiente a uno de ellos y calculá sus áreas de las dos formas que conocés.

a) Compará los resultados.

b) ¿Cómo podés hacer para calcular la altura de un triángulo conociendo las longitudes de sus lados?

5. Fracciones

En la siguiente figura, *B* y *D* son los puntos medios de los lados del cuadrado, y los vértices del rectángulo central son los puntos medios de los lados del rombo *ABCD*.
Calculá qué parte del área del cuadrado representa el área del rectángulo central.



6. La escuela pitagórica

Se dice que cuando le preguntaban a **Pitágoras** (célebre matemático nacido en Grecia, en la isla de Samos, a mediados del siglo IV a.C.) la cantidad de personas que frecuentaban su escuela daba como respuesta:

"La mitad estudia sólo matemática; la mitad del resto se interesa nada más que por la música; una séptima parte asiste pero no participa y, además, vienen tres ancianos."

1. ¿Cuántas personas concurrían a su escuela?
2. ¿Cuántas se dedicaban a la matemática y cuántas a la música?

UNIDAD 8 Ángulos. Posiciones relativas

En esta unidad trabajarás con ángulos, es decir, con elementos geométricos que ya conocés. Verás las diferentes posiciones que pueden tomar las rectas que los forman y las relaciones métricas que existen entre ellos.

Realizarás construcciones geométricas que te permitan descubrir esas relaciones como también resolver problemas apoyándote en los conocimientos que ya poseés. Tené presente que primero hay que pensar cómo se pueden resolver los problemas y luego comprobar si lo que habías pensado es correcto.

Una vez resuelta cada actividad, reunite con tus compañeros para discutir las posibles soluciones que cada uno proponga y las conclusiones presentadas. Ello les permitirá comparar, revisar, corregir y aclarar lo que piensa cada uno. Los temas que se desarrollarán son: ángulos formados por dos rectas que se cortan, ángulos entre dos rectas cortadas por una transversal, propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Comenzarás viendo cuáles son las posiciones que pueden tomar las rectas incluidas en un plano y los símbolos que se usan para indicarlas.

A 1. Rectas en el plano

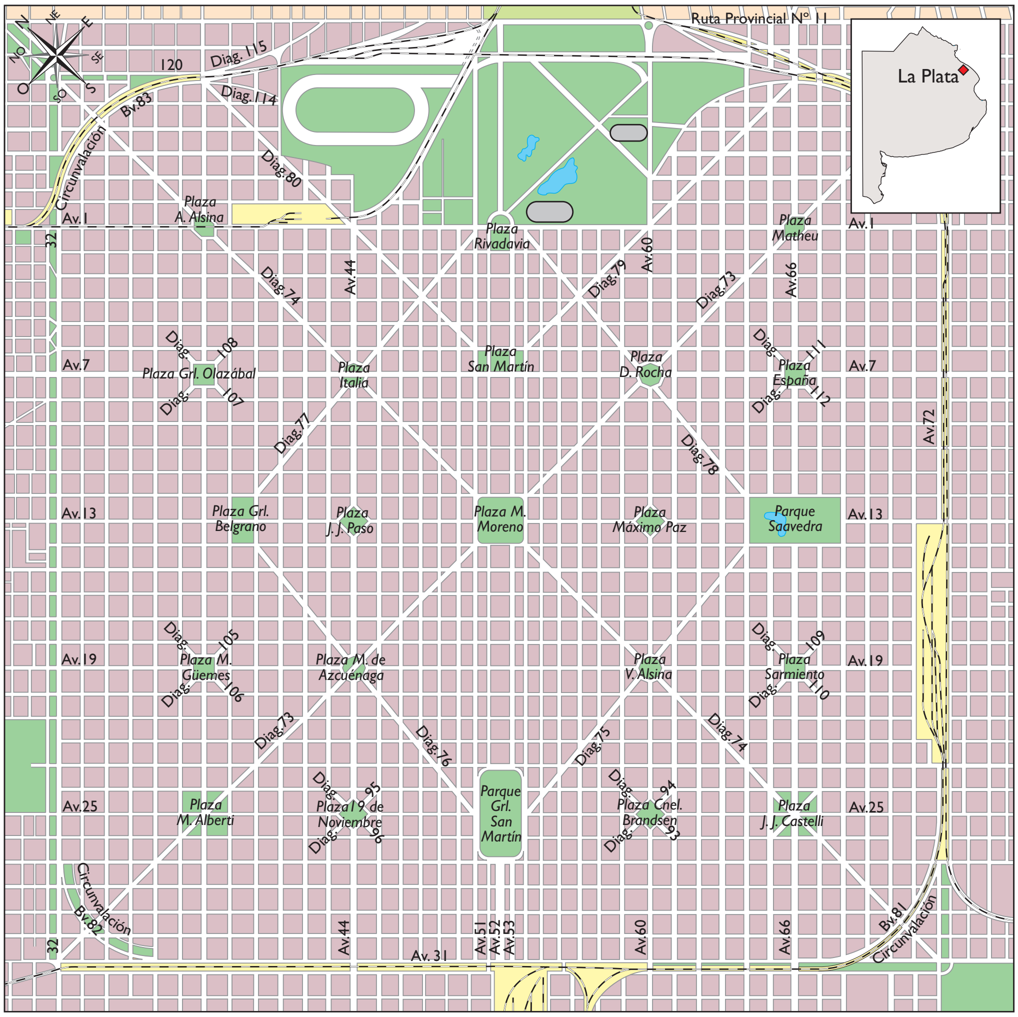
Como sabrás, el hombre en muchas ocasiones necesita representar los lugares en que vive o lo que necesita construir. En el primer caso, esa representación la hace mediante un plano, ya sea de su vivienda, una ciudad o un pueblo, o bien de un mapa para extensiones más amplias como provincias o países.

En el *Cuaderno de estudio 1* estudiaste escalas y su aplicación en mapas y planos; eso te ayudará a interpretar el plano que se presenta en la página siguiente. Observalo y verás que las calles y las avenidas se presentan como segmentos de recta.

a) Buscá en el plano que aparece en la página siguiente, dos calles o avenidas paralelas y dos calles o avenidas que se corten. Dibujalas en tu carpeta,

1. Nombrá con a y b las rectas paralelas, con c y d las que se cortan y que desde ahora llamarás **rectas secantes**.

2. Expresá simbólicamente $a \mathbin{//} b$ (a es paralela a b), $c \perp d$ (c es secante con d). Las rectas secantes se cortan en un punto; nombrá el punto con una letra mayúscula.



b) Buscá en el plano dos avenidas que sean secantes y dibujá en tu carpeta las rectas que las representan.

1. Como todas las rectas que has dibujado están en el mismo plano, se las llama **coplanares**. Dibujá, ahora, varias rectas coplanares, mostráselas a un compañero y pedile que indique pares de rectas paralelas y pares de rectas secantes.

2. Nombralas con letras y escribí las relaciones utilizando símbolos.

c) Tomá una hoja de papel, doblala en dos partes. Volvé a doblarla de modo que coincidan los bordes del primer doblez. Abrí la hoja y observá las líneas que han quedado marcadas. Para verlas mejor, pasá un lápiz sobre ellas.

1. Observá los ángulos que determinaron esas dos rectas al cortarse y comparalos. Seguramente verás que son congruentes.

2. Nombrá cada ángulo con letras griegas: α (alfa), β (beta), γ (gamma) y δ (delta) e indicá en símbolos esa congruencia.

3. Indicá, de acuerdo a su amplitud, qué tipo de ángulos son los que se han formado. Si te parece necesario consultá con tu docente o buscá el tema en el *Cuaderno de estudio 1*.

d) Leé esta información y comentala con tus compañeros.

"Cuando dos rectas secantes determinan cuatro ángulos congruentes, dichas rectas son **perpendiculares**. El símbolo usado para indicar que **a** es perpendicular a **b** es ⊥."

Habrás visto que los cuatro ángulos congruentes tienen una amplitud de 90º, es decir, son rectos. Como los lados de estos ángulos están incluidos en rectas perpendiculares es posible concluir que: la condición suficiente para que dos rectas sean **perpendiculares** es que incluyan los lados de un ángulo recto.

2. Ángulos formados por dos rectas secantes

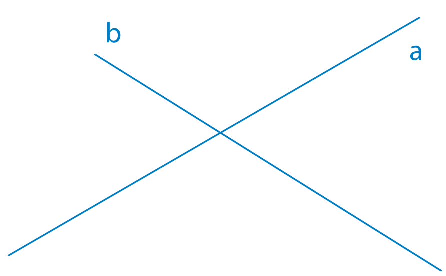
En esta actividad continuarás estudiando las rectas. Ya viste que dos rectas del plano pueden ser paralelas o secantes y que las rectas perpendiculares son un caso particular de las rectas secantes.

a) En tu carpeta escribí como título "Actividad 2: Ángulos formados por dos rectas secantes" y dibujá dos rectas secantes no perpendiculares. Nombralas con letras minúsculas, y con una letra mayúscula, el punto en que ellas se cortan.

1. Estas rectas determinan varios ángulos. ¿Cuántos son? Para ayudarte usá lápices de colores.

2. Entre ellos habrás encontrado pares de ángulos que tienen un lado común y en los que los otros dos son semirrectas opuestas. A estos ángulos se los llama **adyacentes**.

3. Copiá en tu carpeta la siguiente figura. Observala y señalá un par de ángulos adyacentes.



4. Nombralos con letras griegas y sumalos gráficamente. ¿Qué tipo de ángulo has obtenido como suma? Expresá en símbolos la suma que realizaste.

5. Hacé lo mismo con otro par de ángulos adyacentes y escribí en tu carpeta la conclusión a la que llegaste. Comentala con tus compañeros y tu docente.

b) Leé esta información y luego respondé las consignas en tu carpeta.

- Dos ángulos son **suplementarios** cuando su suma es un **ángulo llano**.
- Dos ángulos son **complementarios** cuando su suma es un **ángulo recto**.

1. De acuerdo con las afirmaciones anteriores, ¿qué propiedad tienen los ángulos adyacentes?

2. Como la amplitud de un ángulo llano es de 180°, si la suma de las amplitudes de dos ángulos es 180°, uno de ellos es el **suplemento** del otro. Elegí un ángulo de la figura e indicá cuál es su suplemento.

3. Pensá y escribí en tu carpeta: ¿cuándo un ángulo es el **complemento** de otro? Compará tu respuesta con la de tus compañeros.

4. Respondé las siguientes preguntas y justificá tus respuestas.

- Si la amplitud de α es 45°, ¿cuál es la de su suplemento?, ¿y la de su complemento?
- Si la amplitud de β es 120°, ¿cuál es la de su suplemento?
- Si el ángulo es nulo, ¿cuál es su suplemento? ¿Y su complemento?
- ¿Cuándo dos ángulos suplementarios son congruentes?

Hasta aquí has trabajado con ángulos en tu carpeta, a partir de las representaciones que dibujaste. Las actividades que siguen te permitirán analizar otros ángulos a partir de construirlos usando varillas.

A 3. Trabajando con varillas

Para realizar esta actividad vas a usar dos varillas o sorbetes.

a) Ubicá una varilla sobre otra, hacelas girar y observá los ángulos que ellas forman. Anotá en tu carpeta las diferentes posiciones que le podés dar a tus varillas y nombrá qué tipo de ángulos se formaron en cada caso. Elegí una de las posiciones y en ella dos ángulos que cumplan con estas condiciones:

Tienen el mismo vértice y los lados de uno de ellos son las semirrectas opuestas de los lados del otro.

1. Dibujá los ángulos en esa posición en la carpeta y marcalos utilizando letras griegas.

> *Los ángulos que cumplen con la condición de tener el mismo vértice y de que los lados de uno son las semirrectas opuestas de los lados del otro se llaman* ***ángulos opuestos por el vértice****.*

b) Retomá las varillas y formá otros pares de ángulos opuestos por el vértice.

1. Dibujalos en tu carpeta y comparalos usando papel de calcar o bien midiendo su amplitud con un transportador.

2. Escribí tu conclusión y comparala con la de tus compañeros. Comenten este trabajo con el docente.

Hasta aquí has visto ángulos formados por dos rectas que se cortan, a través de representaciones gráficas y de la construcción con dos varillas. Ahora trabajarás con tres varillas para estudiar nuevos pares de ángulos.

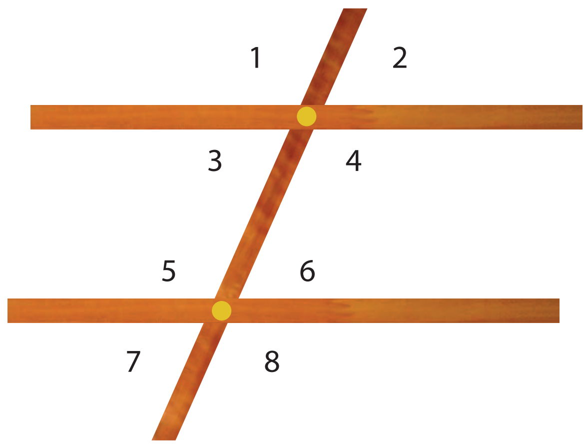
A

4. Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante

a) Tomá tres varillas o sorbetes del mismo tipo de los que usaste en la actividad anterior. Ubicá dos, representando rectas paralelas. Con la tercera, probá diferentes posiciones de modo que en todos los casos la posición sea secante respecto de las otras dos.

b) Observá en las diferentes posiciones: ¿cuántos ángulos se forman? Comparalos por pares.

c) Seguramente, en algunas de las posiciones quedó determinada una situación como la siguiente. Observala y leé la información que aparece a continuación.



Son:

Ángulos correspondientes $\begin{cases} \hat{1} \ y \ \hat{5} \\ \hat{2} \ y \ \hat{6} \\ \hat{3} \ y \ \hat{7} \\ \hat{4} \ y \ \hat{8} \end{cases}$

Ángulos alternos externos $\begin{cases} \hat{1} \ y \ \hat{8} \\ \hat{2} \ y \ \hat{7} \end{cases}$

Ángulos alternos internos $\begin{cases} \hat{3} \ y \ \hat{6} \\ \hat{4} \ y \ \hat{5} \end{cases}$

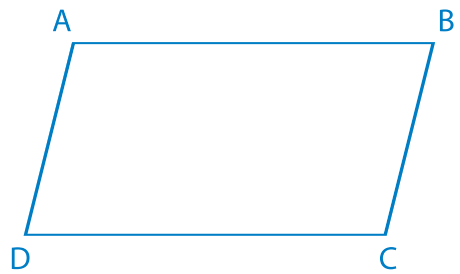
1. Observá cuáles son los pares de ángulos formados por las varillas y nombrados en la clasificación anterior.

2. En tu carpeta, dibujá rectas en la posición en las que aparecen dibujadas y señalá los pares de ángulos correspondientes con un mismo color.

3. Hacé lo mismo con los ángulos alternos internos y alternos externos.

4. Compará, ahora, los pares de ángulos nombrados y escribí en tu carpeta las conclusiones. Compartilas con tus compañeros y mostráselas a tu docente.

d) Dibujá en tu carpeta un paralelogramo como el siguiente.



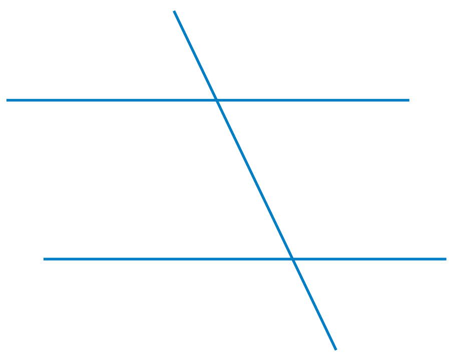
1. El lado $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{CD}$. Tomá el lado $\overline{BC}$ como la secante y, de acuerdo con lo que ya viste, indicá, si los hubiera, pares de ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos colocándoles las letras que quieras.

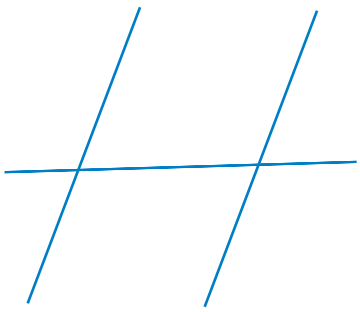
2. Marcá con un color los ángulos interiores $\hat{A}$ y $\hat{D}$.

3. ¿Qué relación existe entre estos ángulos? Escribila en tu carpeta y explicá cómo hiciste para encontrarla. Estos ángulos se llaman **conjugados internos**.
Buscá en el paralelogramo otro par de ángulos conjugados internos y marcalos con otro color.

e) En tu representación de las dos rectas paralelas cortadas por una transversal, señalá un par de ángulos conjugados internos como los que viste en el paralelogramo *ABCD*.

1. ¿Habrá ángulos conjugados externos? Marcá los pares de ángulos que a tu criterio sean conjugados externos y explicá por qué así lo creés. Compará tu respuesta con la de tus compañeros.





5. Para revisar lo aprendido

a) Como finalización de esta unidad reunite con tus compañeros y completá este cuadro con las observaciones que registraste en tu carpeta.

Ángulos formados por dos rectas secantes	Propiedades	En símbolos
Opuestos por el vértice		
Adyacentes		

Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante	Propiedades	En símbolos
Correspondientes		
Alternos (internos o externos)		
Conjugados (internos o externos)		

Las diferentes actividades que realizaste te han llevado a observar que los ángulos pueden referirse a las posiciones particulares de las rectas que los forman.
Estos ángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta. Las propiedades son muy importantes y te permitirán encontrar otras relaciones a medida que avances en el estudio de la Geometría, como también resolver diferentes problemas.

6. A modo de síntesis

Para que te queden claros los conceptos realizá la siguiente actividad.

a) Dibujá pares de rectas como las de las figuras 1 y 2.

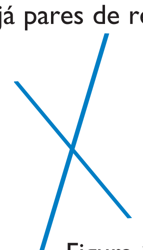


Figura 1

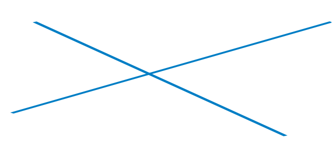


Figura 2

1. Compará los ángulos que se han formado en cada figura y marcá con un color los ángulos congruentes.

2. Elegí pares de ángulos que están en un mismo semiplano respecto de cada recta. ¿Cuánto suman esos pares de ángulos?

3. Si se movieran las rectas, ¿qué pasaría con los ángulos que antes eran congruentes? ¿Y con los ángulos que antes sumaban 180°? Comprobalo dibujando las rectas.

4. Explicá por qué la relación entre los ángulos se mantiene, aunque las rectas se muevan y por consiguiente cambien las amplitudes de los ángulos.

b) Dibujá dos ángulos adyacentes y las bisectrices de cada uno. ¿Qué propiedad tienen esas bisectrices? Enunciala.

c) ¿Qué propiedad tienen las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice?

Para finalizar

Las diferentes actividades que realizaste te han llevado a observar que los ángulos se pueden referir a las posiciones particulares de las rectas que los forman.

Es de interés especial el análisis de las relaciones que vinculan los ocho ángulos que se forman cuando se trata de una recta secante a dos rectas paralelas. En tal caso, cada uno de esos ángulos guarda una relación particular con los otros de modo que:

- **es adyacente de otros dos;**
- **es el opuesto por el vértice con relación a otro ángulo;**
- **es el correspondiente a otro ángulo formado por la recta secante con la otra recta paralela;**
- **es alterno interno o externo de otro de los ángulos, según su posición.**

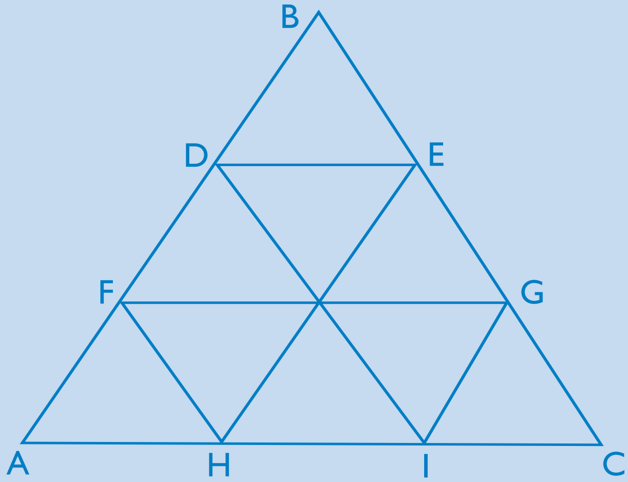
La conclusión más importante es que en virtud de la congruencia entre estos pares de ángulos, o bien de su condición de suplementarios, es suficiente conocer la medida de uno de los ángulos que se forman para poder determinar la medida de todos los otros.

Estos ángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta. Los vínculos que pudiste establecer entre los pares de ángulos según su posición te permitirán encontrar otras relaciones a medida que avances en el estudio de la Geometría. La comprobación de estas relaciones métricas te permitirá la justificación de conjeturas para avanzar, de ahora en más, en el camino de la demostración en Matemática.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. A mirar bien

En este triángulo ABC hay más triángulos y también cuadriláteros. Escribí el nombre correspondiente a cada uno sabiendo que AC // FG // DE; AB // EH // IG; BC // DI // FH.

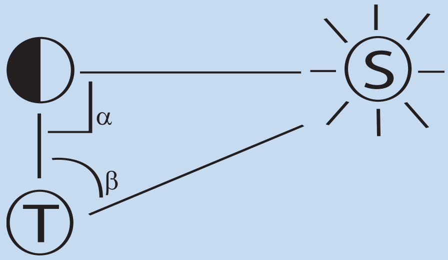


a) Marcá con un color todos los ángulos correspondientes con el ángulo A y señalá las paralelas y la secante que has elegido.

2. Los ángulos en la Antigüedad

Desde la Antigüedad, los hombres observan el cielo y los cuerpos que en él aparecen. Uno de esos hombres fue el sabio Aristarco de Samos, llamado así por haber nacido en ese lugar de Grecia tres siglos antes de Cristo.

Él estableció que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo rectángulo en el momento del cuarto creciente o cuarto menguante. Calculó que β, el ángulo opuesto al cateto mayor, era de 87°, y de esta forma pudo concluir que la distancia Tierra - Sol es mayor que la distancia Tierra - Luna.



Este descubrimiento le llevó a decir que la Tierra giraba alrededor del Sol. Esta idea fue muy criticada por entonces porque no se podía pensar que la Tierra se moviera ya que estaba en contradicción con el sentido común. ¿Podés decir cuál es la propiedad geométrica por la cual Aristarco pudo llegar a esa conclusión?

3. Para seguir pensando

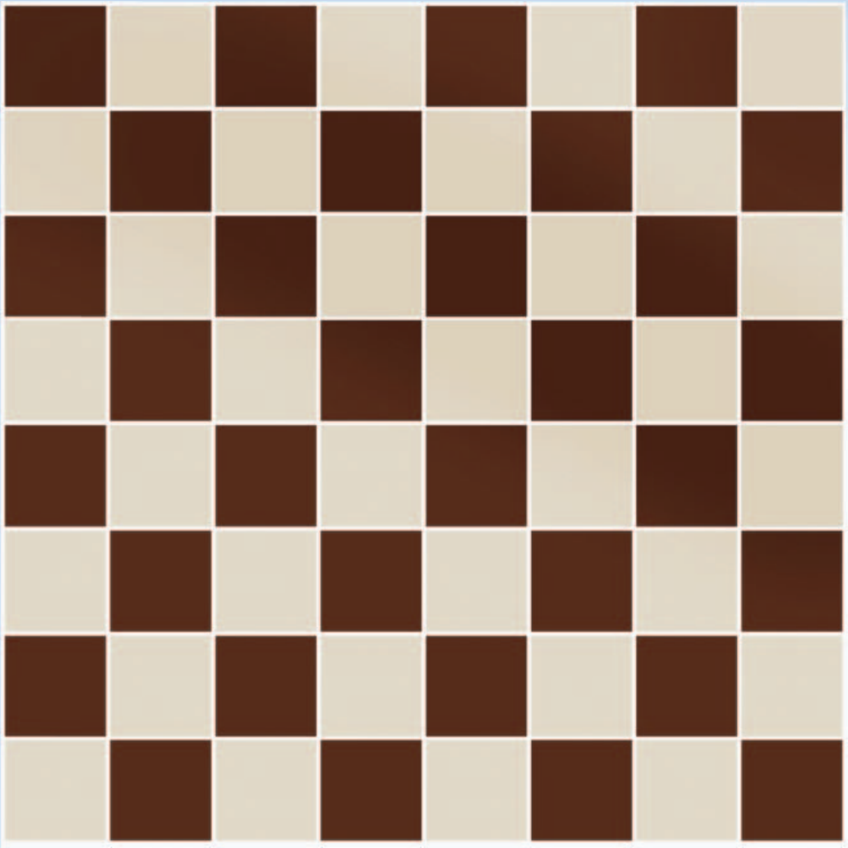
a) Si dos ángulos tienen el mismo complemento, ¿qué podés decir de esos ángulos? Justificá tu respuesta y da un ejemplo.

b) Si dos ángulos tienen el mismo suplemento, ¿qué podés decir de esos ángulos? Justificá tu respuesta y da un ejemplo.

c) Registrá las respuestas en tu carpeta.

4. El tablero de ajedrez

Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez (8 casillas de ancho y 8 de largo) tenía 294 cuadrados. ¿Podés explicar si es cierta esta afirmación?



UNIDAD 9 Más transformaciones: homotecia y semejanza

En unidades anteriores estudiaste transformaciones geométricas en las que permanecen invariantes la forma y las dimensiones de las figuras. Recordarás que las traslaciones y las rotaciones son ejemplos de transformaciones que, además de dejar invariante la forma, conservan la orientación de las figuras, por eso se dice que son movimientos que no salen del plano. En cambio, la simetría es una transformación en la que las figuras se "dan vuelta" y cambian su orientación: lo que en el original está a la izquierda, en la imagen queda a la derecha. La naturaleza nos permite observar elementos simétricos, por ejemplo, las alas de una mariposa; cuando están cerradas se superponen exactamente y cuando están abiertas pertenecen a un mismo plano.

A partir de esta unidad y en las siguientes vas a profundizar en la proporcionalidad entre segmentos a través del estudio de otras transformaciones. Ahora se tratará de casos en los que se conserva la forma, pero puede variar el tamaño de las figuras. Estudiarás la homotecia y la semejanza.

Estos conceptos son de fundamental importancia porque, gracias a ellos, los antiguos griegos pudieron estimar las dimensiones de la Tierra, el Sol y la Luna y las distancias entre ellos, con la simple ayuda de un aparato para medir ángulos.

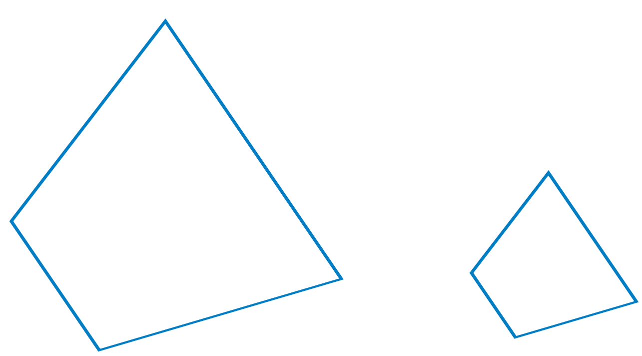
TEMA 1: ¿QUÉ ES LA HOMOTECIA?

A

1. Puntos correspondientes

a) Dibujá en tu carpeta dos figuras como las que se muestran. Si te parece necesario, calcalas.

1. Ponele letras a los vértices. Si observás con atención, verás que al poner letras a los vértices, podrás considerar que a cada vértice de la primera figura corresponde uno de la segunda. Por lo tanto, al poner las letras podés representar esa correspondencia usando la forma que ya consideraste en otras transformaciones: A y A´.



2. Si es posible, trazá con color líneas rectas uniendo vértices que se correspondan entre sí, es decir, las rectas que pasan por *A* y *A'*, *B* y *B'*, *C* y *C'*, *D* y *D'*. Estas rectas se cortan en algún punto; buscalo, marcalo y llamalo *O*. Compará tu trabajo con el de tus compañeros y controlá con tu docente antes de continuar.

3. Respondé: ¿dónde está ubicado el punto *O*?

b) Dibujá y recortá tres triángulos equiláteros distintos entre sí, por ejemplo, con lados de 2 cm, 4 cm y 6 cm, respectivamente. Nombralos *ABC*, *A'B'C'* y *A"B"C"*.

1. Intentá ubicarlos en una hoja de carpeta de modo que los vértices correspondientes se puedan unir entre sí con líneas rectas, y de manera que esas rectas se corten en un punto. Cuando lo logres, pegalos en la carpeta en esa posición y trazá con color esas rectas.

2. Nombrá *P* el punto donde se cortan. Observá dónde está ubicado.

c) Reiterá lo que hiciste en la consigna **b**, con las siguientes figuras:

1. dos rectángulos, uno de 2 cm x 4 cm, y otro de 3 cm x 6 cm;

2. dos rombos, uno con diagonal mayor de 8 cm y diagonal menor de 6 cm, y otro con diagonal mayor de 16 cm y diagonal menor de 12 cm.

d) Leé el recuadro siguiente y confirmá si observaste lo que allí se expresa.

Hay pares de figuras, o a veces más de dos, que tienen:
- igual forma,
- distinto tamaño,
- vértices correspondientes alineados según rectas que se cortan en un único punto o centro,
- ángulos correspondientes iguales y
- lados correspondientes paralelos.

e) Volvé a la consigna **b**: el centro de esa transformación es el punto *P* y, para caracterizarla, tendrás que hacer mediciones y algunos cálculos. Copiá esta lista de segmentos en la hoja donde pegaste los triángulos *ABC*, *A'B'C'* y *A"B"C"*. Medí cada segmento y completá la lista con las medidas correspondientes:

PA = ………	*PA'* = ………	*PA"* = ………
PB = ………	*PB'* = ………	*PB"* = ………
PC = ………	*PC'* = ………	*PC"* = ………
AB = ………	*A'B'* = ………	
BC = ………	*B'C'* = ………	
CA = ………	*C'A'* = ………	

1. Realizá los cocientes entre las medidas de los siguientes pares:

PA’ y *PA*; *PB’* y *PB*; *PC’* y *PC*; *A’B’* y *AB*; *B’C’* y *BC*; *C’A’* y *CA*.

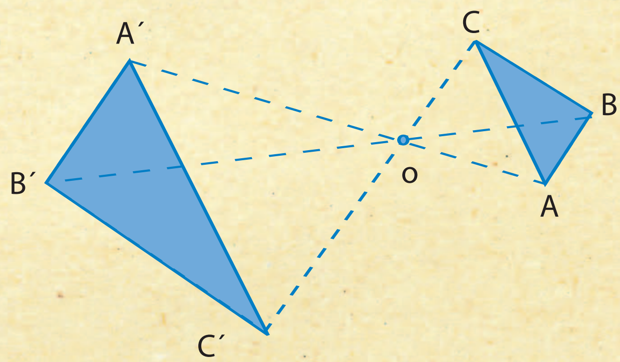
2. Compará tu trabajo con el de tus compañeros, controlá las respuestas con tu docente y escribí todas tus observaciones.

En estos casos se dice que una de las figuras es la imagen de la otra por una transformación llamada **homotecia** (del griego *homós*, semejante), en la que puede variar el tamaño de la figura. La homotecia queda caracterizada por un **centro** y un número. Ese número es la **razón** que vincula la longitud de los segmentos correspondientes en esa transformación.

Por ejemplo, la homotecia que transforma el triángulo *ABC* en el triángulo *A’B’C’* es la homotecia de centro *P* y razón 2.

f) Observá los triángulos que dibujaste en **b**. Respondé estas preguntas relativas a cada par de figuras correspondientes. ¿Cuál es el centro y la razón de la homotecia que transforma el triángulo *ABC* en el triángulo *A”B”C”*? ¿Y el *A’B’C’* en el *A”B”C”*?

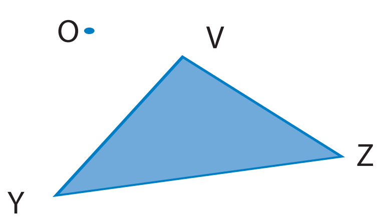
El punto en el que concurren las rectas que determinan los puntos de una figura y sus correspondientes es el centro de homotecia. La razón de homotecia, que se llama ***k***, se calcula hallando el cociente entre *OA* y *OA’*. *O* es el centro; *A* un punto cualquiera y *A’* su correspondiente imagen. El signo de la razón depende de la posición de *O* respecto de *A* y *A’*. Si la razón es positiva, *A* y su imagen *A’* se encuentran sobre una misma semirrecta de origen *O*. En cambio, si *A* y *A’* pertenecen a semirrectas opuestas de origen *O*, la razón es negativa y el centro se encuentra entre *A* y *A’*, como en la figura en la que al triángulo *ABC* se ha aplicado una homotecia de centro *O* y razón –2.



A 2. Imágenes homotéticas

a) Para hallar la imagen del triángulo *VYZ* según una homotecia de centro *O* y razón 3, seguí las siguientes instrucciones.

1. Dibujá un triángulo *VYZ* y un punto exterior *O*, como se muestra en la figura.



2. Trazá desde el punto *O*, con línea punteada, tres semirrectas que pasen por *V*, *Y* y *Z*, respectivamente.

3. Tomá la medida de *OV* y marcá *V'* sobre la semirrecta de manera que el segmento *OV'* sea el triple de *OV*.

4. Hacé lo mismo para encontrar *Y'* y *Z'*. Para lograr más precisión en las medidas podés usar el compás.

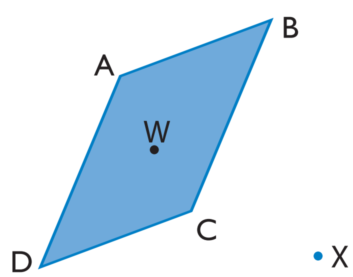
5. Uní *V'* con *Y'* y con *Z'*. Ha quedado así dibujada la imagen de *VYZ*, según la homotecia de centro *O* y razón 3. Resaltá con colores el triángulo *VYZ* y su imagen *V'Y'Z'*.

b) En una hoja en blanco, dibujá un cuadrado *ABCD* de 4 cm de lado y escribí las instrucciones necesarias para hallar la imagen del cuadrado según una homotecia, de modo que uno de tus compañeros o tu docente puedan hacerlo. No olvides tener en cuenta que deben cumplirse las relaciones que observaste en la actividad 1, consigna **d**.

c) Intercambiá la hoja con la de algún compañero. Cada uno dibujará la imagen siguiendo las instrucciones. Controlen si los dibujos son correctos. Ante cualquier duda consulten con el docente.

A 3. El centro y la razón de homotecia

a) Dibujá con color en tu carpeta un cuadrilátero *ABCD*, un punto exterior *X* y un punto interior *W*. Dibujá *A'B'C'D'*, imagen de *ABCD*, por la homotecia de centro *X* y razón 2.



b) Dibujá con otro color *A''B''C''D''*, imagen del cuadrilátero *ABCD* por la homotecia de centro *W* y razón 2.

c) Respondé en tu carpeta.

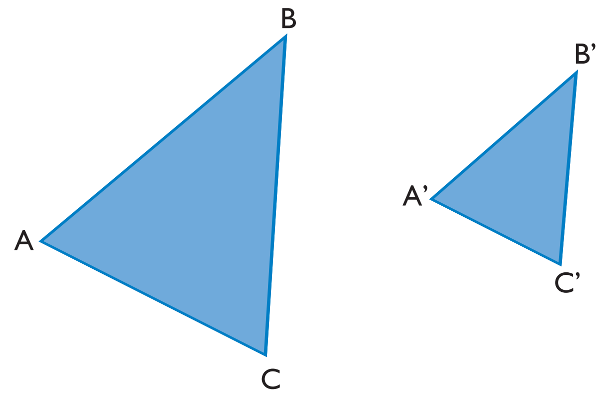
1. ¿Cómo es el tamaño de cada una de las imágenes obtenidas respecto del tamaño de la figura original?

2. ¿Cómo es la forma de las dos imágenes obtenidas respecto de la forma de la figura original?

3. ¿Qué relación hay entre los lados de la figura original y sus correspondientes en las respectivas imágenes?, ¿y acerca de los ángulos en la figura original y sus correspondientes en las respectivas imágenes?

4. Compará tus respuestas con la de tus compañeros y consúltenlas con su docente.

d) ¿Cuál es el centro de la homotecia que transforma *ABC* en *A'B'C'*? Explicá en tu carpeta cómo procediste para responder.



Como habrás podido observar a través de estas actividades, al aplicar este tipo de transformaciones se obtienen figuras de la misma forma que la original, pero que pueden no tener el mismo tamaño.

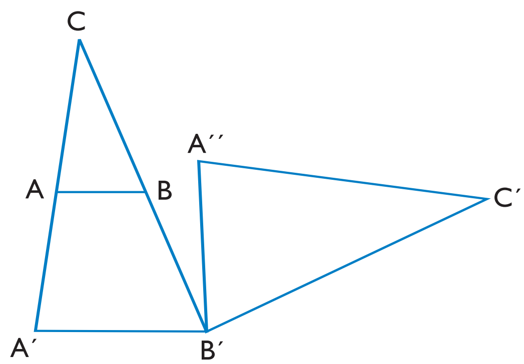
Las homotecias son transformaciones conformes porque conservan la forma de las figuras, pero no necesariamente su tamaño. En cambio, las rotaciones, las simetrías y las traslaciones, que ya estudiaste en la unidad 6 del *Cuaderno de estudio 2*, además de conformes son transformaciones **isométricas** (del griego *isos*, igual) del plano porque conservan las medidas de las figuras.

A continuación avanzarás en el estudio de las transformaciones. En el tema siguiente explorarás la semejanza y verás de qué manera está relacionada con la homotecia. En la primera actividad analizarás las condiciones para que dos figuras sean consideradas semejantes.

TEMA 2: LA SEMEJANZA

A 4. Figuras semejantes

a) Observá los triángulos *ABC* y *A''B'C'*. Para obtener el segundo a partir del primero, se le aplicó al triángulo *ABC* una homotecia de centro *C* y razón 2 y se obtuvo *A'B'C*, y a esa imagen *A'B'C* se la rotó 90° en sentido horario con centro en *B'*.



Para expresar simbólicamente que al triángulo *ABC* se le ha aplicado primero la homotecia y luego una rotación se escribe:

$$R_{(B';\,90^\circ)} \circ H_{(C;\,2)}\ \widehat{ABC} = \widehat{A''B'C'}.$$

Si leés la fórmula de izquierda a derecha, parece que las transformaciones están al revés del orden en que fueron hechas. Esto es así porque el símbolo de la operación que primero se aplica, se escribe en la fórmula siempre a la izquierda de la figura y junto a ella. En este caso se le aplicó al triángulo *ABC* una homotecia de centro *C* y razón 2, es decir: $H_{(C;2)}$ *ABC*. La segunda operación en la que a esa imagen *A'B'C* se la rotó 90º en sentido horario con centro en *B'*, se aplica al resultado de $H_{(C;2)}$ *ABC*, por eso queda escrita más a la izquierda:

$R_{(B';\,90^\circ)} \circ H_{(C;\,2)}\ \widehat{ABC}.$

Las siguientes tablas expresan la transformación resultante; una muestra la correspondencia entre los ángulos y la otra, entre los lados.

ABC	A'B'C
A	A'
B	B'
C	C'

Ángulos

ABC	A'B'C
AB	A' B'
BC	B' C'
CA	C' A'

Lados

b) En el mismo orden, las siguientes tablas muestran las medidas de los ángulos, en grados, y las medidas de los lados, en centímetros. Respondé en tu carpeta si la relación entre las medidas de los lados de ABC y A''B'C' es directamente proporcional y por qué.

ABC	A'B'C
80°	80°
65°	65°
35°	35°

Ángulos

ABC	A'B'C
2,15	4,3
1,2	2,4
2	4

Lados

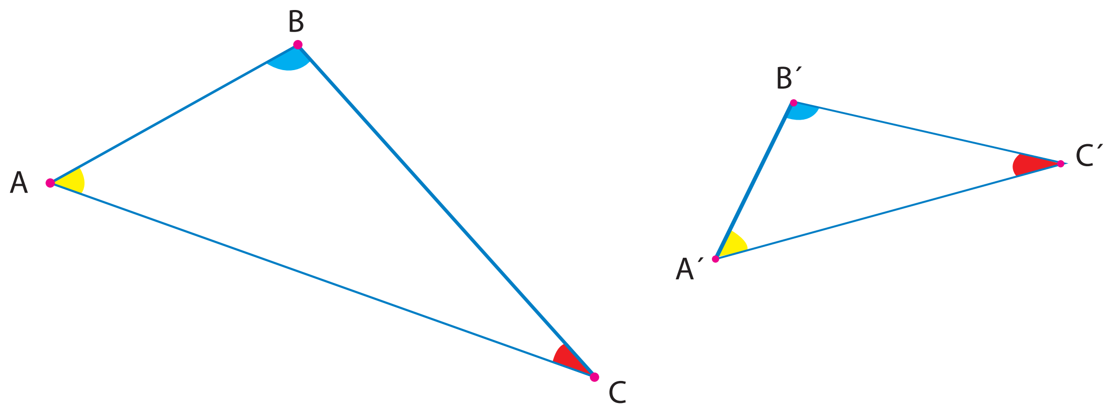
Dos figuras son **semejantes** si cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:
- sus ángulos correspondientes son iguales;
- sus lados correspondientes tienen medidas que se vinculan por una función directamente proporcional.

Dicho de otro modo, dos figuras son semejantes si una se puede obtener a partir de la otra por aplicación sucesiva de una homotecia y alguna de las trasformaciones isométricas; o sea, traslaciones, giros o simetrías.

En el ejemplo anterior, la igualdad de los ángulos es evidente y la proporcionalidad de los lados correspondientes se observa en la igualdad de los cocientes $\frac{4,3}{2,15}$; $\frac{2,4}{1,2}$; $\frac{4}{2}$.

Si realizás los cálculos, verás que en todos los casos el cociente es 2; entonces, la razón de semejanza de *A''B'C'* con respecto a *ABC* es 2.

c) Considerá los triángulos, *ABC* y A´B´C´ que aparecen a continuación para resolver las siguientes consignas en tu carpeta.



1. Realizá todas las mediciones necesarias para verificar que se trata de dos triángulos semejantes.

2. Elaborá las tablas de medidas de los ángulos y de los lados correspondientes.

3. Hallá la razón de semejanza.

4. Indicá qué triángulo tomaste como original y cuál, como imagen.

En las siguientes actividades seguirás trabajando sobre transformaciones y figuras semejantes. Acordá con tu docente cuándo resolverlas.

A 5. Análisis de figuras semejantes

a) La siguiente tabla muestra las medidas de los lados de dos triángulos semejantes; el triángulo *MNP* es la imagen del triángulo *RST*:

$\overset{\triangle}{RST}$	$\overset{\triangle}{MNP}$
RS = 3	MN = 4,5
ST = 2	NP = 3
TR = 2,5	PM = 3,75

Copiá la tabla en tu carpeta y respondé.

1. ¿Cuáles son los pares de lados correspondientes?

2. ¿Qué medida tienen los lados de la figura considerada como original?

3. ¿Cuál es la razón de semejanza?

4. La figura imagen ¿se agrandó o se achicó con respecto a la original?

b) Hacé lo mismo que en **a** considerando la siguiente tabla en la que $\overset{\triangle}{RST}$ es la imagen de $\overset{\triangle}{MNP}$.

$\overset{\triangle}{MNP}$	$\overset{\triangle}{RST}$
MN = 6	RS = 3
NP = 4	ST = 2
PM = 4,5	TR = 2,25

c) ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las situaciones planteadas en **a** y **b**?

d) La siguiente tabla está incompleta. Para que puedas hallar las medidas de los lados BC y PM tené en cuenta que el triángulo ABC es la imagen del triángulo MNP por una semejanza. Hacé lo siguiente:

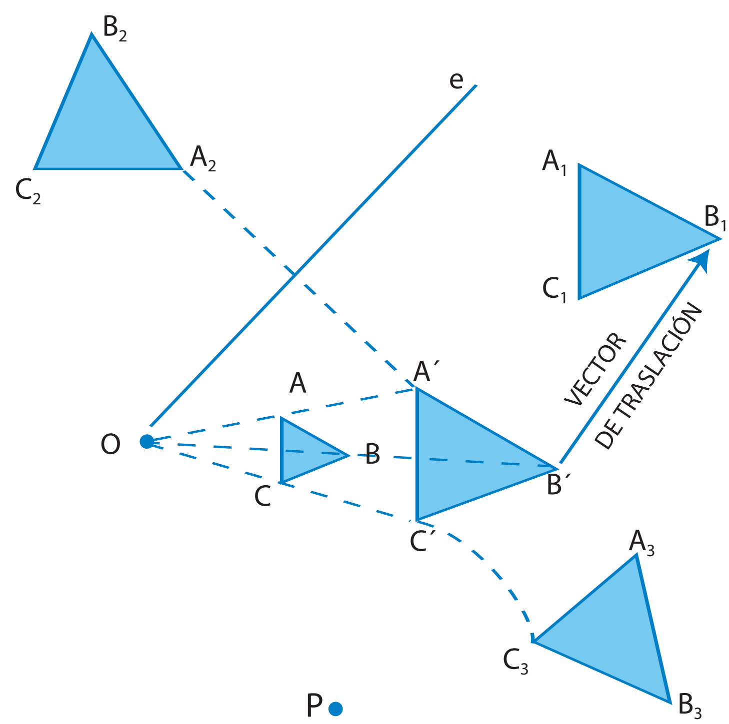
1. Copiá la tabla en tu carpeta.

2. Encontrá las medidas que faltan para completarla. Seguramente, podrás usar lo que ya aprendiste sobre razones y proporciones.

3. Explicá paso a paso cómo lo hacés.

$\overset{\triangle}{MNP}$	$\overset{\triangle}{ABC}$
MN = 3	AB = 12
NP = 2	BC =
PM =	CA = 16

e) Observá el siguiente dibujo.



La expresión: $R_{(P;-50°)} \circ H_{(O;\,2)}\ ABC = A_3B_3C_3$, significa que al triángulo ABC se le ha aplicado sucesivamente primero una homotecia de centro O y razón 2 y luego un giro de *centro* P y ángulo –50° y que el resultado de aplicar esas operaciones, en ese orden, es el triángulo $A_3B_3C_3$.

1. Copiá en tu carpeta la expresión anterior que representa todas las transformaciones.

2. Completá las siguientes expresiones y explicá con tus palabras el significado de cada una:

T $(\overrightarrow{B'B_1})$ $\circ H_{(O;\,2)}$ *ABC* =

S (e) $\circ H_{(O;\,2)}$ *ABC* =

3. Nombrá todos los triángulos que son semejantes.

Con la siguiente actividad tendrás la oportunidad de revisar los contenidos de esta unidad y también podrás considerar cuánto sabés sobre estas nuevas transformaciones, sus características, cómo aplicarlas a distintas figuras y cómo expresarlas simbólicamente. Revisá los dos temas de esta unidad y, si no lo hiciste antes, copiá en tu carpeta las definiciones o explicaciones más importantes y los "Para recordar". Prestá especial atención a la expresión simbólica de las transformaciones y asegurate de entender cómo se formula y cómo se lee. Practicalo con las figuras de las actividades.

A

6. Homotecias, semejanzas y símbolos

a) Completá el siguiente cuadro acerca de un rombo *VXYZ* al que se le han aplicado homotecias de distintas razones. Tené en cuenta que un rombo es un paralelogramo con sus lados iguales.

Medida del lado XY	Medida del lado X'Y'	Razón de la homotecia
3 cm	12 cm	
	6 cm	1,5
	2 cm	4

b) En una hoja en blanco dibujá un rectángulo *MNPQ*, de 4 cm por 2 cm. Hallá su imagen según una homotecia de centro *O* (*O* es un punto cualquiera exterior al rectángulo) y razón –2.

En este caso, la razón es un número entero negativo, ¡hay que tener cuidado!

Cuando busques la imagen de *M*, por ejemplo, en vez de hacerlo sobre la semirrecta *OM*, debés hallarla sobre la semirrecta opuesta de *OM*. En ese caso, el centro *O* de la homotecia queda entre la figura original y su imagen.

En cambio, si la razón de la homotecia es positiva, las dos figuras, la original y su imagen, quedan "del mismo lado" respecto del centro de la homotecia.

c) Decidí si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F). Si es verdadera, explicá cómo lo justificás.

1. Todos los rectángulos son semejantes entre sí.

2. Todos los cuadrados son semejantes.

3. Dos rombos iguales son semejantes.

4. Si dos triángulos isósceles tienen los ángulos opuestos a la base respectivamente congruentes son semejantes.

Para finalizar

A lo largo de esta unidad aprendiste que una figura y su imagen homotética siempre cumplen con las siguientes condiciones:

- **sus lados respectivos son paralelos;**
- **las longitudes de los lados son respectivamente proporcionales;**
- **sus ángulos respectivos son iguales entre sí;**
- **su forma es la misma.**

Y también que si dos figuras son semejantes:

- **sus ángulos correspondientes son iguales;**
- **sus lados correspondientes son proporcionales, es decir tienen medidas que se vinculan por una función directamente proporcional;**
- **pueden estar ubicadas en cualquier localización del plano.**

A continuación, como siempre, algunos problemas interesantes para que resuelvas solo. En este caso, sobre temas de Geometría y una incursión al mundo maravilloso de Gulliver.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las esferas

Una caja cúbica de 8 cm de arista contiene una esfera de 8 cm de diámetro. Otra caja cúbica, también de arista de 8 cm, contiene 512 esferitas de 1 cm de diámetro. Todas las esferas son macizas y del mismo material. ¿Qué caja pesará más?

2. Triángulos

¿Puede un triángulo isósceles ser semejante a un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

3. Gulliver y la semejanza (*)

Las historias de Gulliver y sus viajes al país de los enanos (Liliput) y al de los gigantes (Brobdingnag) son muy conocidas. Según cuenta su autor, Jonathan Swift, en el fantástico Liliput las dimensiones largo, ancho y alto de todas las cosas, animales, plantas y personas, eran 12 veces menores que las nuestras, mientras que en Brobdingnag todas las dimensiones eran 12 veces mayores.

En un pasaje de la obra, Gulliver cuenta cómo los liliputienses prepararon la cama para su gigantesco huésped:

> "600 colchones con dimensiones liliputienses fueron traídos en carretas a mi casa. De 150 colchones cosidos entre sí, salió uno en el que cabía libremente a lo largo y a lo ancho. Pusieron uno encima de otro 4 colchones como este, pero aún así, ese lecho era tan duro para mí como una piedra".

a) ¿Cuántas capas debían poner para lograr un colchón normal para Gulliver?

En otro momento del viaje, el autor explica que, para alimentar a Gulliver, "le será entregada diariamente una ración de comestibles y bebidas suficiente para alimentar a 1728 súbditos de Liliput".

b) Si un cocinero puede preparar comida para unos 10 liliputienses, ¿cuántos cocineros harán falta para alimentar a Gulliver?

Las cosas cambian al llegar a Brobdingnag, donde el pobre Gulliver se queja de un travieso escolar que "me tiró una avellana a la cabeza y por poco me da, y la había lanzado con tal fuerza que me hubiera descalabrado inevitablemente, porque la avellana era poco menor que una calabaza nuestra".

c) ¿Cuánto pesará una avellana en Brobdingnag?

d) Si el diámetro de una avellana es aproximadamente de 1,5 cm, ¿cuál es el diámetro de una en el país de los gigantes?

(*) Camus, N. y Massara, L., *Matemática* 3, Buenos Aires, Aique.

4. Cercando terrenos

En la colonización de un pueblo se utilizó el siguiente procedimiento para la distribución de tierras: todos los colonos podían quedarse con el terreno que fueran capaces de alambrar con 3.000 m de alambrado.

¿Cuál es el mayor terreno que se puede cercar si todas las parcelas tienen que tener forma rectangular?

Algunas personas buscaron terrenos al lado de los ríos. No sólo se aseguraban la provisión de agua sino que ahorraban uno de los lados del terreno a cercar. ¿Cuál es ahora la respuesta?

5. Tornillos, tuercas y clavos

Hay tres cajas: una contiene tornillos, otra tuercas y la otra clavos. El que ha puesto las etiquetas de lo que contienen se ha confundido y no acertó con ninguna. Abriendo una sola caja y sacando una sola pieza, ¿cómo se puede conseguir poner a cada caja su etiqueta correcta?

6. Prendas y botones

María dice que si pone dos botones a cada prenda le faltan dos botones y si pone uno a cada una, le sobra un botón. ¿Cuántas prendas y cuántos botones tiene María? ¿La respuesta es única? ¿Por qué?

7. Sudoku

Es un juego de ingenio japonés, muy popular en el resto del mundo, y con bastantes adeptos aquí. Es fácil de entender y de jugar, y sólo requiere un poco de lógica.

Hay un cuadro de 9 por 9, dividido en 9 cuadros de 3 por 3. La clave está en completar los casilleros con números del 1 al 9, sin repetirlos ni en la hilera, ni en la fila, ni en la cuadrícula menor.

UNIDAD 10 La relación pitagórica

En esta unidad vas a explorar algunas relaciones entre las medidas de los lados, y los ángulos de los triángulos y de otros polígonos. En particular, vas a trabajar sobre lo que se conoce como relación pitagórica, que es una característica de los triángulos rectángulos y tiene muchas aplicaciones en construcciones de todo tipo. Se la llama así en honor a Pitágoras, un eminente filósofo griego que vivió en la primera mitad del siglo VI a.C.

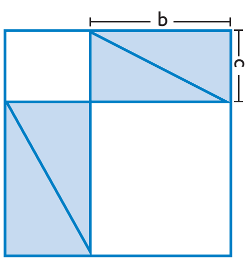
Vas a trabajar con propiedades que ya conocés de triángulos y cuadriláteros, y necesitás tener presente la fórmula para calcular sus áreas. También vas a trabajar con potenciación. Si es preciso recurrí a las unidades en las que se tratan estos temas en el Cuaderno de estudio 1 y 2 o consultá un libro de Matemática de la biblioteca. Podés hacer anotaciones en tu carpeta sobre algunas de estas cosas que repases, para tenerlas a mano cuando avances con las actividades.

A 1. Un rompecabezas

En esta actividad vas a descubrir relaciones matemáticas a partir de algunas construcciones en papel.

a) Construí, en una hoja de cartulina, dos rectángulos congruentes; recortalos, trazales una diagonal y cortalos por ella para que resulten cuatro triángulos rectángulos congruentes. Llamá ***a*** a la hipotenusa del triángulo rectángulo; ***b***, al cateto mayor, y ***c***, al cateto menor.

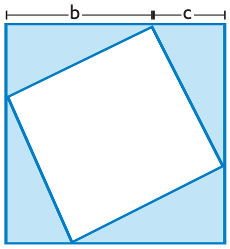
b) Trabajá en tu carpeta. Usá como moldes los cuatro triángulos que recortaste: colocalos como se muestra en la figura y trazá los lados del cuadrilátero que se forma.



1. Observá tu dibujo y respondé. El cuadrilátero que contiene los cuatro triángulos ¿qué forma tiene? ¿Cómo son sus lados? ¿Cuál es el área?

2. ¿Cuál es el área del cuadrado interior pequeño? ¿Cuál es el área del otro cuadrado interior?

c) Construí un cuadrado de lado $b + c$ y colocá en él los cuatro triángulos como se muestra en la figura, ¿cuál es el área del cuadrado interior?



d) Compará los dos cuadrados de lados $b + c$ y andá comprobando este razonamiento:

1. En el primer cuadrado, el área es: 4 áreas del triángulo ABC + $b^2 + c^2$.

2. En el segundo cuadrado, su área es: 4 áreas del triángulo ABC + a^2.

Como ambas áreas son iguales por tratarse de cuadrados de lados congruentes, resulta que $a^2 = b^2 + c^2$.

e) Reunite con tus compañeros y comparen sus trabajos. Piensen qué conclusiones pueden obtener de esta comprobación que acaban de hacer y escribanlas con sus palabras en la carpeta.

Esta propiedad de los cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo rectángulo se conoce como **teorema de Pitágoras** en honor a Pitágoras de Samos, que vivió en el siglo VI a.C. en una colonia griega del sur de Italia. Pitágoras fue el primero en elaborar una demostración formal de esta propiedad. Mucho antes de que él naciera, en el tercer milenio a.C., se encontraron manifestaciones de esta propiedad en tablillas babilónicas, y los egipcios ya sabían que los triángulos cuyos tres lados guardan la relación 3-4-5 son triángulos rectángulos.

Propiedad pitagórica

En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

En símbolos: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Esta fórmula vincula los números que resultan de elevar al cuadrado (es decir, a la segunda potencia) las medidas de los catetos y de la hipotenusa. Es la propiedad más importante de los triángulos rectángulos y constituye también una propiedad de los números cuadrados.

*Para avanzar en la actividad que sigue sobre la relación pitagórica necesitás recordar la rotación y otras transformaciones en el plano, que estudiaste a partir de la unidad **6**. Tenelas a mano para consultar lo que no recuerdes.*

A 2. La demostración de Leonardo

Vas a revisar una demostración muy interesante de la propiedad pitagórica que data del siglo XV y se atribuye a Leonardo da Vinci. Para ello trabajá en tu carpeta. Tené en cuenta las orientaciones que te ofrecen las consignas. Para resolverlas, seguí cada paso, observándolo en la figura que se presenta en el punto **b**.

a) Dibujá un triángulo rectángulo cualquiera ABC y colocá las letras de modo que ***a*** sea la hipotenusa; ***b***, el cateto mayor, y ***c***, el cateto menor.

b) Dibujá un cuadrado sobre cada lado del triángulo.

1. Marcá el punto *O*, centro del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

2. Aplicá al triángulo *ABC* una rotación de centro *O* y ángulo de 180° para construir la imagen de *ABC*, y llamala *A''B''C''*.

3. Trazá los segmentos *B'C'*, *DE* y *AA''* como se indica en la figura.

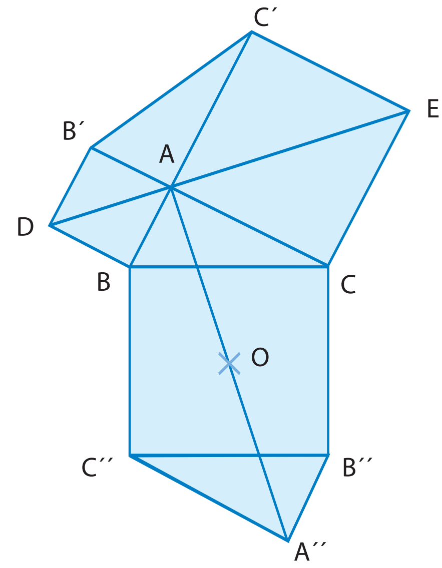
4. Respondé: ¿qué rotación hay que aplicarle al cuadrilátero *ABC''A''* para que se superponga con *A''B''CA*?

5. ¿Cómo podés justificar que los hexágonos *BCEC'B'D* y *A''B''CABC''* tienen áreas equivalentes?

6. Observá las siguientes igualdades y escribí tus conclusiones:

Área *BCEC'B'D* = 2 área *ABC* + c^2 + b^2

Área *A''B''CABC''* = 2 área *ABC* + a^2



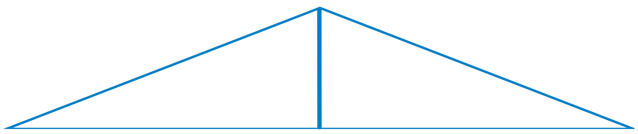
c) ¿Por qué este desarrollo demuestra la propiedad pitagórica que aprendiste en la actividad **2**? Explicalo en tu carpeta.

Las aplicaciones de la propiedad pitagórica son innumerables. En esta actividad analizarás algunas.

Para realizarla vas a necesitar un rollo de piolín.

A 3. Aplicaciones de la propiedad pitagórica

En primer lugar, vas a estudiar cómo se relaciona con la propiedad pitagórica el armado de la cumbrera en los techos a dos aguas en los que la altura de la viga central depende de la inclinación que quiera dársele al tejado.

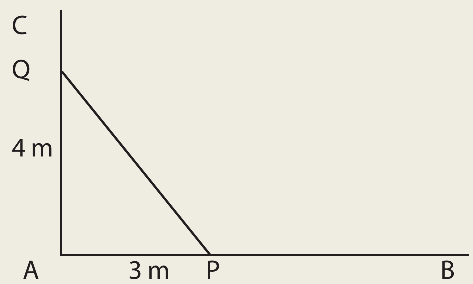


Por ejemplo, si la inclinación deseada es del 40%, eso significa que por cada metro en la dirección horizontal corresponde 0,40 m en la viga vertical central.

a) Conocido el ancho de la cumbrera, explicá cómo calcularías la longitud de la viga inclinada.

b) También se aplica esa propiedad en la construcción de paredes "a escuadra", es decir que formen ángulo recto. Para analizarlo, resolvé la siguiente situación.

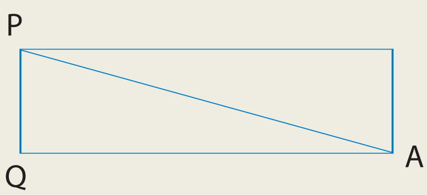
Don José quiere construir un galpón para guardar el tractor, las herramientas y armar un taller. El albañil que contrató limpió el terreno y usó piolín, estacas, un martillo y una cinta métrica para marcar los cimientos.
Para asegurarse de que el ángulo formado fuera recto, el albañil plantó una estaca en A. Luego midió 3 metros sobre el lado AB y plantó una estaca en P. Desde A hacia C midió 4 metros y plantó otra estaca en Q. Tensó un piolín entre P y Q y al medirlo obtuvo 4,85 m. Tuvo que desclavar una estaca y corregir su posición hasta que PQ midiera exactamente 5 metros.



1. Explicá por qué procedió de ese modo.

c) Otras aplicaciones pueden observarse en la construcción de rectángulos. Continuá analizando la situación anterior.

Don José aprendió del albañil a construir ángulos rectos usando estacas, piolín y una cinta métrica. Quiere marcar un cantero rectangular de 50 cm por 120 cm, ¿cuánto debe medir PA para que PQ y AQ formen un ángulo recto?



d) Observá la relación en el uso práctico de la "escuadra egipcia".

Los egipcios, mucho antes de que naciera Pitágoras, ya sabían que los triángulos cuyos lados guardan la relación: 3-4-5 son rectángulos. Este conocimiento les permitió la construcción de un instrumento útil y sencillo: **la escuadra egipcia**.

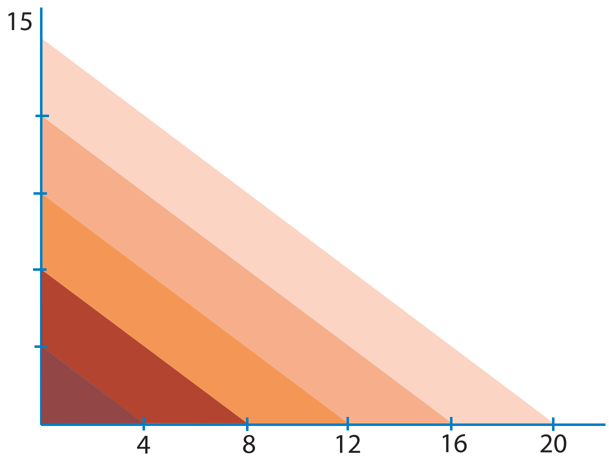
1. Para construirla tomá un rollo de piolín y, con mucha paciencia, hacele nudos de modo que entre ellos queden 12 espacios exactamente iguales. Para eso cerrá el piolín atando el primer nudo con el último. Con esta escuadra egipcia de 12 espacios podés verificar si las paredes de tu casa o las de la escuela están realmente "en escuadra".

2. Explicá con tus palabras por qué la escuadra egipcia permite obtener ángulos rectos.

A

4. Las ternas de números pitagóricos

a) El siguiente esquema representa cinco triángulos superpuestos. Copialo en tu carpeta y completá una tabla como la que aquí se presenta con sus respectivas medidas.



Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
3	4	5
6		
9		
12		
15		

En la tabla se han formado ternas de números (3-4-5), (6-8-10), (9-12-15), (12-16-20), (15-20-25) que representan la relación que estás estudiando.

Las ternas de números naturales que expresan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo se llaman **ternas de números pitagóricos**.

b) Respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

1. ¿Te parece que 4-5-6 son números pitagóricos? Verificá tu respuesta usando la calculadora.

2. Repetí el procedimiento con 8-5-17.

3. Proponé ejemplos de una terna pitagórica y de otra terna que no lo sea.

Desde el tercer milenio a.C., los pueblos babilonios escribieron sobre tablillas de arcilla que aún hoy se conservan. En más de 500 de ellas aparecen expresiones matemáticas que nos han permitido conocer su sistema de numeración en base 60 y su dominio sobre la relación pitagórica.

La tablilla conocida como Plimpton 322 se conserva en la Universidad de Columbia y fue escrita por los babilonios hacia el año 1800 a.C. En esa tabilla aparecen las ternas de números pitagóricos que pueden calcularse a partir de operar con dos números enteros, por ejemplo *m* y *p*.

c) Elaborá una tabla como la siguiente en tu carpeta y completala. Inventá otras ternas pitagóricas. Controlá tus resultados usando la calculadora.

m	p	a $(m^2 + p)$	b $(m^2 – p)$	c 2mp	$a^2 = b^2 + c^2$
2	1	5	3	4	$5^2 = 3^2 + 4^2$
3	1	10	8	6	$10^2 = 8^2 + 6^2$
3	2				
4	1				
4	2				
4	3				
5	1				

A 5. La diagonal del cuadrado

En la actividad **3** viste algunas aplicaciones prácticas de la propiedad de Pitágoras en la construcción de galpones y edificios. Ahora verás una aplicación muy importante para el conocimiento matemático: vas a calcular la medida de la diagonal de un cuadrado conociendo su lado.

a) Dibujá un cuadrado y trazale la diagonal. Llamá ***l*** al lado del cuadrado, y ***d***, a la diagonal.

b) Leé el siguiente recuadro y, teniendo en cuenta la lectura, respondé la pregunta que le sigue.

Aplicando la propiedad pitagórica: $d^2 = l^2 + l^2$. Es decir que: $d^2 = 2\,l^2$. Se puede buscar la raíz cuadrada en los dos miembros de la igualdad y escribir: $d = \sqrt{2\,l^2}$ o bien $d = l\,\sqrt{2}$.

1. ¿Cuánto mide la diagonal de un azulejo cuadrado de 15 cm de lado? Hacé los cálculos y comprobá el resultado midiendo con una regla la diagonal en un cuadrado de papel del tamaño del azulejo.

c) Resolvé las siguientes situaciones.

1. Si el lado de un cuadrado mide 1 dm, ¿cuánto mide su diagonal?

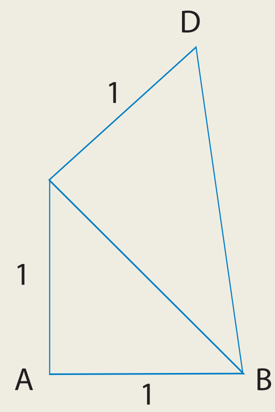
2. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado?

3. Dibujá un cuadrado *ABCD* y trazá las diagonales. Por cada uno de los vértices trazá las paralelas a las diagonales. ¿Cómo es el área del nuevo cuadrado con respecto al primero?

4. El procedimiento del problema anterior te permite calcular rápidamente el área de un cuadrado conocida la diagonal. Explicá con tus palabras por qué es así.

5. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 6 cm?

6. Observá la figura y calculá la longitud del segmento *DB*.



d) Usando papel cuadriculado, construí un cuadrado de lado 8 y trazá las dos diagonales. Construí otro cuadrado dentro del anterior uniendo los puntos medios de las mitades de las diagonales. ¿Qué relación hay entre los perímetros de los dos cuadrados? ¿Y entre sus áreas?

1. Respondé en tu carpeta: ¿por qué es importante esta aplicación de la relación pitagórica?

2. ¿En qué situaciones es útil?

Para finalizar

En esta oportunidad vas a realizar vos mismo la síntesis de la unidad. Para ello:

1. Elaborá un índice con el nombre de las actividades.

2. Escribí el o los conceptos más importantes que estudiaste en cada una de ellas. Incluí definiciones o fórmulas si corresponde.

3. Terminá tu síntesis con las respuestas a estas preguntas:

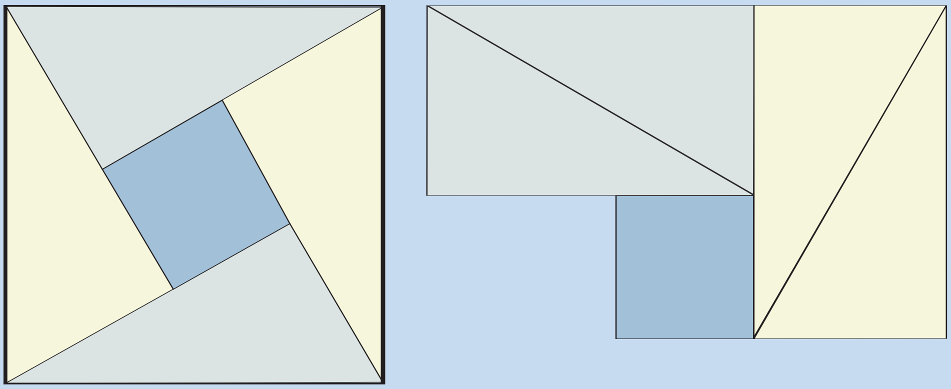
- **¿A qué se llama relación pitagórica?**
- **¿En qué consiste?**

En los siguientes desafíos podrás reconstruir algunos de los problemas que se plantearon sobre la relación pitagórica a lo largo de la historia de la Matemática. Verás las situaciones ingeniosas que propusieron matemáticos chinos e hindúes y tendrás la posibilidad de resolverlas por tu cuenta.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Un matemático indio

Bashara, un matemático de la India medieval que vivió entre 1114 y 1185, dejó en su obra este desafío:



Observando las figuras, imaginá en qué consiste el desafío.

2. Más desafíos de Bashara

"Lilavati" quiere decir hermosura. Ese es el nombre de una obra de Bashara que contiene una serie de problemas, entre los cuales figuran los dos siguientes que se plantean para que los resuelvas.

a) El bambú roto

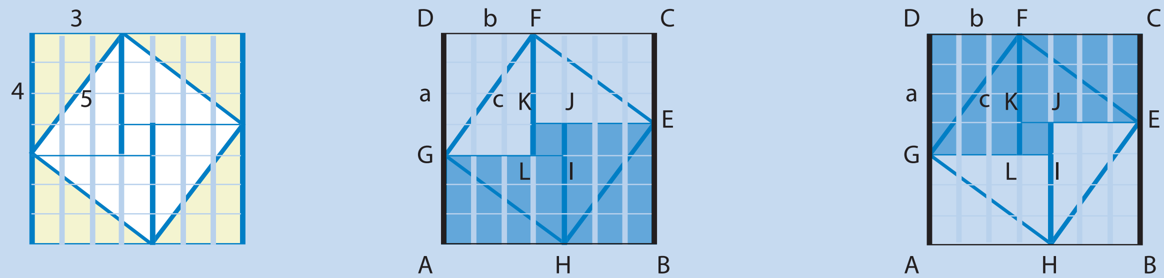
Si un bambú de 32 codos de altura ha sido roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 16 codos de su base, ¿a qué altura del suelo se rompió?

b) El pavo real y la culebra

Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero que es la entrada de la cueva de una culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?

3. Un desafío chino

Uno de los primeros libros chinos dedicados a la Matemática y la Astronomía es el Chou Pei, de una antigüedad aproximada a los 300 a.C. En él se hace referencia al teorema de Pitágoras en un caso particular: si a partir de un cuadrado de 7 unidades de lado se sacan de las esquinas 4 triángulos rectángulos de catetos 3 y 4 (vale decir 24 unidades cuadradas) queda un cuadrado de 25 unidades cuadradas y, por lo tanto, su lado es 5.



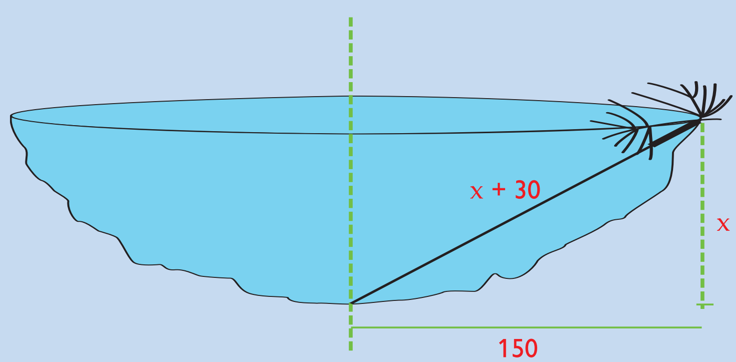
El desafío es que a partir de las figuras justifiques con tus palabras la siguiente expresión:

$$(3 + 4)^2 - 2\,(3 \cdot 4) \; = \; 3^2 + 4^2 = 5^2$$

4. El junquillo chino que fue loto indio

El siguiente problema pertenece al libro chino *Chu Chang Suan Shu* o *Arte matemático en nueve secciones.* Ese libro probablemente sea del siglo II a.C., su autor es desconocido y contiene 246 problemas divididos en 9 capítulos.

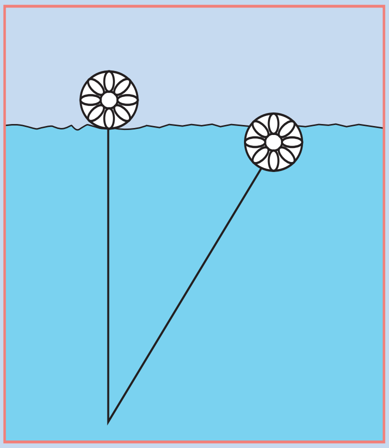
> "Crece en medio de una laguna circular de 3 m de diámetro un junquillo que sobresale 30 cm del agua. Cuando se inclina hasta que lo cubre el agua alcanza justamente la orilla de la laguna. ¿Qué profundidad tiene el agua?"



Posiblemente el libro haya pasado de la China a la India porque Bashara en su *Lilavati* expone este problema con algunas modificaciones, por ejemplo, toma una planta familiar en su entorno como es el loto y lo presenta así:

> "En cierto lago repleto de gansos rosados y grullas se podía ver la parte superior de una flor de una planta de loto, un palmo arriba de la superficie del agua. Forzado por el viento, avanzó gradualmente y fue sumergido por el agua a una distancia de 4 palmos. Calcula, ¡deprisa matemático!, la profundidad del agua."

Con la ayuda de los dibujos te será fácil resolver estos desafíos.



5. Se busca un número

a) Tenés que encontrar un número de cuatro cifras tal que:

La cifra de las centenas sea menor que la de las unidades.

La cifra de las unidades sea $\frac{2}{3}$ de la de las unidades de mil.

La cifra de las unidades de mil sea $\frac{2}{3}$ de las decenas.

La cifra de las decenas sea el triple de las centenas.

b) Inventá otras búsquedas y probalas con tus compañeros.

UNIDAD 11 Volumen y área de prismas y pirámides

En muchas ocasiones de la vida cotidiana se presentan problemas prácticos como los siguientes: qué relación se puede establecer entre la forma de ciertos objetos y su volumen para estimar cuántos de ellos caben en un determinado lugar, o si la forma de dos recipientes de la misma capacidad influye en la cantidad de papel que se necesita para embalarlos. En ambos casos se trata de considerar conceptos como el volumen y la capacidad. Esos conceptos tienen significados diferentes: mientras el volumen se refiere a un espacio ocupado, la capacidad lo hace a un espacio vacío con posibilidad de ser llenado. A pesar de eso, habrás advertido que muchas veces la capacidad de un recipiente y el volumen que ocupa el líquido que contiene se usan como expresiones equivalentes. De hecho, se sabe que no se trata de situaciones totalmente independientes y que, si una sustancia llena un recipiente de un litro de capacidad, ocupa un volumen de un decímetro cúbico.

Cuando se tratan problemas como estos, se requiere reflexionar acerca de las relaciones entre la superficie y el volumen de los cuerpos, tema que se tratará especialmente en esta unidad.

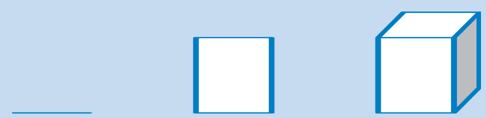
En esta unidad trabajarás especialmente con el cálculo de las áreas y los volúmenes de prismas y pirámides. Para eso, relacionarás el cálculo del volumen de un prisma recto con sus dimensiones lineales –ancho, largo y alto– y también aprenderás a calcular el área y el volumen de las pirámides en función de sus dimensiones. Para encarar las actividades, necesitás tener presente qué forma tienen los prismas y las pirámides, y también cuáles son las unidades de medida que se usan para medir las longitudes, las áreas, el volumen y la capacidad. Para revisar esos temas podés consultar las unidades de Geometría del Cuaderno de estudio 1*, especialmente las **9**, **11** y **12**, o buscar libros de Matemática en la biblioteca en cuyos índices identifiques estos temas.*

Para resolver las actividades de esta unidad vas a necesitar papel de diario, cartulina y papel cuadriculado o isométrico (que es un papel con puntitos que forman cuadros o triángulos). También necesitarás utilizar "cubos unidad" de 1 cm de arista (que podrán ser de madera, de plastilina o de cartulina). Consultá con tu docente para decidir de qué material serán los cubos con los que vas a trabajar.

TEMA 1: VOLUMEN DE UN CUERPO

En este primer tema vas a trabajar sobre procedimientos para el cálculo de volúmenes y vas a revisar las unidades de medida que se usan.
*Para realizar parte de las actividades **1** y **2** vas a necesitar trabajar junto con otro compañero. Si tus compañeros que están trabajando con el* Cuaderno de estudio 1 *están resolviendo la unidad **11**, es conveniente que te reúnas con ellos. Si así no fuera, consultá con tu docente para decidir con quién podés realizar la tarea y cómo organizarte.*

Para empezar a trabajar con los contenidos de esta unidad, es importante que recuerdes que: el volumen de un cuerpo indica cuánto espacio ocupa y se expresa habitualmente en m^3, dm^3 o cm^3. Un cubito de 1 cm de arista ocupa un volumen de ***1 centímetro cúbico (1 cm^3)****, y cada una de sus caras tiene una superficie de* ***1 centímetro cuadrado (1 cm^2)****.*



1 cm **1 cm^2** **1 cm^3**

A 1. ¿Qué espacio ocupa un metro cúbico?

a) Construyan un espacio de un metro cúbico (1 m^3). Para poder lograrlo sigan estas instrucciones.

1. Peguen hojas de papel de diario para armar dos o tres cuadrados de 1 metro de lado.

2. Para delimitar un cubo de un metro de lado pueden ayudarse con las paredes y el piso de un rincón del aula. Si dos personas sostienen convenientemente con las manos los cuadrados de papel, el piso puede representar la base del cubo y las paredes, dos de las caras laterales. Lo importante es que puedan apreciar el espacio que ocupa un metro cúbico.

3. Escriban en sus carpetas cómo construyeron ese espacio y estimen cuántas personas caben en él.

b) A partir del volumen del metro cúbico que acaban de construir hagan una estimación acerca de cuántos metros cúbicos mide el espacio del aula. Anótenlo y consulten con su docente para controlar sus resultados.

El espacio que ocupa un cubo de un decímetro de arista es 1 dm^3. En 1 m^3 caben 1000 dm^3.

A 2. Estimación de volúmenes

a) Estimá el volumen aproximado de los siguientes objetos. Tus estimaciones te van a servir para completar la tabla siguiente. Copiala en tu carpeta y después completá las filas con el nombre de los objetos de esta lista que correspondan.

- *Una caja de zapatillas*
- *Una calculadora*
- *Un cuaderno*
- *Una lenteja*
- *Un zapallo*
- *Una naranja*
- *Una heladera comercial*
- *Un escritorio*
- *Una goma de borrar*
- *Una caja de fósforos*
- *Una caja de arroz*
- *Una pelota de fútbol*
- *Un armario del aula*
- *Un diccionario*

Mayor que 1 dm^3	Menor que 1 dm^3	Mayor que 1 m^3

b) Agregá a cada una de las columnas tres objetos que te resulte interesante mencionar.

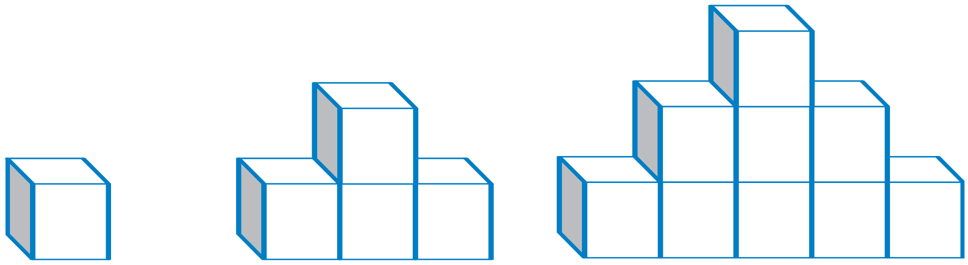
Uno de los objetivos de esta unidad es que aprendas a calcular el área y el volumen de los prismas y las pirámides en función de sus dimensiones. Para eso vas a empezar por analizar una familia de cuerpos en la que cada uno se construye agregando cubos al anterior. De ese modo podrás observar cómo la variación en las dimensiones influye en el aumento del volumen.

*La actividad **3** está vinculada con la construcción de escaleras simples o dobles a partir de cubos. Como vas a necesitar dibujarlas, te va a resultar más fácil si usás papel isométrico o papel cuadriculado.*

A 3. Volumen de una familia de cuerpos

En esta actividad encontrarás una fórmula que permite calcular el volumen de cualquier cuerpo de la familia sin necesidad de dibujarlo ni contar los cubos uno por uno.

a) El volumen de los sucesivos cuerpos de esta familia de escaleras crece cuando se pasa de uno cualquiera al siguiente. El aumento de 2 cm en el ancho y de 1 cm en el alto provoca un aumento del volumen. Observá las siguientes figuras que son escaleras dobles de 1, 2 y 3 escalones construidas con cubos de 1 cm^3.



b) Dibujá en tu carpeta una o dos escaleras más de este tipo, por ejemplo, con una altura de cuatro, cinco o seis cubos.

c) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta y completá los espacios en blanco. En la columna *n* escribí una expresión general, es decir, una fórmula, para calcular el volumen (en cm^3) de las escaleras dobles de cualquier altura, que podemos llamar altura *n*.

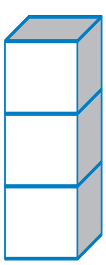
Altura de cada escalera doble	1	2	3	4	5	6	*n*
Número de cubos en cada escalera doble	1	4	9				

Seguramente habrás observado que la fórmula para calcular el volumen de un cuerpo es el cuadrado de un número: $V = n^2$. En este caso, el número n^2 no expresa la medida de una superficie sino el número de cubos que se usan en la construcción del cuerpo, vale decir, la medida de su volumen.

*En la actividad anterior trabajaste con la variación en el ancho y el alto de los cuerpos. Para seguir viendo cómo influyen las dimensiones en el cálculo del volumen, en la actividad **4** trabajarás con una familia de cuerpos en los que varían el ancho, el largo y el alto.*

Vas a necesitar cubos unidad, pero, si no los tenés disponibles, podés dibujarlos.

A 4. Volumen de otra familia de cuerpos



a) El dibujo muestra un cuerpo en forma de torre construido con tres cubos de 1 cm^3. Sus dimensiones son: 1 cm de ancho, 1 cm de largo y 3 cm de alto. Dibujá una torre semejante a la de este dibujo, pero duplicá todas sus dimensiones: ancho, largo y alto. ¿Cuántos cubos de 1 cm^3 la forman?

b) ¿Y si triplicás todas las dimensiones de la primera torre? Dibujá la nueva construcción. ¿Cuántos cubos contiene?

c) Construí en tu carpeta una tabla como esta y registrá en ella los datos obtenidos.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_n
Largo (cm)	1	2	3	4	5	*n*
Ancho (cm)	1	2				*n*
Alto (cm)	1	6				$3 \cdot n$
Volumen (cm^3)	3	24				

d) Continuá este proceso dos veces más para formar nuevas torres.

e) ¿Cuántos cubos contiene una torre de dimensiones 9 · 9 · 27? Explicá claramente cómo procedés para responder.

En oportunidades anteriores viste que, si se duplica el lado de un cuadrado, el área de la nueva figura no es el doble de la anterior sino su cuádruple. En símbolos, si el lado del cuadrado es **n**: **área** $\blacksquare_{n} = n^2$ y **área** $\blacksquare_{2n} = (2\ n)^2 = 4\ n^2$.

Cuando se trata del volumen de un prisma, si se multiplican por **n** todas sus dimensiones se produce un aumento del volumen de n^3 unidades cúbicas. Por ejemplo, para calcular el número de centímetros cúbicos necesarios para formar un cubo de 10 cm de arista es:
1 dm^3 = 10 cm de ancho · 10 cm de largo · 10 cm de alto,
o sea, 10 cm · 10 cm · 10 cm = $10^3\ cm^3 = 1000\ cm^3$.

En el tema **2** vas a empezar a relacionar área y volumen trabajando con prismas y pirámides.

A lo largo de este tema y del siguiente, vas a ir aprendiendo las expresiones simbólicas, es decir, las fórmulas para encontrar áreas y volúmenes. Una vez que las hayas descubierto, podrás escribirlas en una hoja aparte de tu carpeta o en un afiche en el aula para tenerlas disponibles. A medida que trabajes con ellas, es importante que las recuerdes, porque luego las vas a poder aplicar al cálculo de volúmenes de cualquier prisma o pirámide.

Ahora vas a trabajar sólo con prismas y pirámides, para ver las relaciones entre dimensiones y áreas de sus caras.

TEMA 2: SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL

A

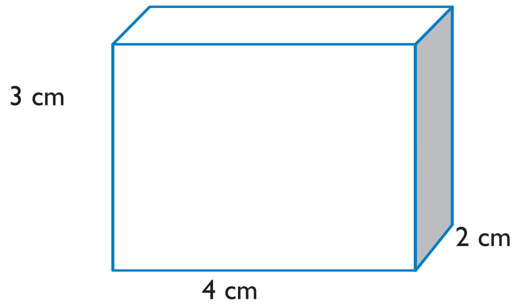
5. Prismas pintados

a) Suponé que deseas pintar toda la superficie exterior de un cubo de 1 cm de arista. Dicha superficie es la **superficie total** del cubo. Dibujá en tu carpeta la superficie que tendrías que pintar. ¿Cuánto mide en cm^2?

*El **área total** de un cuerpo es la suma de las áreas de todas sus caras. Si no se considera la superficie de la o las bases, se trata del **área lateral** del cuerpo.*

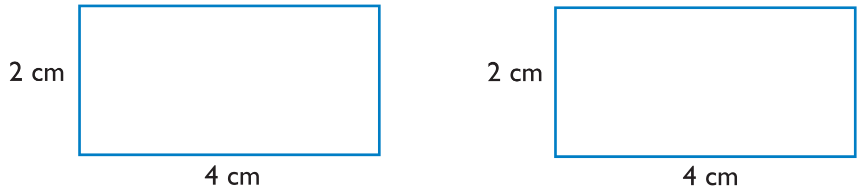
b) Seguí el siguiente razonamiento y hacé en tu carpeta las cuentas que necesites para verificar los resultados.

1. Con 24 cubitos de 1 cm de arista se puede construir, por ejemplo, un prisma de 3 cm de altura, cuya base sea un rectángulo de 4 cm de largo y 2 cm de ancho. Recordá que la base del prisma es la cara en la que está apoyado.

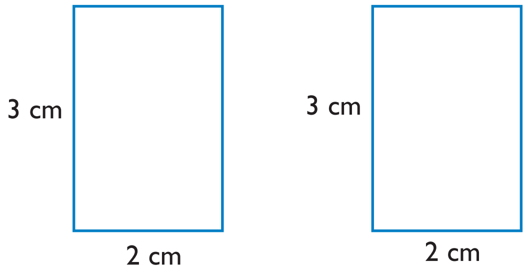


2. Ya sabés que su volumen es 24 cm^3, pero ¿cómo calcular su superficie total? Se puede imaginar al prisma como una caja de cartón e ir desarmándola para mostrar sus caras. Considerá las seis caras y hacé los cálculos necesarios para averiguar su área.

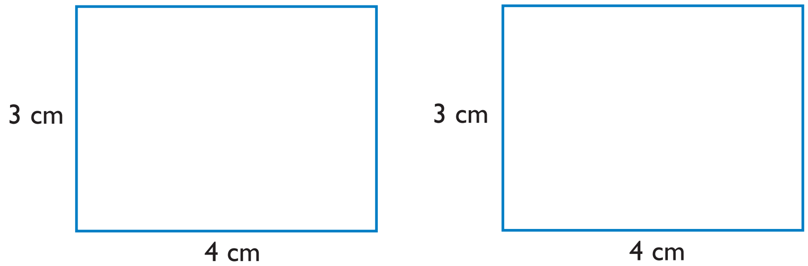
- Primero la base y la cara superior.



- Después, dos caras laterales de 2 cm · 3 cm.

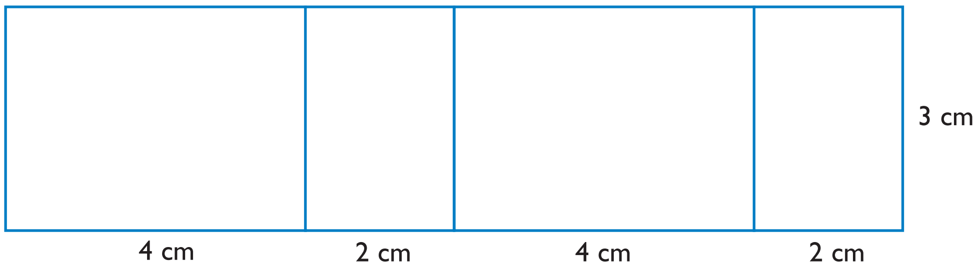


- Por último, dos caras laterales de 4 cm · 3 cm.



- Si sumaste bien las áreas de todas las caras habrás obtenido el **área total**, que es de 52 cm^2.

Las caras laterales se pueden pensar una a continuación de otra formando un solo rectángulo, como se ve en la siguiente figura.



Es decir que la superficie lateral de un prisma recto rectangular se puede calcular como el área de un solo rectángulo de base igual al perímetro de la base del prisma y altura igual a la del prisma. La superficie de este rectángulo es la **superficie lateral** del prisma. En este caso, el área lateral es de **36 cm²**.

c) Mediante el procedimiento desarrollado en **b**, u otro que resulte equivalente, hallá la superficie total y lateral de otro prisma diferente del anterior que también se pueda construir con 24 cubitos. Dibujá en la carpeta todas las figuras que necesites y escribí las cuentas correspondientes.

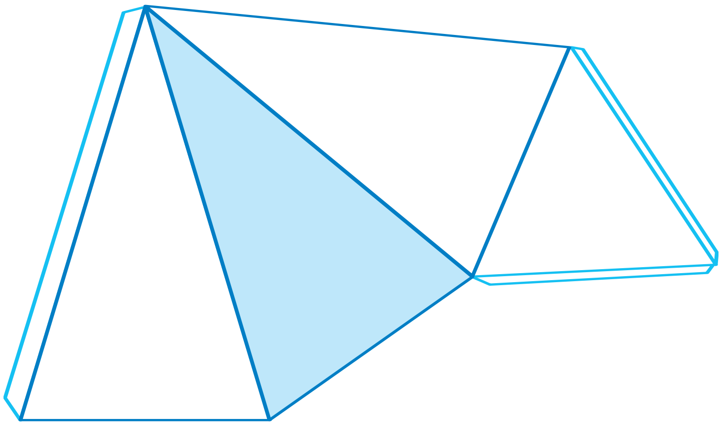
d) Comentá lo que hiciste con tus compañeros y con tu docente, y piensen entre todos una fórmula que permita obtener el área lateral de un prisma recto de base rectangular.

e) Hacé lo mismo para el área total. Escribí y recuadrá las fórmulas en tu carpeta.

f) Explicá por qué el área total de un cubo de 6 cm de arista es 216 cm^2 y calculá su área lateral.

A 6. El área de una pirámide

a) ¿Cómo procederías para obtener el área lateral de una pirámide recta de base triangular? ¿Y el área total? Te conviene trabajar con una pirámide construida en cartulina. Podés copiar el desarrollo siguiente.



Recordá que la altura de una cara de la pirámide es su ***apotema****.*

b) Generalizá el procedimiento que usaste y escribí una fórmula que permita calcular el área total de una pirámide recta cuya base sea un polígono regular de **n** lados.

c) Compará tu trabajo con el de tus compañeros y muéstrenle al docente sus conclusiones.

Ahora que ya tenés presente el cálculo de las áreas, vas a avanzar en el cálculo del volumen de prismas y pirámides.

Para realizar la actividad ***7*** *necesitás 24 cubitos unidad de 1 cm de arista de madera, cartulina o plastilina, según lo que hayan acordado utilizar con tu docente.*

TEMA 3: CÁLCULO DEL VOLUMEN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

A

7. Volumen de un prisma

a) Construí distintos prismas rectos de base rectangular con 24 cubitos unidad. Cualquiera de esos prismas ocupa un espacio equivalente a 24 cm^3, porque en su construcción se usan todos los cubitos. Pero, ¿cómo se puede obtener ese volumen a partir de conocer las dimensiones lineales de esos prismas?

b) La siguiente tabla muestra las dimensiones (en cm) de seis prismas distintos: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, que fueron construidos con 24 cm^3. Al nombrar las aristas se menciona el ancho, el largo y el alto. Copiá la tabla en tu carpeta y completala.

Prisma	Largo cm (l)	Ancho cm (a)	Alto cm (h)	Base		Área lateral cm^2	Área total cm^2	Volumen cm^3
				Perímetro cm	Área cm^2			
A	24	1	1	50	24	50	98	24
B	12	2	1					
C	6	2	2					
D	6	4	1					
E	3	8	1					
F	3	4	2					

c) A partir de la observación de la tabla, respondé las siguientes preguntas con tus palabras y escribí las operaciones correspondientes en símbolos.

1. ¿Qué operación hay que realizar entre el ancho y el largo del prisma para obtener el área de la base?

2. ¿Cómo se obtiene el perímetro de la base del prisma conociendo el largo y el ancho?

3. ¿Qué operaciones hay que efectuar para obtener el área lateral? ¿Y para obtener el área total?

4. ¿Qué operación hay que realizar entre el área de la base y la altura para obtener el volumen del prisma?

5. ¿Qué operación hay que efectuar entre el largo, el ancho y el alto para obtener el volumen del prisma?

6. La fórmula ***volumen del prisma = a · l · h***, en la que ***a*** es la longitud del ancho del prisma, ***l*** es la longitud del largo, profundidad o fondo del prisma, y ***h*** es la longitud de la altura, ¿es equivalente a la fórmula ***volumen del prisma = área de la base · altura***? ¿Por qué? Explicalo en la carpeta.

d) Ahora que conocés las fórmulas para el cálculo del volumen de un prisma, respondé las preguntas.

1. ¿Qué ancho, qué largo y qué alto puede tener un prisma de 36 cm^3 de volumen?

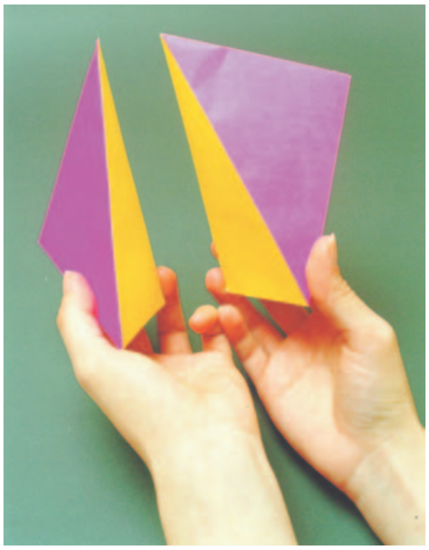
2. ¿Y otro de 64 cm^3?

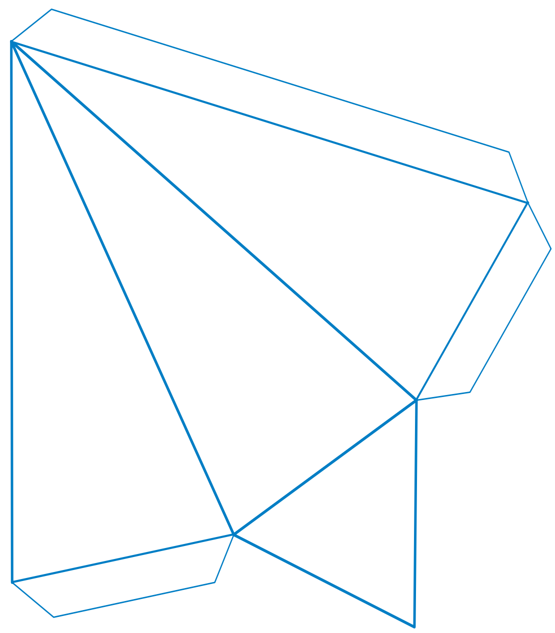
3. En cada caso, ¿la respuesta es única? Compará la tuya con la de tus compañeros.

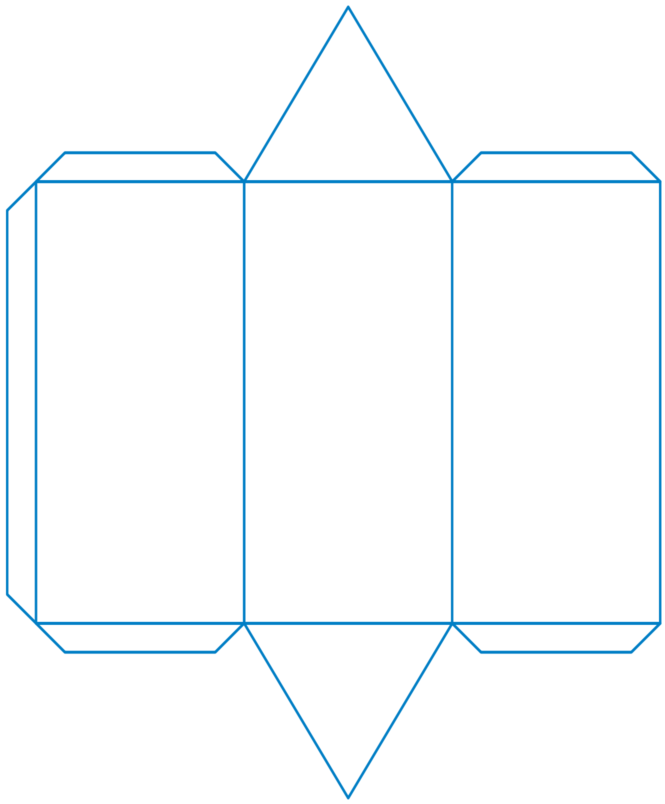
A 8. Volumen de una pirámide

Para resolver esta actividad realizarás una experiencia con dos cuerpos armados con cartulina: un prisma recto de base triangular y una pirámide recta de la misma base y la misma altura.

a) Construí los dos cuerpos en cartulina siguiendo los esquemas que representan el desarrollo de ambos. Usá los dibujos de la página siguiente como modelo; para ampliarlos, les podés aplicar una homotecia de razón 2. Después, recortalos y uní sus aristas pegando las aletas. Tené la precaución de dejarlos “destapados”, es decir, de no pegar la base.







b) Llená la pirámide con arena seca o harina de maíz y volcá su contenido dentro del prisma.

1. Repetí esa acción las veces necesarias hasta que el prisma quede lleno.

2. Respondé estas preguntas en tu carpeta.

- De acuerdo con lo realizado, ¿qué relación existe entre los volúmenes del prisma y de la pirámide? ¿Por qué es así?

3. Compará tus respuestas con las de tus compañeros y consultá con tu docente para escribir la fórmula que permita hallar el volumen de una pirámide recta de base rectangular. Después, copiala en la carpeta.

Volumen de una pirámide recta de base rectangular = ...

La siguiente actividad te permitirá revisar y aplicar lo que aprendiste sobre la relación entre áreas y volúmenes de prismas y pirámides. Volvé a mirar lo que resolviste en las actividades anteriores y repasá las fórmulas que hallaste. Te conviene escribirlas todas en una tabla - resumen que te ayudará a recordarlas cada vez que las necesites.

A 9. Áreas y volúmenes

a) Copiá en tu carpeta el siguiente cuadro y completalo. En cada caso, se trata de prismas o pirámides de base rectangular nombrados en la primera columna cuyas dimensiones y volumen se dan en las restantes.

	Ancho (cm)	Profundidad (cm)	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
Prisma		6	5	90
Pirámide	3,5	6	2	
Prisma	6		24	
Pirámide		2	5	4

b) Resolvé las siguientes situaciones.

1. Se desea envasar 1000 cm^3 de dulce de batata en una caja de madera. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la caja? Elegí, entre las posibles respuestas, las que resulten adecuadas para que la caja pueda guardarse en una alacena.

2. Imaginate que tenés 8 cubos de madera de 1 cm de arista. Podés pintar algunas caras de color rojo y otras, de azul. Explicá cómo se podrían pintar de manera que los 8 cubos puedan reunirse para formar otro cubo de 2 cm de arista, todo de color rojo o todo de color azul.

3. Si tuvieras 27 cubos de 1 cm de arista, ¿podrías colorearlos de manera que puedan formar otro cubo de 3 cm de arista que se viera todo rojo o todo azul o todo amarillo?

Para finalizar

Habrás observado que, si bien la unidad convencional para medir volúmenes es 1 m^3, su gran tamaño hace que en la vida cotidiana su uso no resulte cómodo. Es más frecuente el uso diario de submúltiplos del metro cúbico: el decímetro cúbico (1 dm^3) para recipientes que contienen uno o más litros, y el centímetro cúbico (1 cm^3) para la medición del volumen de objetos más pequeños.

Las experiencias en medición de áreas y volúmenes y el registro en tablas seguramente te ayudaron a comprender las relaciones entre los atributos de los cuerpos en estudio y el uso de las unidades apropiadas para medirlos. En tal sentido, estudiaste que, si se conoce el volumen de un cubo, se puede determinar el área de su superficie, por ejemplo, si el volumen de un cubo es 64 unidades cúbicas, entonces el área de su superficie es de 96 unidades cuadradas. Pero esa relación no es cierta en prismas rectangulares o, en general, para otros cuerpos porque hay muchos cuerpos diferentes que tienen el mismo volumen.

Las tablas te permitieron observar la gran variabilidad que existe en la superficie lateral y total de prismas que tienen el mismo volumen. La construcción de diferentes prismas rectangulares usando cubos apilables ayuda a visualizar que los prismas más parecidos a un cubo (sus dimensiones son bastante similares) tienen menor superficie que los muy alargados.

En esta unidad pudiste establecer muchas fórmulas que volverás a analizar con mayor profundidad en las unidades siguientes que tratan temas de Álgebra y funciones.

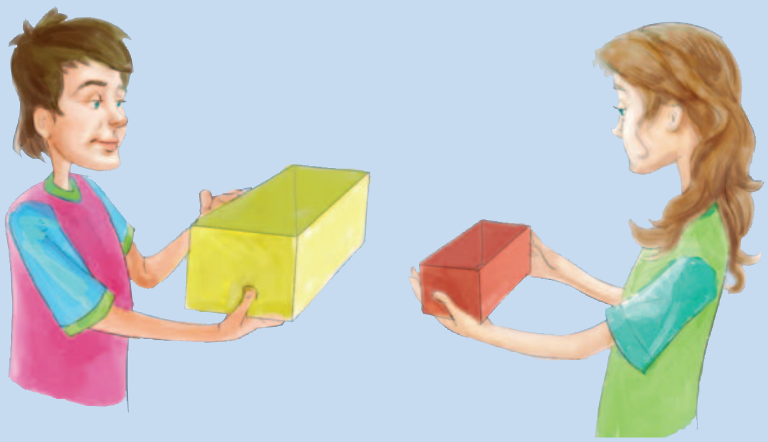
En los desafíos que siguen, vas a encontrar situaciones relacionadas con el tema de esta unidad y un interesante juego con números.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El prisma de Lucas

Mariana construyó un prisma rectangular. Lucas construyó otro, duplicando sólo las medidas de sus aristas en el ancho y el largo. ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de ambos prismas? ¿Por qué?

Pablo quiso llenar con arena el prisma de Lucas y para hacerlo usó el prisma de Mariana cargado exactamente hasta la mitad. ¿Cuántas veces tuvo que volcarlo en el prisma de Lucas para llenarlo? ¿Por qué?



2. Un juego con números

Es un juego sencillísimo para multitudes de tres a un millón de personas. Las reglas son las siguientes.

- Cada uno elige, en secreto, un número entero positivo y lo escribe en un papel. Todos los números se revelan al mismo tiempo. Gana quien haya elegido el número más bajo que no esté repetido.
- Por ejemplo, si los números elegidos fueran 1, 1, 3, 5, 8, gana quien eligió el 3. El 1 es menor que 3, pero está repetido. El 5 no está repetido, pero es mayor que 3.
- El juego es muy desconcertante. Al probarlo conviene hacer varias rondas seguidas para detectar tendencias y evaluar estrategias.

3. Una variante del juego anterior

No se conoce con exactitud el origen de este juego. Tampoco se sabe si tiene un nombre estandarizado. Sborochan remite a Andrés Sborovsky y Rodolfo Kurchan, quienes lo propusieron en la lista Snark* hace muchos años. Allí se practicó con fruición y surgieron muchas variantes. Una de ellas es ligeramente paradójica. Fue bautizada "San Segundo" y sólo tiene un pequeño cambio en las reglas: gana el segundo número más bajo que no esté repetido. ¿Qué número conviene elegir? Evidentemente no el 1: jamás podría ser el segundo número más bajo. Queda descartado. ¿Y el 2? Bueno, si nadie elegirá el 1, el 2 no podrá ser nunca el segundo número más bajo. También queda descartado. Si nadie elige ni el 1 ni el 2, tampoco es razonable elegir el 3; de la misma manera se descartan el 4, el 5, el 6 y todos. Conclusión: no conviene elegir ningún número. Y sin embargo, al jugar, habrá alguno que gane.

Una variante más permite elegir más de un número. Otra, propuesta por Salva, sirve para torneos: el ganador de cada ronda obtiene tantos puntos como el número que eligió. De esta manera se da la tensión entre elegir números bajos (pues el más bajo no repetido sigue ganando) y números altos (para sumar más puntos).

4. Los cuatro cuatros

En la siguiente serie de cálculos hay un error en el orden de los resultados. El desafío es encontrar el error.

a) $\dfrac{44 - 4}{4}$

b) $4 + 4 + \dfrac{4}{4}$

c) $4 + 4 + 4 - 4$

d) $\dfrac{44}{4} - 4$

e) $\dfrac{4 + 4}{4} + 4$

f) $\dfrac{4 - 4}{4}$

g) $\dfrac{4 \times 4 + 4}{4}$

h) $\dfrac{4 + 4 + 4}{4}$

i) $\dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4}$

j) $\dfrac{44}{44}$

* Snark es una lista de juegos de ingenio.

UNIDAD 12 Relaciones métricas

La naturaleza, el arte y las ciencias proporcionan oportunidades para la observación y la exploración de conceptos y patrones geométricos. Desde que iniciaste el *Cuaderno de estudio 1* y en lo que va del *Cuaderno de estudio 2* estudiaste algunas relaciones métricas características de las figuras y los cuerpos a partir de la medición de sus elementos: lados, diagonales, contornos rectos o curvos, ángulos, áreas, volúmenes, desplazamientos y distancias entre unos y otros. El estudio de esas relaciones métricas es parte de la geometría métrica, llamada así por su vinculación con los procesos de medida.

La medida de estas relaciones se expresa mediante un número constante. Por ejemplo, la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro está expresada por el número π (pi).

En esta unidad vas a trabajar con otras relaciones métricas, por ejemplo, las que expresan la suma de los ángulos de un polígono. Conocerás, además, una relación métrica definida entre las dimensiones, el largo y el ancho de los rectángulos de una familia de características peculiares. Esta relación es conocida desde la Antigüedad a tal punto que el número que corresponde a su valor se simboliza con una letra griega ϕ (se lee fi). Tanto ϕ como π pertenecen a una clase de números –los irracionales– cuyas características estudiarás.

En esta unidad vas a encontrar una serie de actividades referidas a las relaciones métricas entre distintas figuras geométricas. En cada actividad se desarrolla una relación métrica diferente que se obtiene siguiendo ciertos razonamientos con los que vas a tener que analizar elementos de figuras, compararlos, hacer cálculos y hallar e interpretar fórmulas que expresan esos cálculos en símbolos. Por eso, al finalizar cada una de las actividades, te conviene hacer una breve síntesis de la relación tratada y escribir las fórmulas y los conceptos que la definen. Organizá esas síntesis en una hoja aparte, para que puedas tenerlas cada vez que las necesites.

TEMA 1: RELACIONES MÉTRICAS EN POLÍGONOS

A 1. Ángulos interiores de un polígono

a) Dibujá en tu carpeta cinco polígonos no regulares de 4, 5, 6, 7 y 8 lados, respectivamente. En cada uno elegí un vértice y trazá desde él todas las diagonales posibles. Escribí al pie de cada figura cuántos triángulos se formaron.

b) Todos los polígonos se pueden descomponer en una suma de triángulos y, como ya conocés cuánto vale la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, copiá la tabla que sigue y completala con la suma de los ángulos interiores de un polígono según el número de sus lados.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos	Valor de la suma de los ángulos interiores
Triángulo	3	1	2 ángulos rectos
Cuadrilátero	4	2	4 ángulos rectos
Pentágono	5	3	
Hexágono	6		
Eptágono	7		
Octógono	9		

1. Como pudiste observar, la suma de los ángulos interiores de un polígono depende del número de triángulos en que se lo pueda descomponer, que a su vez depende del número de lados del polígono. Para calcularla, conviene pensar el problema respondiendo a las siguientes preguntas.

• ¿Cuántos lados tiene el polígono?

• ¿En cuántos triángulos se puede descomponer?

• La suma de los ángulos interiores de un polígono ¿a cuántas veces el valor de dos ángulos rectos equivale?

2. Respondelas en tu carpeta.

Suma de los ángulos interiores de un polígono
Se puede generalizar esta regla a los polígonos de cualquier número de lados. La suma de los ángulos interiores de un polígono de **n** *lados* = (**n** – 2) · 180°, *donde la letra* **n** *representa la cantidad de lados del polígono.*

c) Calculá la amplitud de cada ángulo interior de un pentágono regular y de un decágono regular. Un ángulo interior del decágono ¿es el doble del ángulo interior del pentágono? ¿Por qué?

A 2. Ángulos exteriores de un triángulo

*En la unidad **6** del Cuaderno de estudio 1 se te propuso recortar y unir los ángulos de un triángulo para encontrar el valor de la suma de sus ángulos interiores. Si no lo recordás podés volver a comprobarlo, y verás que en cualquier triángulo esa suma es igual a 180°. Ahora vas a descubrir otras propiedades usando otros recursos matemáticos que ya conocés.*

a) Dibujá un triángulo cualquiera y prolongá los lados para que queden dibujados los ángulos exteriores. Poné las letras α (alfa), β (beta) y γ (gamma) a los ángulos interiores.

b) Observá que a cada ángulo interior de un triángulo le corresponden dos ángulos exteriores según se consideren las semirrectas opuestas a uno u otro lado del ángulo interior. Ponele la letra δ (delta) a uno de los ángulos exteriores a α.

c) Copiá en tu carpeta las siguientes expresiones completando los espacios en blanco.

- Por ser ángulos suplementarios, la suma de un ángulo interior y su adyacente es igual a...
  $\alpha + \delta = ...$ o sea $\alpha = 180° - ...$ (1)
- Además, como en todo triángulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y por eso $\alpha = 180° - (... + ...)$ (2)

d) Compará las expresiones anteriores y escribí el valor de δ.

El razonamiento que hiciste es válido para cualquier triángulo; por lo tanto, puede generalizarse enunciando:

En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

e) Resolvé los siguientes problemas usando la propiedad que acabás de comprobar.

1. Un ángulo exterior de un triángulo isósceles mide 120°; ¿cuánto miden sus ángulos interiores? ¿Cómo son sus lados?

2. En un triángulo isósceles, el ángulo opuesto a la base mide 48°. Calculá la amplitud de cada uno de los ángulos exteriores.

3. En un triángulo isósceles oblicuángulo, un ángulo mide 100°. Calculá la amplitud del ángulo formado por la bisectriz de un ángulo agudo y la bisectriz del correspondiente ángulo exterior.

4. Repetí la experiencia con el ángulo formado por la bisectriz del ángulo de 100° y la bisectriz correspondiente al ángulo exterior adyacente. ¿Te parece que ocurrirá lo mismo en cualquier clase de triángulo? Explicá tu respuesta.

A

3. Perímetro y área de cuadrados

a) Releé la consigna **c** de la actividad **1** de la unidad **3**, en la que trabajaste con el perímetro y el área de cuadrados y respondé al siguiente planteo.

El lado de un cuadrado mide 4 cm; calculá su perímetro y su área.

1. ¿Se puede decir que "los resultados son iguales"?

2. Explicá con tus palabras en qué se parecen y cuál es la diferencia. Si es necesario, ayudate con un dibujo.

b) Copiá una tabla de cuadrados como la que sigue, en la que ***n*** representa la medida del lado. Usá una calculadora para completarla y luego, observando los resultados, respondé a las preguntas que están al pie.

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	11	121	21	441	31	961
2	4	12		22		32	
3	9	13		23		33	
4	16	14		24		34	
5	25	15		25		35	
6		16		26		36	
7		17		27		37	
8		18		28		38	
9		19		29		39	
10		20		30		40	

1. Si se duplica el lado de un cuadrado, ¿se duplica también su perímetro?, ¿se duplica su área?

2. Usá papel cuadriculado y dibujá un cuadrado de 5 unidades de lado; ¿cuál es su área? Repetí la experiencia con un cuadrado de 6 unidades de lado; ¿cuál es su área? ¿Cuál es el área de un cuadrado de 5,5 unidades de lado?

3. ¿Entre qué números enteros está comprendida el área de un cuadrado de 8,25 cm de lado?

c) Resolvé la situación que se presenta a continuación.

El docente les pidió a sus alumnos que calculen el lado de un cuadrado cuya área es de 2 cm^2. Manuela se dio cuenta de que debía ser un número mayor que 1 y menor que 2. Probó con 1,5, lo multiplicó por sí mismo y obtuvo 2,25. Probó con 1,4 y obtuvo 1,96. Entonces se preguntó cómo encontrar un número que fuera a la vez mayor que 1,4 y menor que 1,5 y que al elevarlo al cuadrado diera 2.

1. Usá la calculadora para resolver el problema de Manuela, es decir encontrar un valor aproximado para $\sqrt{5}$: 1,4 < $\sqrt{5}$ < 1,5.

2. Usá el mismo procedimiento para encontrar una expresión aproximada de la raíz cuadrada de 3 con dos cifras después de la coma decimal.

La raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto no es un número racional (no se lo puede expresar con un decimal exacto ni periódico) y por eso recibe el nombre de **número irracional**.
Son ejemplos de números irracionales: $\sqrt{2}$, el número π. En cambio, $\sqrt{4}$; 2; $\sqrt{9}$; 3; 4; 0,5; –1,2; $\frac{1}{3}$; $0,\widehat{6}$ son números racionales.

d) Escribí otros dos ejemplos de números racionales que provengan del cálculo de raíces cuadradas y dos ejemplos que también provengan de raíces cuadradas y sean números irracionales. Compará tus ejemplos con los de otros compañeros y conversá sobre este tema con tu docente.

e) Respondé a cada una de las siguientes consignas. Copiá las dos tablas en tu carpeta.

1. En la fila superior de esta tabla está el perímetro, medido en centímetros, de diferentes cuadrados. Completala con las respectivas áreas.

Perímetro (cm)	22	40	30	32,4	82	108
Área (cm^2)		100				

• Los números de la tabla ¿son racionales o no? ¿Por qué?

2. En la fila superior está el área, en centímetros cuadrados, de diferentes cuadrados. Completala con la medida de los respectivos lados.

Área (cm^2)	16	100	49	36	81	4
Lado (cm)		10				

• Los números de la tabla ¿son racionales o no? ¿Por qué?

3. Conversá con tus compañeros y con tu docente sobre este trabajo.

TEMA 2: LA RELACIÓN ÁUREA

Tanto en la naturaleza como en el arte se ponen de manifiesto principios proporcionales muy interesantes. Uno de ellos es la relación métrica que se establece entre los lados de los rectángulos que se consideran con mejores proporciones. A esta relación se la conoce como número de oro, divina proporción, relación áurea o regla dorada. Si bien se la usó en la práctica desde la Antigüedad, sigue vigente hasta hoy entre arquitectos, diseñadores y artesanos.

A

4. Una relación métrica especial

En esta actividad trabajarás sobre una relación métrica identificada con otro número irracional: el **número de oro**.

a) Para empezar a ver de qué se trata esta relación, realizá la siguiente experiencia.

1. Dibujá en un papel un rectángulo de las dimensiones que prefieras, ni muy angosto ni exageradamente ancho. Si podés trabajar con otros compañeros, comparen los rectángulos que dibujaron. Si no tenés compañeros de tu año, pedile al tu docente y a otros chicos de la escuela que cada uno dibuje con regla un rectángulo que no sea ni muy angosto ni muy ancho.

2. Comparen todos los rectángulos dibujados; ¿les parecen que son rectángulos semejantes? Recórtenlos y péguenlos en un afiche para colgar en el aula. Midan lo necesario en cada rectángulo para averiguar la razón entre el lado mayor y el menor, y escríbanla en el afiche debajo de cada uno.

Te parecerá curioso observar que los rectángulos que a la mayoría de las personas nos parecen de "buena forma" son muy semejantes, vale decir que la razón entre el ancho y el largo es prácticamente la misma en todos. Casi siempre el lado menor es el 62% del lado mayor.

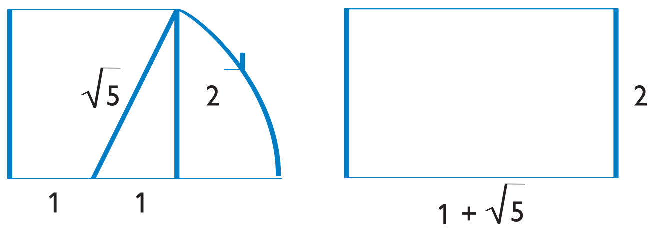
Te sorprenderá, también, saber que la mayoría de los documentos de identidad –DNI (Documento Nacional de Identidad), Cédula de Identidad, Registro de Conductor, Tarjetas de crédito o de débito emitidas por los bancos– tienen aproximadamente la misma forma y que, además, estas formas se encuentran en el formato de muchos libros.

Esta relación métrica entre los lados de los rectángulos de "buena forma" es conocida desde la Antigüedad y se la puede encontrar en la construcción de los templos griegos, como verás más adelante en esta unidad.

Conocedor de esta relación, un monje italiano, Fray Paciolo di Borgo, enunció en 1509 una fórmula matemática para obtener el número constante, razón característica de esta relación a la que Leonardo Da Vinci denominó Divina Proporción. El valor de esa razón constante es un número irracional denominado **número de oro** al que se simboliza con la letra griega ϕ (se lee fi) en homenaje al arquitecto Fidias que la puso en práctica en el diseño del Partenón (siglo V a.C.). Algo similar ocurrió con la relación métrica que ya estudiaste entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. También era conocida desde la Antigüedad, pero recién en 1796 un matemático inglés, William Jones, denominó a ese número irracional con la letra griega π (pi) por ser la inicial de "perisferia".

En el punto siguiente vas a aprender cómo se calcula el número de oro ϕ.

b) Copiá en tu carpeta las siguientes figuras. Fijate que para dibujar el rectángulo tenés que hacer centro con el compás en el punto medio del lado del cuadrado y trazar el arco indicado con la flecha.



1. Observá tus dibujos y respondé las preguntas.

• ¿Qué relación permite afirmar que la hipotenusa del triángulo de los catetos 1 y 2 mide $\sqrt{5}$? Escribila.

• Escribí el cociente entre las medidas del lado mayor y el menor del rectángulo, llamalo ϕ ya que este cociente es el número de oro.

• Calculá el valor de ϕ con tres cifras decimales. Tené en cuenta que $\sqrt{5} \cong 2{,}236\ldots$ (el signo $\cong$ significa aproximadamente).

*Se denominan **rectángulos áureos** aquellos cuyos lados están en relación aproximada a 1,618, conocido como **número de oro** y simbolizado con la letra griega ϕ (se lee fi).*

c) En la unidad **9** aprendiste que para que dos figuras sean semejantes deben tener ángulos congruentes y lados proporcionales. ¿Todos los rectángulos áureos son semejantes entre sí? ¿Por qué?

d) Calculá el valor de $\frac{1}{\phi}$ con tres cifras decimales; escribilo.

e) Restá $\frac{1}{\phi}$ del valor de ϕ; ¿cuál es la diferencia?

Te sorprenderá saber que el número de oro es el único número cuyo inverso es él mismo disminuido en 1: $\phi - \frac{1}{\phi} = 1$.

En efecto, $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{1{,}618} = 0{,}618$, es decir que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

A la vez $\frac{1}{1{,}618} = 1{,}618 = \phi$.

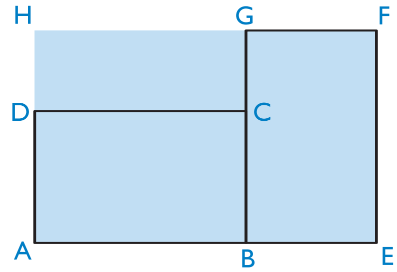
f) Comprobá estas relaciones usando la calculadora.

A 5. La división áurea de un segmento

En esta actividad verás una importante aplicación de la relación áurea que permite dividir un segmento en otros dos que guardan con él una curiosa relación de proporcionalidad.

a) Una propiedad interesante de los rectángulos áureos es que si se colocan dos rectángulos iguales, como en la figura que se muestra a continuación, se forma otro rectángulo más grande. Para ver si este nuevo rectángulo es o no áureo, seguí los siguientes pasos.

1. Copiá en tu carpeta esta figura. Los rectángulos ABCD y BEFG son áureos porque fueron dibujados en escala tomando como unidad el segmento AD.



2. Completá una tabla como esta con las medidas del lado mayor y el menor de cada uno de los rectángulos.

Rectángulo	Lado mayor Unidad AD	Lado menor Unidad AD	Razón lado mayor/lado menor
ABCD	1,618	1	1,618
BEFG			
AEFH			

3. Observá tu figura. El rectángulo *ABGH* ¿es un cuadrado? ¿Por qué?

4. Si agregás a la derecha de tu figura un rectángulo *EIJK* de las mismas dimensiones que *AEFH*, ¿qué relación tiene el rectángulo *AIJL* con los demás rectángulos dibujados? ¿Por qué? El rectángulo *AEKL* ¿es un cuadrado? ¿Por qué?

5. A partir de tus dibujos anteriores habrás podido observar que a cualquier rectángulo áureo se le puede añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado también es un rectángulo áureo. ¿Creés que si a un rectángulo áureo se le quita un cuadrado de lado igual al del lado menor del rectángulo la figura que resta es un rectángulo áureo? ¿Por qué?

Los dibujos que hiciste te ayudarán a descubrir otra relación métrica vinculada con el número de oro.

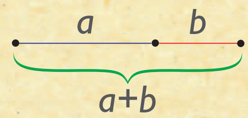
6. Observá nuevamente tu dibujo inicial y tené en cuenta que en él *AD* = *BC* = *BE*. Además, el segmento *AE* es la suma de *AB* y *BE*. El punto *B* divide el segmento *AE* en dos partes tales que sus respectivas medidas son 1,618 y 1; ¿cuál es la medida de *AE*? Calculá la razón entre las medidas de *AE* y *AB*, y la razón entre las medidas de *AB* y *BE*. Compará ambas razones; ¿qué resultado obtuviste?

Dado que todos los rectángulos áureos guardan la misma proporción entre sus lados se puede enunciar que:

En todos los rectángulos áureos la razón entre la suma de los dos lados y el lado mayor es la misma razón que existe entre sus lados.

En este caso: $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE}$ se ve que *AB* es el divisor en la primera razón y el dividendo de la segunda, por eso se dice que *AB* es medio proporcional entre la suma *AE* y el lado menor *BE*.

Dicho de otro modo, cuando la parte mayor *AB* de un segmento *AE* es medio proporcional entre el segmento total *AE* y la parte menor *BE* se dice que el punto *B* divide el segmento *AE* en **media y extrema razón**.

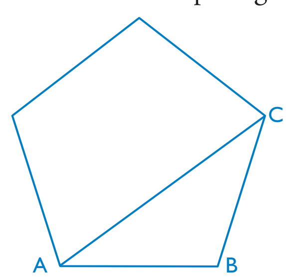


Para generalizar, si se llama $a+b$ al segmento total y constituye el segmento *x*, *a* es la parte mayor y *b* es la menor, se puede enunciar que si se verifica la siguiente proporción: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, entonces la parte mayor *a* recibe el nombre de **segmento áureo de** *x*.

A 6. El pentágono pitagórico y el Partenón

En esta actividad verás otra aplicación del número de oro en la construcción del pentágono regular.

Los griegos pitagóricos encontraron el número de oro al hallar la relación entre la diagonal de un pentágono y el lado.

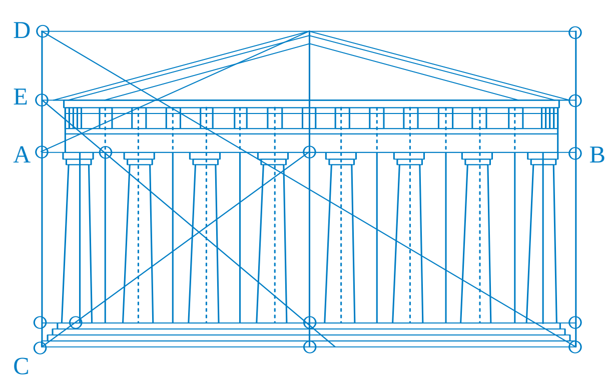


$\frac{AC}{AB} = 1{,}618$

Cuando llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros les pareció algo tan contrario a su lógica que lo llamaron número irracional. Este es el primer número irracional del que históricamente se tuvo conciencia.

Con posterioridad, los griegos consideraron que el rectángulo cuyos lados *a* y *b* estaban en la relación $\frac{a}{b} = \phi$ era especialmente armonioso y lo llamaron rectángulo de oro pues para ellos la armonía era considerada como una virtud.

- Un ejemplo de la aplicación práctica de la relación áurea se encuentra en el diseño del Partenón griego.



a) En la figura del Partenon podés comprobar midiendo con cuidado que $\frac{AB}{CD} = \phi$. Investigá la razón entre *CD* y *AC* y comparala con la razón entre *AC* y *AD*. El segmento *AC* ¿es el segmento áureo de *CD*? ¿Por qué?

b) Otra aplicación de esta relación descubierta por los pitagóricos es la que posibilita la construcción de un pentágono regular usando regla y compás. Construí un pentágono de 3 cm de lado aplicando la relación áurea. Explicá paso a paso cómo lo construís.

Para concluir la unidad leé unos versos que el poeta Rafael Alberti (1902-1999) dedicó a este tema.

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Para finalizar

En Geometría existe un gran número de relaciones métricas que fueron descubiertas y formuladas por los matemáticos a lo largo de la historia. Algunas han sido superadas a través de los tiempos y hoy solo conservan un valor histórico para los especialistas. Otras –como la relación pitagórica, el número π o el número ϕ– siguen vigentes porque son de imprescindible aplicación práctica y contribuyen al avance de la ciencia, la tecnología y el arte.

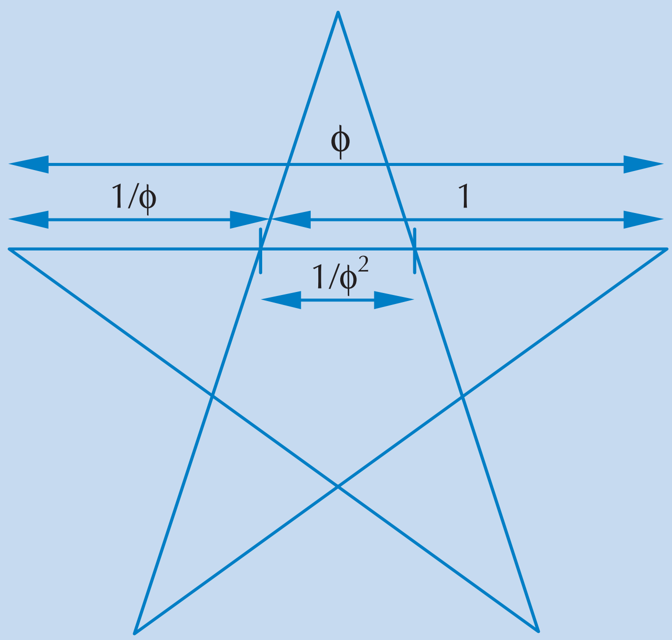
Revisá la hoja con las síntesis parciales que fuiste haciendo para ver si están claras y si no te olvidaste de algo importante. Por ejemplo, la revisión acerca de la naturaleza de los números irracionales que no se pueden expresar como cociente entre dos enteros. En las unidades siguientes, que se refieren a Álgebra y funciones, retomarás el estudio de muchas de las relaciones que analizaste en estas actividades.

A continuación, en los desafíos vas a encontrar problemas sobre el tema de la unidad, pero también algunos que te van a permitir revisar lo que sabés sobre proporcionalidad y volumen.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

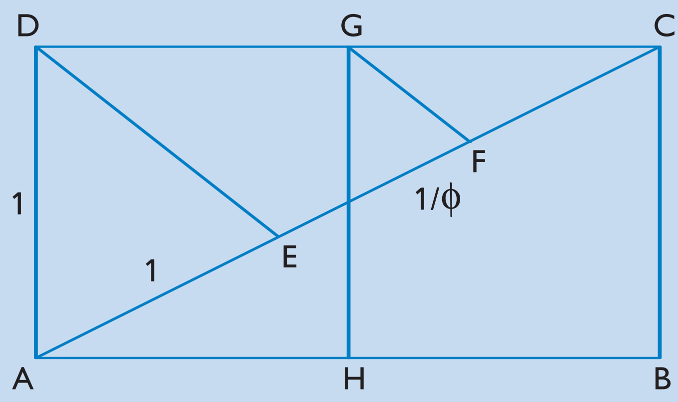
1. Estrella pitagórica

Los pitagóricos adoptaron como símbolo para reconocerse entre ellos el pentágono regular estrellado como el del dibujo. Su propiedad característica es que todos los segmentos están en relación áurea. Obervá los datos de la figura y calculá la longitud de la diagonal del pentágono convexo que quedó formado en el centro.



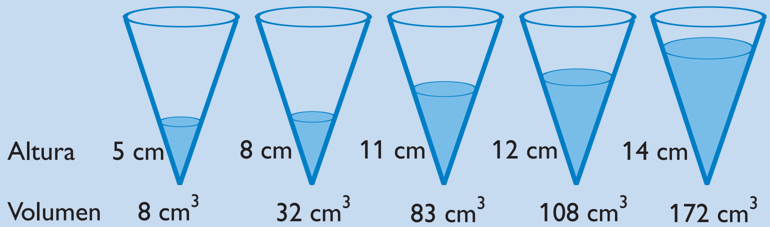
2. El número *m*

En la figura aparece una construcción geométrica con regla y compás del número *m*, valor que los griegos obtuvieron del inverso del número de oro. El desafío consiste en justificar razonadamente que $EF = m$.



3. Los vasos cónicos

Se vierten diferentes cantidades de agua en un vaso cónico. En cada vertido se mide la altura del agua y su volumen.



Teniendo en cuenta los datos de la figura, ¿podés responder si el volumen es directamente proporcional a la altura?

4. Un problema de tablas

De las siguientes tablas, ¿cuáles pueden pertenecer a una proporcionalidad directa?

2	7	3
3	10,5	2

3	4	–7
6	-8	14

4	12	10
3	9	7,5

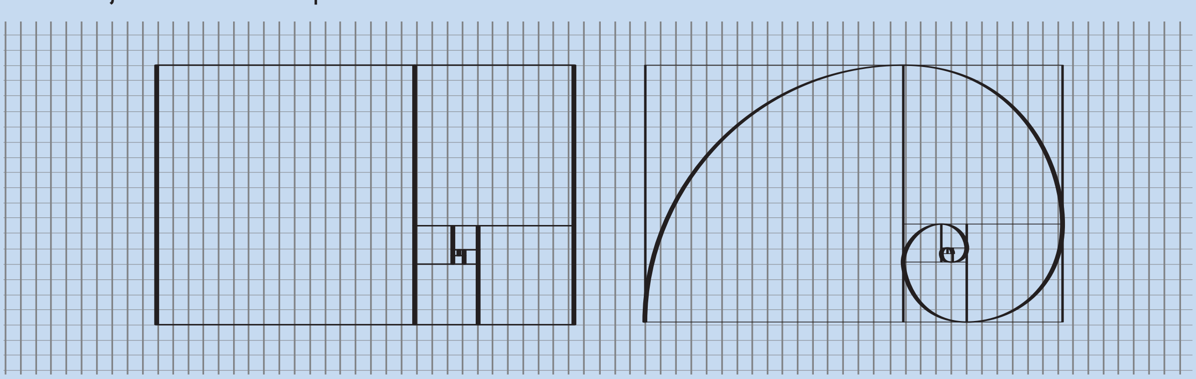
2	7	3
3	10,5	2

3	4	–7
6	–8	14

4	12	10
3	9	7,5

5. Construcción de la espiral

A cualquier rectángulo áureo se le puede restar por su lado menor o bien añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado sigue siendo un rectángulo áureo. Esta propiedad se ilustra frecuentemente con este dibujo similar a una espiral.



Para construirla usá una hoja de papel milimetrado. En el centro de la hoja dibujá un cuadrado de 1 cm de lado. Con el compás marcá un arco de un cuarto de circunferencia que tenga por radio el lado del cuadrado. Y seguí construyendo la espiral según el modelo hasta salirte de la hoja.

UNIDAD 13 Álgebra (I)

En unidades anteriores estudiaste fórmulas en las que se usan letras para simbolizar cantidades variables, como el perímetro de figuras o el largo y el ancho de rectángulos. Esas letras, a las que se denomina variables, tienen un papel muy importante en Matemática, porque facilitan la descripción de relaciones que se verifican en un tipo general de casos y, una vez obtenidas, pueden ser aplicadas a muy diferentes situaciones particulares. Es el caso, por ejemplo, de la fórmula para calcular el área del triángulo $\frac{b \cdot h}{2}$ en la que *b* y *h* pueden reemplazarse por las medidas de la base y la altura de cualquier triángulo del que se necesite medir la superficie. El Álgebra es la parte de la Matemática que se ocupa de estas expresiones simbólicas en las que intervienen letras con las que se puede operar como si fueran números. Estas expresiones se usan tanto en igualdades, llamadas ecuaciones, como en desigualdades llamadas inecuaciones, que estudiarás en esta unidad. También aprenderás a usar procedimientos del Álgebra como instrumento en la resolución de problemas.

TEMA 1: ECUACIONES E INECUACIONES

A 1. Las figuritas

a) Leé la siguiente situación y luego respondé en tu carpeta las preguntas que hay intercaladas en el relato.

Paula y Mariana coleccionan figuritas. Martín le preguntó a Paula cuántas figuritas tenía. La respuesta de Paula fue: “Con 6 más voy a tener cuatro veces lo que tiene Mariana”. Martín pensó un rato y razonó así: Si Paula tiene 2 figuritas, con 6 más son 8 y entonces Mariana tiene 2 figuritas. Pero si Mariana tuviera 5, Paula debería tener 14 figuritas.

1. ¿Es correcto el razonamiento de Martín?
2. Expresá con símbolos esa situación.
3. Comprobalo y escribí otro par de números que puedan dar solución al problema.

Martín resolvió hablar con Mariana, pero, para no olvidarse, y pensando que *p* es el número de figuritas de Paula y *m* el número de figuritas de Mariana, anotó: $p + 6 = 4 \cdot m$. Cuando se encontraron Mariana le dijo que tenía 10 figuritas. Miguel, que no sabía cuál era el problema, vio escrita la igualdad de Martín y pensó: “Si en lugar de *p* se pone 6, también hay que cambiar *m*, y para que la igualdad se cumpla, hay que poner 3”.

4. ¿Cuántas figuritas tiene, entonces, Paula?

5. Ensayá otra sustitución de p y averiguá cuál es la sustitución de m que corresponde para que la igualdad: $p + 6 = 4 \cdot m$ sea verdadera.

6. ¿Se puede poner cualquier número en lugar de p? Hacé una tabla y explorá distintos valores de p.

7. Los números que hacen verdadera la igualdad tienen una característica común; ¿cuál es?

En la siguiente actividad y en otras de esta unidad, vas a encontrar la explicación de un proceso en el cual se parte de una expresión y se recorre un camino en el que esa expresión se va transformando en algo equivalente. Aquí y cada vez que te enfrentes con este tipo de desarrollo, te conviene ir anotando los pasos sucesivos e ir haciendo los cálculos para entender qué sucede en cada paso y cómo se llega al resultado. Esto es muy importante cuando se trabaja con ecuaciones y también en las transformaciones geométricas o en distintos tipos de cálculos combinados.

A 2. Incógnitas y variables

En esta actividad se presentan los elementos que componen una ecuación; ellos te permitirán aproximarte al Álgebra.

a) Leé la siguiente información y tomá nota de todo lo que te parezca necesario para acordarte de qué es una incógnita y cómo se descubre.

¿Cómo se halla el valor de una incógnita?

La igualdad $p + 6 = 4 \cdot m$ que surgió en la actividad anterior es un ejemplo de una ecuación. Este nombre viene del verbo *æquare*, que en latín significa igualar.

La igualdad en la ecuación $p + 6 = 4 \cdot m$ no se cumple para cualquier número p y cualquier número m, sino sólo para algunos valores determinados (como pudiste observar en la actividad anterior). Lo mismo sucede en todas las ecuaciones: hay una incógnita, es decir una expresión cuyo valor numérico no se conoce y hay que descubrirlo. Cuando se lo encuentra, se reemplaza la incógnita por ese número y se resuelve la ecuación, como ya viste en el caso de las figuritas.

Generalmente se usa una letra x para representar al valor desconocido, pero también se pueden usar otras letras, como las letras p y m en el caso anterior. Para hallar el valor de una incógnita se hacen las operaciones inversas de las que permitieron llegar al resultado.

Cuando en una ecuación hay varias operaciones, para hallar la incógnita hay que aplicar las operaciones inversas respetando el “orden inverso”, como si recorriéramos el mismo camino en sentido contrario. Por ejemplo, para hallar el valor de x en la ecuación $x \cdot 5 - 3 = 32$ y como el orden correcto de las operaciones es primero la multiplicación y después la resta, la expresión simbólica indica que, partiendo de x, hay que multiplicar por 5 y restar 3 para obtener como resultado 32. Entonces, para resolver la ecuación y encontrar el valor de x se parte de 32 y se aplica la operación inversa de la resta y después la inversa de la multiplicación, en ese orden. Vale decir que, partiendo de 32, sumamos 3 y al resultado lo dividimos por 5. Por lo tanto, $x = 7$.

Cuando es necesario indicar que las operaciones se resuelven en un orden distinto del que marcan los términos (indicados por los signos + o –) se usan paréntesis. Por ejemplo, la expresión $(x - 3) \cdot 5 = 45$ indica que primero se resuelve la operación dentro de los paréntesis y después se multiplica por 5; y para averiguar el valor de x, a 45 se lo divide por 5 y al resultado se le suma 3. Por lo tanto, $x = 12$.

Para verificar si el resultado es correcto basta reemplazar en la primera expresión a x por el valor obtenido y resolver el cálculo: $(12 - 3) \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$.

Las ecuaciones son igualdades en las que hay que descubrir un número, llamado ***incógnita****.*

b) Leé esta explicación sobre los elementos a los que se denomina variables y tomá nota de lo que te parezca necesario para acordarte de qué es una variable.

• • • Variables y valores

Las relaciones numéricas que se expresan con los signos mayor (>) y menor (<) se llaman desigualdades, y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman **inecuaciones**.

En algunos casos se usan los signos mayor o igual ($\geq$) o menor o igual ($\leq$) para indicar que en esos casos, además de la desigualdad, también es válida la igualdad. En las inecuaciones, igual que en las ecuaciones, se usan letras para indicar las incógnitas o variables.

Cada letra representa una variable o sea que algunas veces puede tener más de un valor y representar más de un número. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 5 = 9$, el número 5 no varía, es una constante, pero la letra x puede valer +2 o bien –2 porque $(+2)^2 = 4$ y también $(-2)^2 = 4$. En cambio, en la ecuación $x + 5 = 19$, al encontrar la solución $x = 14$ y reemplazar la x por 14, se cumple la igualdad $14 + 5 = 19$, y 14 es el único número posible.

c) Observá esta situación y resolvé las consignas.

En la inecuación $x \leq 3$, como se trata de encontrar los valores de x iguales o menores que 3, la letra x puede tener distintos valores.

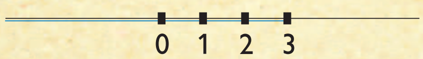
1. Escribí tres valores que satisfagan esa inecuación, es decir que al reemplazarlos se convierta en una expresión correcta.

2. Probá si los siguientes valores hacen verdadera la inecuación mencionada y justificá tus respuestas.

$2 \quad -3 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 5 \quad 22 \quad \frac{7}{2} \quad 1{,}5 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{12} \quad 3$

Una inecuación queda resuelta cuando se encuentra el o los números que puestos en reemplazo de una letra llamada incógnita hacen verdadera la expresión.

En este caso, seguramente encontraste que 22, $\frac{7}{2}$ y $\sqrt{12}$ no satisfacen la inecuación porque son números mayores que 3. Además de los valores que ya viste que satisfacen la inecuación, hay infinitos valores que también hacen verdadera esta desigualdad, pero como es imposible escribirlos todos, uno por uno, es útil representar las soluciones de las inecuaciones sobre una recta numérica. En la recta están presentes los infinitos puntos que corresponden a números racionales e irracionales y mediante ese recurso es posible representarlos a todos.



En la siguiente actividad podrás usar las notas que tomaste sobre inecuaciones e incógnitas.

A 3. La edad de Jimena

a) Copiá el siguiente problema en tu carpeta y revolvé las consignas.

Dentro de cinco años, Jimena será mayor de 18 años. ¿Qué edad tiene actualmente Jimena?

1. Planteá el problema en forma simbólica y luego realizá las operaciones correspondientes para hallar el valor de la incógnita.

2. Con los datos que tenés, ¿podés saber la edad actual de Jimena?

3. Compará lo que escribiste con la explicación que sigue y, si te parece necesario, reescribí tus respuestas.

Si la letra x representa la edad actual de Jimena, $x + 5$ es la edad de Jimena dentro de 5 años. Entonces, $x + 5 > 18$.

Resolver la inecuación significa partir de 18 para encontrar x. Se trata de despejar x como en el caso de las ecuaciones, para lo que se puede hacer la operación inversa de +5 que es –5 en ambos miembros de la desigualdad $x + 5 > 18$:

$x + 5 - 5 > 18 - 5$

$x > 18 - 5$

$x > 13$

Ahora se sabe que la edad de Jimena es mayor de 13 años.

La inecuación expresada en forma simbólica tiene como respuesta un número infinito de soluciones. Pero, de acuerdo con el problema que estamos resolviendo, por tratarse de una edad, de esas infinitas soluciones sólo se considerarán las que corresponden a números naturales.

Más adelante, al avanzar en tus conocimientos matemáticos, te enfrentarás a casos en los que, en lugar de hacer operaciones con números naturales, necesitarás operar con otra clase de números. En particular, en la actividad siguiente podrás aplicar lo que aprendiste sobre las distintas clases de números.

A 4. Las inecuaciones en la recta numérica

a) Leé la situación y revolvé las consignas.

En la quebrada del río Pinturas, en la provincia de Santa Cruz, está la Cueva de las Manos, en cuyas paredes y aleros se encuentran pinturas rupestres realizadas por los tehuelches. Esas pinturas han soportado el paso de siete, ocho o nueve mil años según los casos. Fueron descubiertas en 1941 por el padre salesiano Alberto de Agostini.

1. Copiá en tu carpeta la siguiente recta numérica que representa una línea histórica. Está graduada en milenios, o sea que cada unidad corresponde a 1000 años.

2. Marcá con un punto *D* la fecha del descubrimiento de las pinturas.

3. ¿Qué número en milenios corresponde a una pintura que al finalizar el segundo milenio tenía 7000 años de existencia? ¿Y una de 8000? ¿Y una de 9000 años?

4. Representá con puntos *P*, *Q* y *R* las fechas posibles de realización de esas pinturas rupestres. ¿Qué clase de números les corresponde?

5. Marcá con color, sobre la recta, la época de realización de esas pinturas.

6. Llamando x a cada punto, racional e irracional, de la recta que sustenta la línea histórica dibujada, ¿cómo podés escribir la relación que representa la época en que fueron realizadas esas pinturas rupestres?

7. ¿Cuál es la inecuación que representa la época posterior al descubrimiento de las pinturas?

8. Dibujá otras rectas numéricas para representar las siguientes inecuaciones:

$x < -1$ $\qquad$ $x + 3 > 0$ $\qquad$ $x - 2 < 2$ $\qquad$ $2x > 2$

A partir del tema **2**, vas a estudiar en qué procedimientos el Álgebra ayuda a resolver problemas matemáticos.

TEMA 2: EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO

A 5. Proceso de generalización

a) Respondé en tu carpeta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo de 3 m de base y 5 m de altura?; ¿y la de uno de 4 m por 6 m?; ¿y la de uno de 5 m por 7 m?; ¿y la de uno de lados de 8 m y 10 m?

2. La colección de rectángulos anterior tiene una característica común que es la relación entre sus lados *a* y *b*. Escribí simbólicamente esa relación.

3. Ahora dibujá uno de esos rectángulos y usá *b* como lado para dibujar un cuadrado dentro del rectángulo. Describí las dos figuras en las que ha quedado dividido el rectángulo.

4. Escribí el área de cada rectángulo expresada como la suma del área del cuadrado más el área de la otra figura.

5. Si llamás x a la base del rectángulo, ¿qué fórmula permite calcular la superficie total teniendo como único dato la medida x de la base? Esa fórmula ¿es válida para cualquier rectángulo de esta familia?

6. ¿Pensás que la fórmula que hallaste tiene una única expresión simbólica? Comparala con la de otro compañero y consultá con tu docente sobre los resultados.

El uso de letras para las variables del ejercicio te permitió realizar un procedimiento propio del Álgebra. Tomaste la característica común a todos los rectángulos cuya altura mide 2 unidades más que su base y la empleaste para lograr una fórmula de cálculo del área de cualquier elemento de esta familia de rectángulos, partiendo de su base como único dato. En este proceso de generalización dejaste de lado la medida específica de los lados, que es una característica particular de cada rectángulo de esta familia, y tampoco te fue necesario dibujarlos a todos ya que consideraste lo que les ocurre por pertenecer a esa familia y no lo referido a sus particularidades.

A 6. Expresiones algebraicas equivalentes

Desde hace mucho tiempo venís trabajando con el signo igual.

Ahora también aparece en las ecuaciones. Ese signo igual ya no es sólo la indicación que escribís cuando resolvés un cálculo, como $3 + 2 = 5$, sino que relaciona dos expresiones equivalentes, o sea que tienen el mismo significado. Para el mismo valor de una incógnita, las expresiones del primero y del segundo miembro de la igualdad son iguales porque tienen el mismo valor numérico, y eso debe suceder siempre.

Si escribís $20 + x = 25$ no estás tratando de sumar la x al 20, sino de encontrar cuándo esa suma, $20 + x$, toma el valor 25.

Cuando quieras despejar x para encontrar su valor, tenés que cuidar que siempre se mantenga el equilibrio entre los dos miembros de la igualdad. Para asegurar ese equilibrio es necesario proceder paso a paso, aplicando a ambos miembros de la igualdad las mismas transformaciones.

a) De la siguiente lista de ecuaciones, copiá en tu carpeta las equivalentes a $20 + x = 25$.

1. $25 - x = 20$	**6.** $20 + x - 25 = 0$
2. $18 + x = 23$	**7.** $20\,x = 25$
3. $x - 2 = 7$	**8.** $\frac{x}{5} = 1$
4. $x = 25 - 20$	**9.** $2\,x + 15 = 25$
5. $25 + x = 20$	**10.** $20 + x = 15$

b) Si en la consigna **a** contestaste que algunas son equivalentes a la ecuación propuesta, respondé:

1. ¿Qué transformaciones se hicieron en $20 + x = 25$ para llegar a ellas?

2. ¿Cuándo tuviste que emplear operaciones inversas para contestar? Escribí los ejemplos y cómo los resolviste.

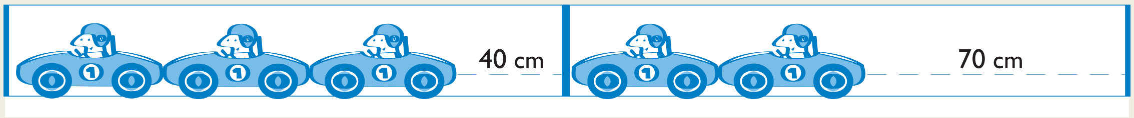
c) Conversá con tu docente y con tus compañeros para ver si están de acuerdo con tus respuestas.

En la actividad siguiente aplicarás los conocimientos de Álgebra que ya lograste para resolver algunas situaciones. Volvé a mirar tus anotaciones en la carpeta o las explicaciones del cuaderno siempre que lo necesites.

A 7. Para resolver con ayuda del Álgebra

a) A continuación se presentan cuatro situaciones con consignas para realizar en cada una. Resolvelas en tu carpeta aclarando la letra y el nombre de la situación. Si podés, comentá con tus compañeros las respuestas que cada uno fue encontrando.

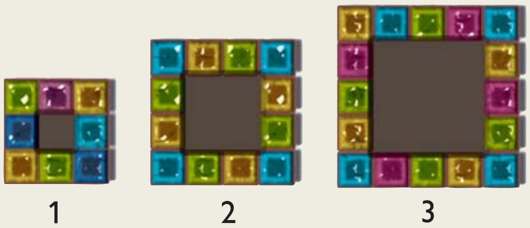
1. En dos sectores de una estantería hay guardados autos de juguete. Todos los autos son iguales. El sector izquierdo de la estantería mide lo mismo que el derecho.



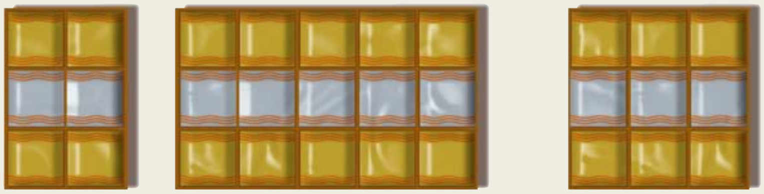
- Expresá con símbolos esta situación.
- Calculá, empleando la ecuación que escribiste, cuánto mide cada auto.
- ¿Cuál es el largo de cada sector de la estantería?

2. Los siguientes diseños corresponden a marcos hechos con placas cuadradas.

- Calculá la cantidad de cuadrados necesaria para dos diseños que le sigan en tamaño a estos primeros tres.
- Escribí una fórmula general para calcular el número de placas cuadradas que bordean el cuadrado central según el número de orden de la figura. (Sugerencia: llamá x al número de placas del marco y n al número de orden del diseño.)



3. Un comercio vende alfajores en cajas de distinto tamaño. Cada caja contiene los alfajores de dulce de leche envueltos con papel dorado, y los de fruta, con papel plateado, según lo muestran las tres cajas rectangulares que ves en la figura de abajo, siempre con tres filas en cada una.



- ¿Cómo podés expresar la relación entre la cantidad de alfajores de una y otra clase que hay en cada caja?
- Si sabés cuántos alfajores de dulce de leche hay en una caja, ¿podés decir cuántos hay de fruta y cuántos en la totalidad de la caja?
- Si sabés que una caja tiene 36 alfajores en total, ¿podés averiguar cuántos de cada clase contiene?

4. La suma de cuatro números consecutivos es 98; ¿cuáles son los números? (Ayuda: llamá x al primero, $x + 1$ al siguiente y así sucesivamente.)

Para finalizar

Vos mismo podés escribir el texto final de esta unidad. Para ello tendrás que revisar lo estudiado en cada tema. Desde las primeras actividades estuviste tomando nota a modo de síntesis para acordarte de las características de incógnitas y variables. También respondiste preguntas y anotaste conclusiones. Todos esos textos te servirán para escribir la síntesis. Procedé de la siguiente manera: escribí el título del tema y un breve texto sobre cada uno.

El texto que escribas te servirá para revisar lo que aprendiste cuando en la próxima unidad sigas trabajando sobre temas de Álgebra, en particular sobre las ecuaciones.

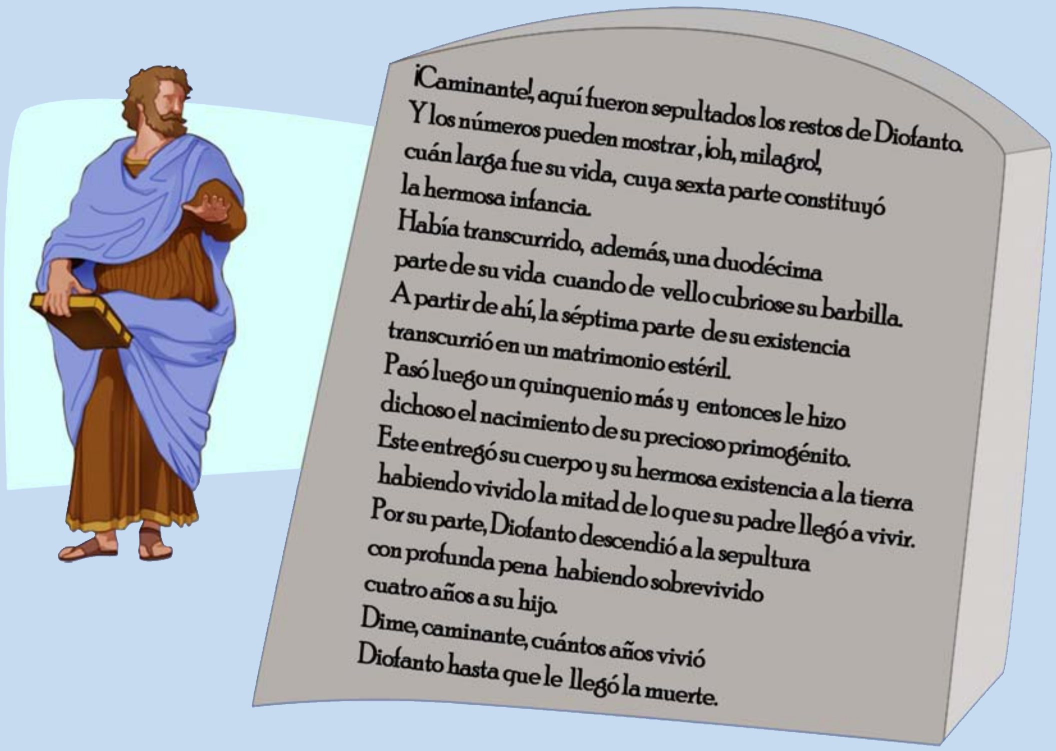
Los desafíos que aparecen a continuación te ofrecen una buena ocasión para que pienses situaciones de la vida cotidiana, algunas planteadas por matemáticos famosos, usando los elementos de Álgebra que acabás de aprender. También podrás utilizar los números que ya conocés.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El epitafio de Diofanto

Diofanto fue un matemático griego del siglo III que tuvo gran influencia entre los matemáticos árabes. Entre sus obras se conservan tratados sobre los números y seis de sus trece libros de Aritmética, que constituyen el primer tratado de álgebra griega. Es muy notable porque, en general, los matemáticos griegos de esa época estaban dedicados al estudio de la Geometría y no del Álgebra.

a) Leé atentamente y tratá de resolver el problema planteado.



El desafío consiste en calcular los años que vivió Diofanto y los que vivió su hijo.

2. Pirámides numéricas

Agregá una o dos filas más a estas curiosas pirámides.

$$(0 \cdot 9) + 8 = 8$$
$$(9 \cdot 9) + 7 = 88$$
$$(98 \cdot 9) + 6 = 888$$
$$(987 \cdot 9) + 5 = 8888$$
$$(9876 \cdot 9) + 4 = 88888$$
$$(98765 \cdot 9) + 3 = 888888$$

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$111111^2 = 12345654321$$
$$1111111^2 = 1234567654321$$

Seguramente, al efectuar las operaciones respetaste el orden indicado por los paréntesis. Si disponés de calculadora, explorá cómo se comporta la pirámide cuando un resultado tiene más de ocho cifras.

3. Cuadrados con números

¿Sabés que un cuadrado mágico es una disposición de igual número de filas y de columnas en cuyos cuadros se ubican números de modo que las sumas de los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sean iguales?

En el mundo islámico, los cuadrados mágicos se desarrollaron en los siglos IX y X hasta que alcanzaron su apogeo en el siglo XII. Los cuadrados mágicos llegaron a Europa en el siglo XIV en textos traducidos del árabe. Su denominación árabe original fue **disposición armoniosa de los números**.

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

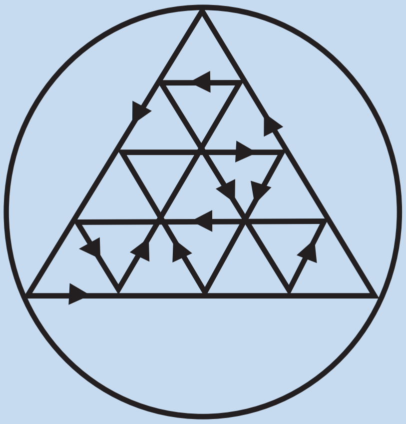
a) Te presentamos un cuadrado mágico 4 x 4. Su número mágico es 34 y además posee otra propiedad: sumando 4 números que estén en casillas que formen un cuadrado también se obtiene la misma suma. Comprobalo.

b) Si trasladás la columna de la izquierda a la derecha, ¿se mantiene esa propiedad? ¿Ocurre lo mismo si movés una línea de abajo hacia arriba? ¿Por qué?

4. Un símbolo griego

Este signo está ligado a ciertas inscripciones de antiguos monumentos conmemorativos encontrados en Grecia, y funciona de algún modo como un sello o una firma. Resulta agradable descubrir que el símbolo, formado por un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia puede trazarse con una sola línea continua, sin volver a pasar por ninguna línea. Pero si nos permitimos pasar sobre algunas líneas todas las veces que deseemos, sin levantar el lápiz, con la menor cantidad posible de cambios de dirección en el trazo, la tarea se convierte en el mejor acertijo de este tipo que se haya inventado nunca.

El símbolo griego puede dibujarse con una sola línea contínua con trece cambios de dirección. Te desafiamos a que lo pruebes.



UNIDAD 14 Álgebra (II). Ecuaciones de primer grado e identidades

En la unidad 13 comenzaste tu estudio del Álgebra a través de considerar qué es una variable y qué, una incógnita. También tuviste oportunidad de reconocer ecuaciones e inecuaciones –igualdades y desigualdades algebraicas–. Viste también que son herramientas especialmente útiles en la resolución de problemas en los que se puede aplicar una fórmula general a situaciones particulares, como en muchos cálculos geométricos que ya conocés, por ejemplo cálculos de perímetros y áreas.

En esta unidad continuarás ampliando tus conocimientos sobre temas de Álgebra trabajando con ecuaciones y unas igualdades muy especiales que se cumplen para cualquier valor de las variables y por eso se las denomina identidades.

TEMA 1: ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En las actividades de este tema abordarás algunos problemas que se pueden expresar simbólicamente mediante ecuaciones que contienen una sola incógnita. Si esa incógnita tiene exponente 1, como en las ecuaciones que vas a resolver en esta parte de la unidad, se dice que la ecuación es de primer grado.

A 1. Cálculos mágicos

a) A continuación vas a leer una situación que describe un juego realizado en un aula entre los alumnos y su maestro. Está presentada en dos etapas. Resolvé las consignas de cada etapa, y así podrás desarrollar el juego en tu aula. Probálo con algún compañero de otro año. Acordá con tus compañeros de año para que todos puedan probar el juego con diferentes personas.

1. Aníbal le propuso a otro compañero que piense un número menor que 50 y lo escriba en un papelito sin mostrárselo a él porque lo iba a adivinar. Le dio las siguientes órdenes para que hiciera cálculos mentales sin decir los resultados hasta que él se lo indicara:

- Sumale 10.
- Multiplicá por 3.
- Restá 6.
- Dividí por 3.
- Restá 6.
- Ahora decime, ¿qué número te dio?

Aníbal le restó 2 a ese número y, en efecto, acertó.

2. El maestro pidió a los chicos que explicaran el truco, y Aurora lo hizo por escrito, escribiendo ecuaciones:

Pensá un número	x
Sumále 10	$x + 10$
Multiplicá por 3	$3 \cdot (x + 10) = 3 \cdot x + 30$
Restá 6	$3 \cdot x + 30 - 6 = 3 \cdot x + 24$
Dividí por 3	$\frac{3x+24}{3} = x + 8$
Restá 6	$x + 8 - 6 = x + 2$
¿qué número te dio?	42
Si $x + 2$ es 42, entonces $x = 42 - 2$ y el número escrito es 40.	

• Copiá en tu carpeta la explicación de Aurora, analizála y respondé, ¿es correcta?, ¿por qué?

b) En el siguiente cuadro encontrarás una síntesis de los pasos seguidos para llegar a la solución de las ecuaciones con una sola incógnita, como las que escribió Aurora en su explicación del truco. A medida que vayas leyendo los pasos, marcálos en la explicación que copiaste.

• • • La incógnita

Se comienza por designar el número buscado con una letra que puede ser *x, y, z* o la que uno quiera elegir. Esa letra es la incógnita del problema.

• • • La ecuación

Para plantear la ecuación hay que escribir una igualdad en la que esté comprendida la incógnita.

• • • La resolución

Para resolver la ecuación se la va transformando en ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas, hasta encontrar el valor (o los valores) de la incógnita. A este proceso se lo llama "despejar" la incógnita. Las soluciones de la ecuación son los valores de la incógnita.

• • • La verificación

En la ecuación planteada, se reemplaza la incógnita por el valor hallado.
Si se cumple la igualdad, la solución de la ecuación es la respuesta del problema.

1. Si tenés algún compañero con el que puedas trabajar, repitan el truco entre ustedes eligiendo otros números para las instrucciones y escriban en ecuaciones el procedimiento para llegar a la solución.

2. Preguntale a tu docente acerca de los textos que presentan problemas para resolver mediante ecuaciones con una sola incógnita. Seleccioná una situación y resolvela siguiendo los pasos propuestos. Mostrale al docente tu trabajo.

A 2. Del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico

En la actividad anterior viste el planteo de una situación en la que se necesita descubrir algo, y se expresa con los símbolos propios del lenguaje algebraico. No tenés que olvidar que al escribir una expresión simbólica hay que indicar qué es lo que significa cada letra: por ejemplo si la expresión "el triple de la cantidad de lápices que tengo en mi cartuchera" se simboliza por $3x$*, el número de lápices es* x*.*

a) Copiá las siguientes expresiones del lenguaje coloquial y traducílas al lenguaje algebraico.

1. El doble de un número m.

2. Un número a, más su doble.

3. El número d menos su mitad aumentada en 3,5.

4. El triple de un número x más 4.

5. El número anterior al número natural r.

6. El número siguiente al número natural r.

7. La suma de tres números naturales consecutivos.

8. La mitad de a más el doble de t.

9. El doble del resultado de sumar 3 al número s.

b) Los siguientes listados están desordenados. Copialos haciendo corresponder a cada expresión simbólica su enunciado verbal.

$(x + y)\,(x - y)$	El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.
$(x + y)^3$	El triple de la suma de 3 números.
$x + 15 = 2x$	El cuadrado de una suma.
$4x - 3$	La suma de dos números por su diferencia.
$3\,(x + y + z)$	El área de un cuadrado es el cuadrado del lado.
$(a + b)^2$	La suma de dos números cuadrados.
Área $= x^2$	El cuádruple de un número menos 3.
$a^2 + b^2$	El cubo de la suma de dos números.
Área $= \frac{1}{2}\, b \cdot h$	La edad actual de un persona que dentro de 15 años tendrá el doble.

A

3. ¿Todas las expresiones algebraicas son ecuaciones?

a) Muchas veces trabajás con enunciados o con igualdades en las que intervienen letras, pero eso no es suficiente para que sean ecuaciones. Copiá las siguientes expresiones o enunciados, analizálos y decidí cuáles son ecuaciones. Explicá por qué. Para hacerlo transformá primero los enunciados en expresiones algebraicas.

- $2\ (3x + 4y)$.
- $5\ (3b - 2) = 7(b + 2)$.
- La suma de un número con su mitad es 15.
- $12a + 15a - r$.
- Un número y su cuarta parte.
- Tengo 87 pesos y los gasto todos menos 17. ¿Cuántos me quedan?
- La base de un rectángulo es 5 cm mayor que su altura y su perímetro es 36 cm.
- Un bolígrafo cuesta 2 pesos más que un lápiz.
- $x = \frac{13}{18}$.
- $13 + 7 = 20$.
- $2\ (z - 1) = 0$.
- $a + b = b + a$.

b) ¿Qué podés decir acerca de las expresiones anteriores que no son ecuaciones?

A

4. Despejar la incógnita

En la actividad **6** de la unidad **13** aplicaste diferentes estrategias para transformar una ecuación en expresiones equivalentes cada vez más sencillas.

Cuando se trata de encontrar el valor de la incógnita x, hay que despejarla cuidando que los dos miembros de la igualdad no se desequilibren y sigan siendo efectivamente iguales. Para asegurar ese equilibrio es necesario proceder paso a paso, aplicando a ambos miembros de la igualdad las mismas transformaciones, como verás a continuación.

En esta oportunidad aplicarás dos procedimientos que ya usaste muchas veces para despejar la incógnita:

1. La reducción de términos, es decir hacer las sumas y restas en las que figura la incógnita.

2. La transposición de algún término o factor de un miembro a otro de una igualdad, como consecuencia de hacer una misma operación en los dos miembros de la igualdad.

Al operar con ecuaciones tené en cuenta que si escribís, por ejemplo, $30 + x = 35$ no estás tratando de sumar la x al 30, sino de encontrar cuándo esa suma, $30 + x$, toma el valor 35.

a) Trabajá en tu carpeta. Hallá el valor de *x* en las siguientes ecuaciones efectuando primero, si fuera posible, las sumas y restas indicadas. Recordá que cuando hay paréntesis primero se deben efectuar las operaciones que permitan quitarlos.

1. $7x - 3x = 5 + x + 4$

2. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x$

b) Para resolver una ecuación disponés de distintas opciones. Después de haber resuelto las ecuaciones planteadas en a), leé las siguiente síntesis del "paso a paso" de posibles registros de diferentes procedimientos de resolución y comparálos con los procedimientos que usaste. Si podés trabajar con un compañero hagan juntos esta comparación y corrijan lo que sea necesario.

1. Para resolver la ecuación $7x - 3x = 5 + x + 4$

Reducir términos al efectuar la resta y la suma	$7x - 3x = 4x$
$7x - 3x = 5 + x + 4$ equivale a	$4x = x + 9$
Transponer x por la operación inversa de la suma restando x en ambos miembros	$4x - x = x + 9 - x$
$4x = x + 9$ equivale a	$3x = 9$
Transponer x por la operación inversa de la multiplicación dividiendo ambos miembros por 3	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$
$3x = 9$ equivale a	$x = 3$

2. Para resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2x$

Quitar paréntesis distribuyendo el factor $\frac{1}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2x$
Quitar denominadores multiplicando los dos miembros de la igualdad por el mismo múltiplo común de los denominadores:	$4\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right) = 4 \times 2x$
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 2x$ equivale a	$2x + x - 2 = 8x$
Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro miembro mediante la aplicación en ambos miembros de las operaciones inversas correspondientes	$2x - 8x + x - 2 + 2 = 8x - 8x + 2$
Realizar las operaciones y hallar el valor de *x*	$-5x = 2$ $\frac{-5x}{-5} = \frac{2}{-5} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$

UNIDAD 14

Hasta aquí trabajaste fundamentalmente con ecuaciones de primer grado con una incógnita. Pero no todas las situaciones algebraicas se resuelven planteando el uso exclusivo de la incógnita x con el exponente 1. En el tema siguiente trabajarás con otros casos en los que se emplean otras potencias y más de una letra como variable.

TEMA 2: IDENTIDADES ALGEBRAICAS

A medida que realices las actividades de este tema descubrirás fórmulas algebraicas en las que se emplean letras para designar pares de números que cumplen la igualdad. En particular, las igualdades que se cumplen para cualquier par de números se llaman identidades.

A

5. Los cuadrados de lados *a, b* y *a + b*

El desarrollo de esta actividad te permitirá encontrar una relación matemática de gran importancia en la que las letras a y b representan algebraicamente las medidas de los lados de dos cuadrados.

a) Tomá, por ejemplo, 2 cm como valor de a y 5 cm como valor de b, dibujá y recortá:

1. un cuadrado de lado a.

2. un cuadrado de lado b.

3. un cuadrado de lado $a + b$.

b) Escribí sobre cada uno la medida de su respectiva área.

Seguramente habrás escrito: a^2 en el cuadrado de lado a, b^2 en el cuadrado de lado b y $(a + b)^2$ en el cuadrado de lado $a + b$.

c) Ubicá los cuadrados de lado a y de lado b dentro del cuadrado de lado $a + b$, de manera que un vértice de a^2 coincida con un vértice de $(a+ b)^2$ y un vértice de b^2 coincida con el vértice opuesto de $(a + b)^2$. Observá que los dos cuadrados más chicos solo tienen un vértice en común. Pegalos en tu carpeta en esa posición.

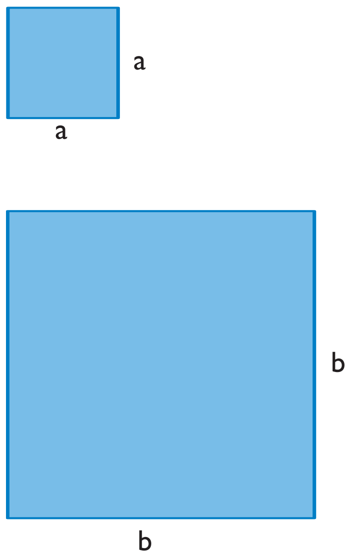
d) El cuadrado de lado $a + b$ está formado por cuatro figuras. Respondé usando las letras a y b para describirlas, ¿cuáles son cada una de esas figuras? Dibujalas y escribí sus nombres.

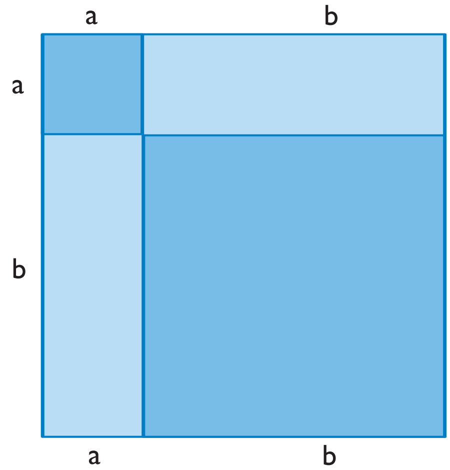
e) Expresá el área del cuadrado de lado $(a + b)$ de dos modos diferentes:

1. Mediante un cálculo numérico.

2. De modo geométrico, usando letras para nombrar las figuras.

• Como respuesta a la consigna **c** habrás hecho dibujos similares a estos.





• Como cálculo numérico habrás escrito alguna expresión equivalente a las siguientes:

$(2 + 5)^2 = 2^2 + 2(2 \times 5) + 5^2 = 4 + 20 + 25 = 49.$

f) Repetí la experiencia con otros pares de números.

Como experiencia geométrica que confirma los resultados aritméticos pudiste encontrar la fórmula que permite generalizar el procedimiento a cualquier par de números.

El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de tres términos: el cuadrado del primero, el doble del producto entre el primero y el segundo y el cuadrado del segundo.
En símbolos: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

A 6. El cuadrado de la diferencia

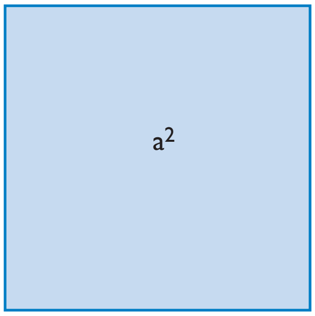
a) En esta actividad volverás a trabajar con dos números a y b, como medidas de los lados de dos cuadrados. Tomá, por ejemplo, $a = 5$ cm y $b = 2$ cm . Dibujá y recortá.

1. Un cuadrado de lado a.
2. Un cuadrado de lado b.
3. Un cuadrado de lado $a - b$.

b) Escribí sobre cada uno la medida de su respectiva área y ubicá dentro del cuadrado de lado a, el cuadrado de lado b de modo que uno de los vértices de ambos coincida. Dibujálos en tu carpeta en esa posición.

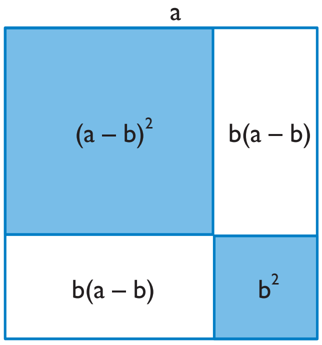
Seguramente habrás escrito: a^2 en el cuadrado de lado a, b^2 en el cuadrado de lado b y $(a - b)^2$ en el cuadrado de lado $a - b$.

c) En el cuadrado de lado a, que contiene al de lado b, trazá las prolongaciones de los lados de b^2, hasta que el cuadrado de lado a quede dividido en dos cuadrados y dos rectángulos. Para nombrarlos usá las letras a y b y anotá lo que corresponda sobre cada lado de los cuadrados y cada lado de los rectángulos.



d) Escribí sobre cada una de las cuatro figuras que componen el cuadrado de lado a, el área correspondiente.

Seguramente tus dibujos son similares a estos.



e) Observá la figura. Para obtener el área del cuadrado de lado $a - b$, ¿qué áreas se deben restar a la del cuadrado de lado a? Escribí las operaciones que permiten obtener $(a - b)^2$ a partir de a^2, b^2 y las áreas de los dos rectángulos $b \cdot (a - b)$. Tené en cuenta que si se efectúa el producto entre el largo y el ancho del rectángulo se obtiene el área $b \cdot (a - b)$ y por aplicación de la distributividad del producto, esta área se puede escribir también como $b \cdot a - b^2$.

f) Efectuá las operaciones necesarias para obtener una expresión de $(a - b)^2$ lo más simple posible.

Seguramente esta experiencia geométrica te permitió encontrar la fórmula que generaliza este procedimiento a cualquier par de números.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma del cuadrado del primero y el cuadrado del segundo menos el doble del producto entre el primero y el segundo.
En símbolos: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.$

Como habrás notado, para obtener el área $(a - b)^2$ hay que plantear que:

$(a - b)^2 = a^2 - (2ba - 2\,b^2) - b^2 = a^2 - 2ba + 2\,b^2 - b^2$ y por este camino geométrico se obtiene como resultado que $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$.

El camino algebraico consiste en el cálculo del cuadrado de la diferencia como una potencia de base $(a - b)$ y exponente 2. Es decir que $(a - b)^2 = (a - b)\,.\,(a - b)$ y distribuyendo ordenadamente los productos se obtiene $a^2 - a\,b - b\,a + b^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$.

g) Compará el resultado de estas operaciones algebraicas con el resultado que obtuviste por el camino geométrico, ¿qué observás? Proponé otros ejemplos numéricos para aplicar las igualdades anteriores y comprobar geométricamente los resultados.

A 7. La diferencia de dos cuadrados

En la actividad anterior aprendiste a calcular el cuadrado de la diferencia de dos números $(a - b)^2$. Ahora vas a restar dos números cuadrados $(a^2 - b^2)$.

¡Poné mucha atención! Se trata de dos problemas bien diferentes. En la actividad anterior restaste *a* y *b* para obtener el lado de un cuadrado, en cambio en este caso se trata de los cuadrados de dos números y restarlos.

¡No te confundas! los resultados de estos procedimientos son diferentes porque la potenciación no es una operación distributiva con respecto a la suma ni a la resta como ya viste la unidad **3**. Vas a trabajar primero con números y luego con figuras geométricas, para comparar los resultados de operar con dos números *a* y *b* de modo diferente.

Calcularás los cuadrados de *a* y de *b* y luego la diferencia entre esos cuadrados.

Para realizar este trabajo necesitás lápiz, papel cuadriculado y regla graduada. Aunque podés hacerlo sin calculadora, si disponés de una, podés usarla. Te va a facilitar las operaciones con números decimales para plantear mayor cantidad de ejemplos.

a) Copiá la siguiente tabla y completala. Trabajá con distintos pares de números racionales *a* y *b*, naturales y también decimales, proponiendo otros ejemplos.

a	b	a + b	a – b	(a + b) (a – b)	a^2	b^2	$a^2 - b^2$
5	2	7	3	21	25	4	21
0,5	0,3						
15	4,5						

b) Compará los resultados de la columna del producto $(a + b)(a - b)$ con los de la última donde está la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2$. ¿Qué observás? ¿Ocurre lo mismo con cualquier par de números?

El objetivo de la parte que sigue de esta actividad es que verifiques mediante un procedimiento geométrico, lo que antes descubriste numéricamente en el cuadro del punto a). Vas a trabajar geométricamente con la igualdad: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, para lo cual dibujarás dos segmentos a y b, por ejemplo, de longitudes $a = 5$ cm y $b = 3$ cm.

c) Representá el segmento suma $a + b$. ¿Cuánto mide?

d) Representá el segmento diferencia $a - b$. ¿Cuánto mide?

e) Recortá dos cuadrados de lados *a* y *b*. ¿Cuánto mide el área de cada uno?

f) Ubicá los cuadrados superponiéndolos de tal modo que coincida uno de sus vértices. El de lado *b* resulta interior al de lado *a*. Escribí junto a cada lado su medida según corresponda. Dibujá los cuadrados en esa posición y sombreá la figura que resulta de quitar al cuadrado de lado *a*, el cuadrado de lado *b*. Obtendrás una figura con forma de L.

g) Trazá la prolongación de un lado de b^2 hasta que la figura sombreada quede dividida en 2 rectángulos.

En el dibujo que hiciste siguiendo los pasos indicados, tendrás un cuadrado de lado a, dentro del cual hay un cuadrado de lado b, un rectángulo (R_1) de a x (a – b) y un rectángulo (R_2) de b . (a – b).

h) Expresá simbólicamente el área de la figura sombreada, comparála con lo que descubriste en la consigna b y redactá brevemente tus observaciones.

i) Si podés, reunite con otro compañero para comparar lo que escribieron y muéstrenle sus producciones al docente. Seguramente habrán llegado a una fórmula equivalente a la siguiente: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Lo que comprobaste en esta actividad se puede enunciar de esta manera:

La diferencia de los cuadrados de dos números a y b, se puede obtener multiplicando la suma de esos números por su diferencia.

j) Hacé con tus compañeros un afiche con los cálculos numéricos y los respectivos dibujos geométricos que ilustren las identidades algebraicas que aprendieron en este tema. No dejen de plantear ejemplos con números decimales. Si disponen de calculadora es conveniente que la usen para hacer los cálculos.

A 8. Fórmulas equivalentes

a) En la actividad **5** de la unidad **13** de álgebra trabajaste con una familia de rectángulos con lados relacionados. La base mide x y la altura $x + 2$. Obtuviste una fórmula para calcular el área de esta familia de rectángulos partiendo de un único dato: la longitud de su base. Respondé:

1. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas sirven para calcular el área de los rectángulos de esa familia? Si te hace falta dibujá algunos de esos rectángulos.

- A = $x\,(x + 2)$
- A = $x^2 + 2$
- A = $x^2 + 2\,x$
- A = x . v + 2
- A = 2 x + v . x
- A = $x^2 + x + 2$
- A = $2\,x + x^2$
- A = $2\,x + x + 1$

b) Si obtuviste más de una respuesta correcta operá a partir de una de ellas con procedimientos algebraicos, haciendo los cálculos para llegar a la otra y comprobar que son expresiones equivalentes.

Consultá con tu docente acerca de tu trabajo en esta unidad y si es conveniente que consultes algún texto de matemática para resolver otras situaciones. En la próxima unidad dedicada a funciones profundizarás acerca de estos temas de álgebra.

Para finalizar

En esta segunda unidad dedicada al álgebra analizaste los posibles pasos a seguir para resolver una ecuación que tiene una única incógnita, comenzando por el planteo hasta llegar a la verificación. El trabajo algebraico sobre expresiones que vinculan números y letras –constantes y variables– permite operar con ellas para determinar los valores de las variables que verifican una igualdad.

Este tipo de trabajo cobra sentido cuando la expresión algebraica resulta de la formulación de un problema planteado en lenguaje coloquial y se la va transformando en otras expresiones equivalentes hasta despejar la incógnita.

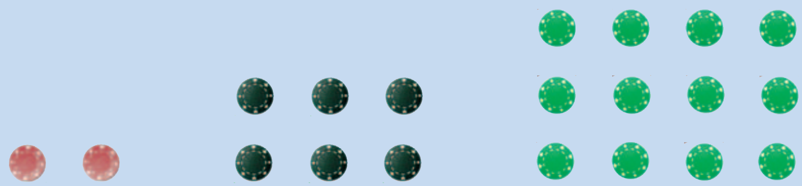
En particular en la primera parte trabajaste con ecuaciones de primer grado con una incógnita y en la segunda abordaste procedimientos geométricos para vincularlos con los caminos algebraicos en los que las letras representan las medidas de figuras. Este tipo de trabajo algebraico permite establecer relaciones de orden general que por cumplirse para todo par de números se denominan identidades. La potencia del álgebra se pone de manifiesto al tratar diversas situaciones que se comportan del mismo modo y pueden ser comunicadas mediante una misma expresión algebraica. Tal es el caso de las fórmulas que responden a procesos de generalización, por ejemplo el agrandamiento de figuras según determinado criterio.

En las unidades siguientes referidas al tratamiento de funciones aplicarás muchos de los conocimientos que adquiriste en esta unidad. Como siempre, los desafíos matemáticos que siguen te proponen situaciones interesantes, en este caso problemas curiosos para resolver mediante el Álgebra.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las fichas

Tenés una serie de disposiciones de fichas como las que te mostramos aquí:



Éstas son las primeras tres figuras. Encontrá una expresión para saber el número de fichas que tiene una figura según el lugar que ocupa en la serie. Continuá dibujando más arreglos de fichas de esta serie y hacé una tabla registrando los resultados.

¿Hay más de una fórmula que resuelva la situación? Si podés discutilo con tus compañeros y tu docente.

2. Pitágoras en acción

Esta es una propuesta de trabajo a partir del genial teorema de Pitágoras. En lugar de tomar la hipotenusa y cada cateto de un triángulo rectángulo para emplearlos como lados de cuadrados, repetí el procedimiento construyendo triángulos equiláteros en vez de cuadrados. Los tres triángulos equiláteros tienen que tener como lado, respectivamente, la hipotenusa y cada cateto del triángulo rectángulo. Entre las áreas de los triángulos, ¿se cumple la misma relación que con los cuadrados? O sea, ¿es verdad que: El área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre cada cateto?.

¿Qué pasará si tomás las longitudes de los catetos y la hipotenusa y las empleás como lados de otros polígonos regulares? ¿Podés probar con hexágonos y octógonos regulares? ¿Por qué?

3. ¿Qué es 365?

Todos saben que es el número de días del año pero también presenta otras particularidades. 365 se puede expresar como la suma de los cuadrados de tres números consecutivos y también como la suma de los cuadrados de los dos números siguientes a esa terna. ¿cuáles son esos números?

UNIDAD 15 Funciones

Es frecuente leer o escuchar expresiones como "el precio de un producto está en función de la demanda" o "la cantidad necesaria de forraje está en función del número de animales que hay que alimentar". En cada una de estas expresiones se hace referencia a que una variable depende de la otra.

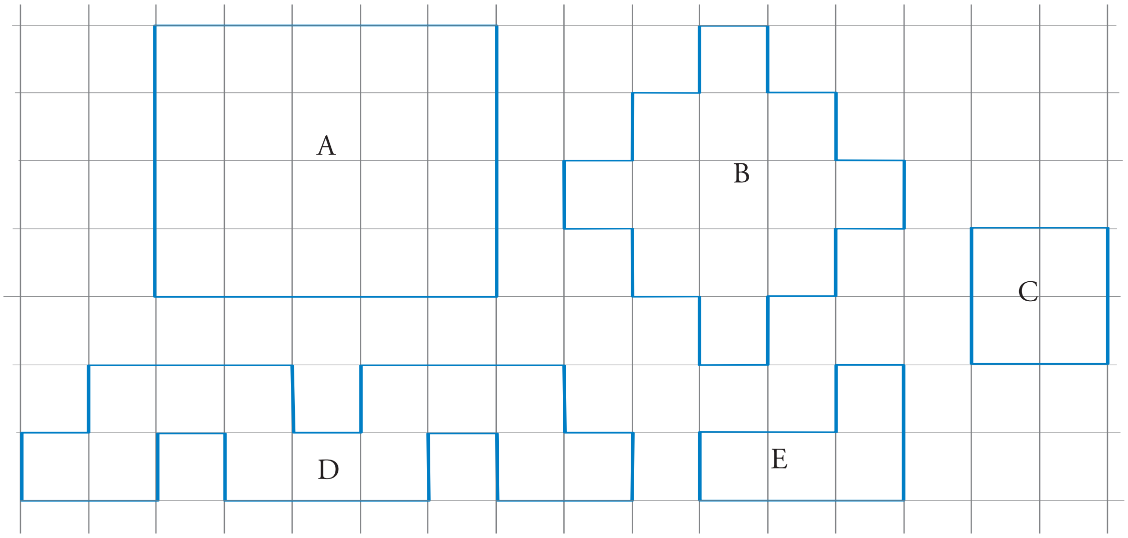
Detrás de estas expresiones tan comunes está presente un significado matemático que estudiarás en esta unidad. Verás qué condiciones deben cumplirse entre dos variables para que la relación entre ellas pueda ser considerada función.

En esta unidad revisarás los conocimientos que tenés acerca de correspondencias y su representación en coordenadas cartesianas para llegar a la definición de funciones.

En las actividades de esta unidad vas a trabajar con figuras geométricas conocidas para analizar las características de algunas correspondencias y aprender a representarlas en un gráfico. En ellas deberás calcular perímetros y áreas de figuras que ya estudiaste en las unidades de Geometría: triángulos, cuadriláteros, polígonos en general. Anotá en tu carpeta antes de comenzar las fórmulas de los cálculos que necesitar realizar. También vas a poner en juego tu conocimiento sobre proporcionalidad directa e inversa y su representación en gráficos cartesianos. Si te hace falta, consultá las unidades de Geometría del Cuaderno de estudio 1, *o buscá en los libros de Matemática de la biblioteca.*

A 1. Correspondencias entre medidas de figuras

En esta actividad te mostramos las figuras A, B, C, D y E dibujadas sobre un papel cuadriculado con cuadrados de 1 cm^2, o sea de 1 cm de lado.



a) ¿Cuál es el área y cuál el perímetro de cada figura? Completá con los resultados una tabla como la siguiente.

	Área en cm^2	Perímetro en cm
A		
B		
C		
D		
E		

b) Imaginá que las mismas figuras se hubieran hecho sobre un papel tramado con cuadrados de 2 cm de lado. Dibujá esas nuevas figuras. ¿Creés que el área y el perímetro resultan el doble de los que figuran en el cuadro de la consigna **a**? Anotá en tu carpeta qué te parece y comentáselo a tus compañeros.

c) Calculá las áreas en cm^2 y los perímetros en cm de las figuras que dibujaste en la conigna **b**. Con los resultados de los cálculos construí una tabla como la anterior y comprobá si tu predicción resultó cierta.

d) Averiguá ahora cómo varían el área y el perímetro de las figuras si se las dibuja en papel tramado con cuadrados de 3 cm de lado, y luego, de 4 cm de lado. Hacé los cálculos y anotá los resultados en una tabla. Compartí tus conclusiones con las de tus compañeros.

Consultá con tu docente cómo organizar la realización del siguiente punto, si no es posible trabajar con otros compañeros.

e) Reunite con otros compañeros y distribuyan las figuras A, B, C, D y E de la página anterior. Cada uno deberá completar dos tablas como las siguientes para cada una de las figuras que le toque.

Lado del cuadrado de la trama en cm	Area de la figura en cm^2
1	
2	
3	
4	

Lado del cuadrado de la trama en cm	Perímetro de la figura en cm
1	
2	
3	
4	

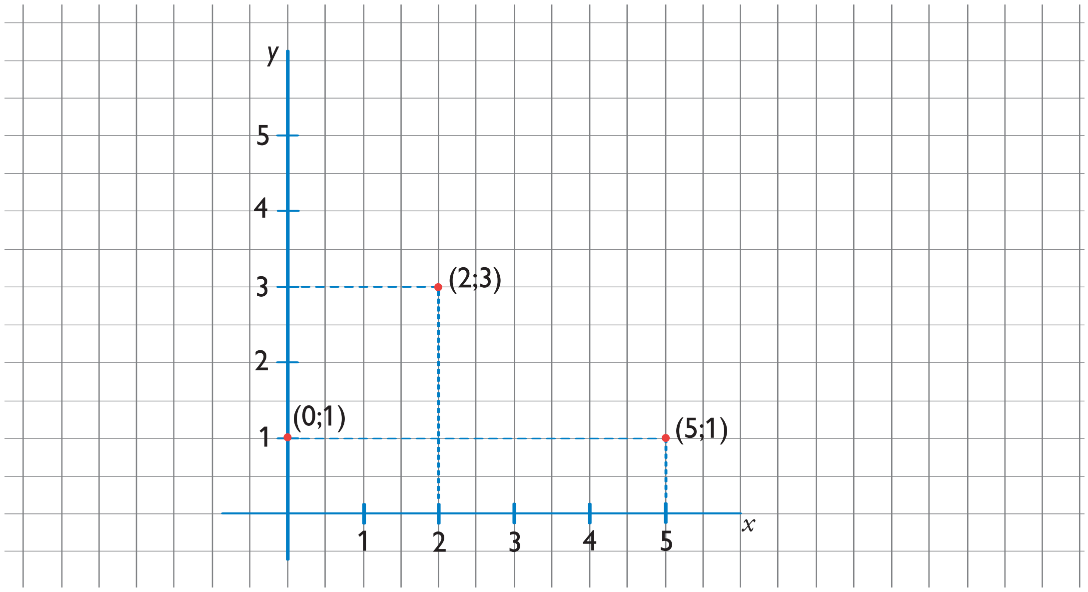
*Como recordarás, los datos reunidos en tablas como estas también pueden representarse mediante **gráficos cartesianos**. Seguramente ya tuviste oportunidad de observar que estos gráficos se construyen de la siguiente manera.*

***1.** Se trazan dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto considerado 0 u origen. El eje vertical se denomina **y** o **eje de ordenadas**, y el horizontal es el **x** o **eje de abcisas**.*

***2.** Sobre ellos se marcan graduaciones con valores numéricos ordenados de manera que aumentan hacia la derecha en **x** y hacia arriba en **y**, partiendo del punto 0. Así se pueden encontrar puntos en el plano por la asociación de un par ordenado de puntos, como los pares que surgen de las tablas anteriores.*

*• Recordá que los números de la primera columna en la tabla son las abscisas y se representan sobre el eje **x**. Los de la segunda son las ordenadas y se representan sobre el eje **y**.*

f) Tomá los datos de cada tabla que completaste en el punto anterior y representá los puntos correspondientes en un gráfico cartesiano. Recordá hacerlo sobre papel cuadriculado; podés orientarte por la siguiente figura.



g) Reúnan todos los gráficos que hicieron a partir de las cinco figuras. Sepárenlos en dos grupos: los que tienen puntos que pertenecen a una línea recta y los que tienen puntos que pertenecen a una misma línea curva.

1. Observen los gráficos y respondan las preguntas.

¿Pueden asegurar que los gráficos de algún grupo representan correspondencias directamente proporcionales? ¿E inversamente proporcionales? ¿Y no proporcionales? Justifiquen las respuestas.

2. Escriban en sus carpetas cómo varían las áreas y los perímetros de las figuras cuando se duplica, triplica y cuadriplica la longitud del lado del cuadrado de la trama sobre la que se dibujan las figuras.

En la actividad siguiente vas a analizar las producciones que acabás de realizar y a reconocer dos elementos que te servirán para identificar tipos de correspondencias: las imágenes y el dominio.

A 2. Imágenes y dominio de una correspondencia

En varias oportunidades has usado las palabras "correspondencia" y "corresponde".

Toda tabla que asocie valores de una cierta clase a valores de otra clase o de la misma, establece dos correspondencias: una que se lee de izquierda a derecha y otra que se lee en sentido contrario.

En la tabla de la actividad **a** de la página 174, la correspondencia 1, de izquierda a derecha, asocia los perímetros a las áreas, y la correspondencia 2, inversa, de derecha a izquierda, asocia las áreas a los perímetros. Ambas correspondencias también se pueden mostrar mediante pares ordenados de números y, a su vez, esos pares se pueden representar en gráficos cartesianos.

a) Elegí una de esas correspondencias y expresá con palabras qué pares de elementos se corresponden.

b) Escribilos como pares ordenados de la forma (x; y). Por ejemplo, en la figura *a* el par (x; y) sería (20;24).

> *Cuando un valor de y corresponde a un valor de x, se dice que ese valor de y es una **imagen** del valor de x.*
> *Por ejemplo, en la correspondencia 1 (en símbolos C1), los valores 20 y 28 son imágenes de 13; 20 es imagen de 24.*
> *El conjunto de las imágenes de C1 se escribe, en símbolos,* $I_{C1} = \{20, 28, 10, 8\}$

c) ¿Cuál es la imagen de 24 en la correspondencia 1?

- ¿De qué valores es imagen 4 en la correspondencia 2?

d) Escribí todos los pares de la correspondencia 2 entre los perímetros y las áreas de las figuras y respondé las preguntas.

1. ¿Cuántas imágenes tiene 8 en esa correspondencia?

2. ¿Cuántas imágenes tiene 20?

3. Representá la correspondencia 2 en un gráfico cartesiano y observá cómo se ubican los puntos que representan dos áreas correspondientes a un mismo perímetro.

Se llama ***dominio*** *de una correspondencia al conjunto de valores que toma la variable x.*
Por ejemplo: cada correspondencia de la consigna ***a*** *tiene un dominio que se puede enunciar explícitamente: el dominio de la correspondencia 1 es el conjunto formado por 4, 13, 24.*
En símbolos: $D_{C1} = \{4, 13, 24\}$

e) Escribí en símbolos el dominio de la correspondencia 2.

f) Elegí dos de las tablas que construiste el punto **a** de la actividad **1**, indicá el dominio de cada una y escribí como pares ordenados los pares de valores que se corresponden.

Como viste, existen diferentes tipos de correspondencias. En la siguiente actividad vas a usar estos dos elementos: dominio e imagen para caracterizar un tipo especial de correspondencias: las **funciones**.

A

3. ¿Qué correspondencias son funciones?

a) Copiá en tu carpeta las tablas de estas cuatro correspondencias y escribí el dominio y el conjunto de imágenes de cada una.

A	
x	y
1	4
3	6
5	8
6	9

B	
x	y
6	40
8	30
8	20
10	10

C	
x	y
6	8
7	8
8	8
9	8

D	
x	y
1	2
2	3
3	5
4	2

b) Observá las tablas en cada correspondencia y respondé: ¿hay algún elemento del dominio con más de una imagen? Si es así, decí cuál es. ¿Hay algún elemento que es imagen de varios elementos del dominio? Si lo hubiera, indicá cuál es.

c) Revisá las correspondencias 1 y 2 de la actividad anterior.

1. ¿Hay alguna en la que se puede afirmar que "a cada elemento del dominio le corresponde una única imagen"? Si es así, decí cuál es la correspondencia.

2. Si alguna de esas correspondencias no cumple la afirmación, decí en qué falla.

d) Buscá en tu carpeta las representaciones en coordenadas cartesianas de las correspondencias de la actividad 1 y observá cómo se puede reconocer en un gráfico de correspondencias cada una de las siguientes propiedades:

1. A cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen.

2. A algún elemento del dominio le corresponde más de una imagen.

e) Escribí tus observaciones y leé la siguiente definición de función.

Una correspondencia es una ***función*** *si el dominio es un conjunto formado por determinados elementos y cada elemento del dominio tiene una y solo una imagen.*

f) Hacé una lista de las correspondencias que viste en esta unidad y escribí a su lado **SÍ** o **NO**, según sean funciones o no. Justificá las respuestas.

En Matemática, las funciones que más interesan son aquellas que a cada número de un conjunto numérico le hacen corresponder otro número. Por ejemplo la función “doble de”, le hace corresponder a cada número natural otro número también natural. Las funciones numéricas pueden expresarse mediante fórmulas y esto es lo que verás en la siguiente actividad.

En la siguiente actividad vas a tener que construir polígonos. Si no te acordás cómo se hace, consultá con tu docente. Decidí con él si vas a revisar las unidades de Geometría o buscar el procedimiento en un libro de Matemática.

A

4. Funciones definidas por fórmulas

a) Recordá que un polígono es regular cuando todos sus lados y sus ángulos son congruentes. Por ejemplo, los triángulos equiláteros y los cuadrados son polígonos regulares. Dibujá en tu carpeta polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 8 lados, y luego realizá lo que indican las consignas.

1. Imaginá que cada lado de esos polígonos mide 2 cm y completá la tabla siguiente.

Número de lados del polígono	Perímetro
3	
4	
5	
6	
8	

2. Explicá con tus palabras cómo le dirías a un compañero qué cálculos tiene que hacer para averiguar el perímetro de cualquiera de estos polígonos regulares de 2 cm de lado. Escribilo en tu carpeta.

3. Expresá esas instrucciones en lenguaje simbólico mediante una fórmula. Usá la letra p para el perímetro, y n para indicar “número de lados del polígono”. Recordá que una **fórmula** es una igualdad escrita en lenguaje simbólico como una expresión de relación entre variables.

b) Completá una tabla como la siguiente para comprobar que la fórmula que escribiste en el punto anterior se verifica para cualquier polígono regular de 2 cm de lado. Revisá tus respuestas a las preguntas anteriores y, si es necesario, modificalas.

Número de lados del polígono	Perímetro en cm	Cálculos
3	6	$2 \cdot 3$
4	8	
5	10	
6		
7		
8		
10		
15		
20		
n		

1. ¿Esta correspondencia entre el perímetro de un polígono y el número de sus lados es una función? ¿Por qué?

c) Leé esta información acerca de algunas ideas sobre las que estuviste trabajando y comprobá si la fórmula se verifica para el caso anterior de los polígonos.

En esta familia de polígonos regulares de lado 2 cm podemos afirmar que el perímetro es función del número de lados. Como la cantidad de lados de una figura es un número natural mayor o igual que 3, el dominio de esta función es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 3.

Las imágenes se obtienen multiplicando los valores del dominio por 2; ellas también son números naturales.

En este caso podemos indicar esta función con una fórmula : $p = n \cdot 2 = 2\,n$

d) En el ejemplo anterior, la longitud elegida para el lado de los polígonos ha sido 2 cm; ¿qué ocurre si la medida de los lados de los polígonos es 4,5 cm?

1. Analizá la función, con dominio en el conjunto de los naturales, que relaciona el número de lados de un polígono regular con su perímetro.

2. Anotá la fórmula e indicá si sus imágenes son siempre números naturales.

3. Construí una tabla en la que aparezca, en la columna de la izquierda, el número de lados de los polígonos, y en la derecha, el perímetro, expresado en cm.

4. Representá gráficamente la función en un sistema de ejes coordenados y observá la posición de los puntos obtenidos. Escribí tu conclusión.

En la actividad final de esta unidad vas a aplicar a otros casos de correspondencias lo que estudiaste sobre las características de las funciones. Te va a servir para revisar los elementos de las funciones y la manera simbólica de representarlas, y vas a comprobar que podés identificarlas con lo que sabés sobre ellas.

A 5. Algo más sobre funciones

a) Si es posible, trabajá con uno o más compañeros, y con la ayuda de tu docente busquen ejemplos de correspondencias de proporcionalidad directa e inversa. Por ejemplo, el número de kilogramos de un producto y el precio al que se vende (manteniendo el mismo precio unitario), el número de latas de pintura que hay que comprar para cubrir una misma superficie y la cantidad de litros que tiene cada lata. También pueden encontrar numerosos ejemplos revisando las unidades anteriores. A continuación, realizá lo siguiente.

1. Escribí en tu carpeta cada una de las correspondencias que pensaste.

- Hacé tablas dando valores a la variable independiente y calculá los valores que le corresponden como imágenes.
- Determiná si son funciones o no. Justificá tus respuestas.
- En el caso en que lo sean, indicá el dominio y el conjunto imagen.
- Representá en un gráfico cartesiano cada función y explicá qué particularidades tienen esas gráficas.
- Indicá con palabras y símbolos, es decir, mediante una fórmula, las funciones encontradas.

2. La correspondencia que a cada número racional le hace corresponder su opuesto ¿es función con dominio en el conjunto de los números racionales? ¿Por qué?

3. Observá las siguientes fórmulas:

- $y = x + 1$
- $y = 2x - 1$
- $y = 4x + 4$

Cada una de estas fórmulas establece una correspondencia entre valores enteros; ¿son funciones? Si lo son, ¿cuál es el dominio? Representá las correspondencias en gráficos cartesianos.

b) Escribí tus conclusiones y compartilas con los demás compañeros.

Para finalizar

En esta unidad viste que hay correspondencias que son funciones siempre que cumplan con ciertas condiciones. Las funciones se expresan mediante fórmulas que indican la relación que hay entre las variables, según el dominio elegido. Estas funciones las encontrarás no sólo en la vida cotidiana sino también en otras ciencias como, por ejemplo, Física o Economía.

El método cartesiano que te facilitó el análisis de las variaciones entre cantidades fue ideado en el siglo XVIII por René Descartes. Sus ideas vincularon por primera vez la Geometría con fórmulas y ecuaciones, dando inicio a una época muy importante para el desarrollo de la Matemática. Desde entonces, para resolver un problema geométrico es posible analizar gráficos cartesianos y aplicar fórmulas. Si la respuesta es numérica, se la puede interpretar gráficamente, y si la solución se obtuvo a partir de un gráfico, la respuesta se puede expresar numéricamente.

Entre los problemas que se pueden resolver de este modo están los que se plantean usando este tipo especial de correspondencias que son las funciones.

Como siempre, aquí encontrarás problemas matemáticos interesantes. Esta vez, entre ellos fabricarás la famosa cinta de Moebius y harás una comprobación sorprendente, que aún sigue apasionando a matemáticos y físicos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

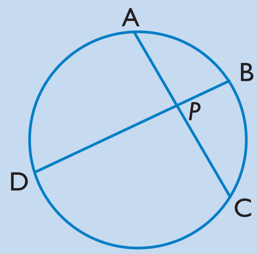
1. Proporcionalidad en la circunferencia

Si dos cuerdas de una circunferencia se interceptan en un punto *P*, el producto de los segmentos determinados en una cuerda es igual al producto de los segmentos determinados en la otra cuerda.

$PA \cdot PC = PB \cdot PD$

¿Esa afirmación es siempre cierta? Justificá tu respuesta.

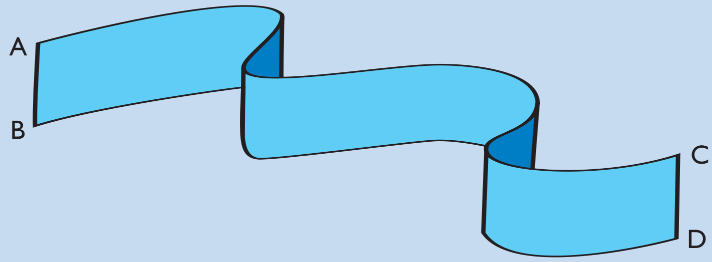
Escribí la relación en forma de proporción.



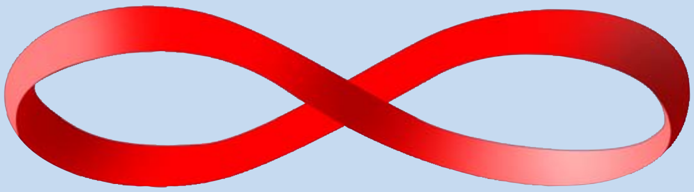
2. La cinta de Moebius

Para construir esta cinta necesitarás una tira de papel de aproximadamente 7 cm por 30 cm. Lo importante es que la cinta que elijas sea un rectángulo largo y angosto.

Pintá las caras de la cinta con dos colores diferentes. Llamá con A, B, C y D las esquinas de la cinta, como se ve en la figura.



Uní los extremos de la cinta de manera que la esquina A quede unida a la esquina D y la esquina B, a la C. Para lograr esto, antes de unir los extremos deberás darle media vuelta a la cinta.



Con un color trazá un camino que vaya por el centro de la cinta.

Una cinta común tiene claramente dos caras y dos orillas. ¿Qué pasa con la de Moebius? Recorré lentamente el borde y verás que, sin levantar el dedo, podés recorrerla toda de una sola vez. ¿Qué te sorprende? En efecto, la cinta de Moebius tiene una sola cara y una sola orilla.

Ahora recortala siguiendo el camino que dibujaste. ¿Qué ocurre? Así es, has obtenido otra parecida a la que tenías, pero más larga.

Cortá la cinta por el centro, todo a lo largo. ¿Qué crees que sucederá? ¿Obtendrás una cinta parecida pero más larga? No, lo que ocurre no es lo que esperabas.

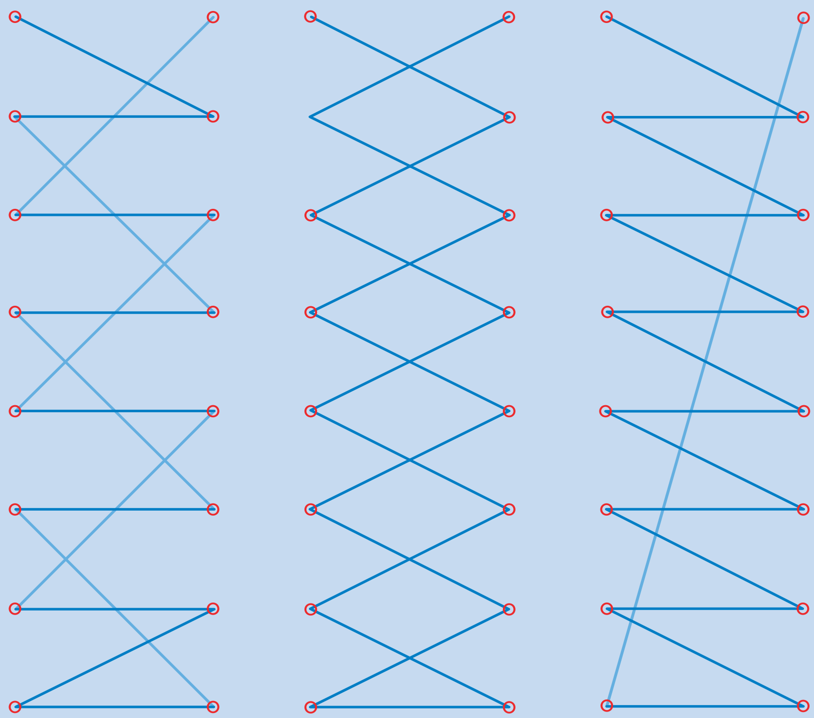
Intentalo otra vez: construí muchas cintas de Moebius y recortalas varias veces por su línea central. ¿Qué sucedió? ¿Cómo podrías explicarlo?

Un poco de historia

August Möbius o Moebius, nació en Alemania, en 1790 y murió en 1868.
En 1816 comenzó a formar parte del cuerpo de profesores de la Universidad de Leipzig y a partir de entonces se fue convirtiendo en un importante matemático. Su nombre quedó ligado a varios objetos matemáticos de distinta especie, como la cinta de Möbius y la función de Möbius. Al igual que la mayoría de los científicos de su época, no se dedicó únicamente a la investigación en Matemática. Fue miembro del observatorio de Leipzig y a él se le encargó su remodelación, que duró de 1818 a 1821.
Tuvo un profundo interés por la topología, área de la Matemática en la que fue pionero y a la que dedicó muchos años. Particularmente hizo estudios muy serios sobre las propiedades de las superficies de una sola cara, que incluyen la famosa "cinta de Möbius", descubierta por él en 1858.

3. Los cordones de los zapatos

Existen múltiples maneras de anudarse los cordones de los zapatos. Entre estas podemos diferenciar tres: la manera europea, la manera americana y la manera en que los suelen anudar en las zapaterías.



¿Sabrías decir cuál de estas requiere los cordones más largos? ¿Te atreverías a conjeturar cuál, de entre todas las maneras posibles de anudarse los cordones, es la que necesita los cordones menos largos?

UNIDAD 16 Lugar geométrico

Hasta ahora estudiaste figuras geométricas definiéndolas a partir de determinadas relaciones entre sus elementos característicos: puntos, segmentos, ángulos. Pero, ¿alguna vez se te ocurrió pensar que los puntos de una recta, de un cuarto de círculo y de la bisectriz de un ángulo tienen algo en común? La pregunta te puede parecer extraña porque se refiere a elementos muy diferentes, pero a medida que avances en el estudio de esta unidad podrás comprender un concepto matemático, el de lugar geométrico, que comprende de modo general figuras del plano que a primera vista no parecen tener nada en común.

Es probable que nunca antes hayas oído mencionar la expresión lugar geométrico como un contenido matemático escolar. Se trata de un concepto muy amplio en el que cobran nuevo significado casi todos los temas de Geometría que viste hasta ahora y, además, te va a permitir definir espacios, gráfica y simbólicamente, que de otro modo no podrían identificarse con la misma precisión.

Para estudiar lugares geométricos, en esta unidad realizarás actividades relacionadas con figuras formadas por puntos que cumplen determinadas condiciones referidas a su posición.
El lugar geométrico es un concepto cuyo significado y aplicación irás comprendiendo a través de las actividades de esta unidad. Pero como pasa con muchos conceptos generales en Matemática, es conveniente precisar a qué nos referimos. Por eso, en la primera actividad vas a encontrar la definición de lugar geométrico a partir de un ejemplo, y a continuación las actividades te van a ir guiando hacia un análisis en profundidad para entender sus características y su utilidad.

Para realizar estas actividades necesitarás útiles de Geometría, tijera, papel en blanco, piolín, algunas chinches.

A 1. El perro atado

Para definir qué es un lugar geométrico vas a pensar en una situación familiar: si en un terreno rectangular un perro está atado a una estaca con una soga de 8 m de longitud, y la pregunta es cuál es la zona del terreno por la que el perro puede corretear, indudablemente la respuesta depende del lugar en el que esté la estaca. Si se halla sobre el contorno, o en el centro del terreno, o en una esquina, quedarán determinadas distintas zonas por las que el perro se podrá mover. En este ejemplo, la condición determina para esas zonas que los puntos deben estar dentro del terreno y a una distancia de la estaca igual o menor que 8 m. Los puntos que cumplen esa condición constituyen un "lugar geométrico". La manera de definir la propiedad, en este caso, la distancia a la estaca, determina el lugar geométrico y todos los puntos que la cumplen, es decir, los que están a 8 m o menos, pertenecen a él. Para ayudarte a visualizar esta situación podés dibujarla en tu carpeta. Luego profundizarás sobre esta situación y sus posibles soluciones.

Para abordar el "problema del perro atado" realizarás algunas construcciones que te ayuden a comprender que un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano que satisfacen una propiedad determinada.

a) Trabajá en tu carpeta. Marcá sobre tu hoja un punto *O*.

1. Dibujá 4 puntos que se encuentren a 3 cm de *O* y luego respondé las preguntas.

- ¿Hay otros puntos que estén a esa misma distancia de *O*?
- ¿Podés usar el compás para marcarlos a todos? ¿Por qué?
- ¿Hay algún punto que esté a 3 cm de *O* y no pertenezca a la circunferencia que dibujaste?

Una circunferencia es el ***lugar geométrico*** *de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de otro, llamado centro. Si un punto del plano está a esa misma distancia del centro, entonces pertenece a la circunferencia. El radio de la circunferencia es la distancia de cualquiera de los puntos de la circunferencia al centro.*
Este enfoque, que define a la circunferencia como un "lugar geométrico", presta especial atención al hecho de que todos los puntos que pertenecen al lugar tienen la misma propiedad y, recíprocamente, que todo punto que tenga esa propiedad pertenece al lugar.

b) Resolvé el siguiente problema.

Si en un terreno rectangular de 20 m por 40 m se ata un perro a un poste con una soga de 8 m de largo, ¿cuál es la zona del terreno por la que el perro puede corretear?

1. Para resolverlo hacé un croquis a escala para tres posiciones diferentes en las que se puede colocar el poste, por ejemplo:

- en un vértice del terreno,
- sobre uno de los lados del terreno,
- en el centro del terreno.

2. Describí con tus palabras los lugares geométricos que determinaste en cada caso y luego compará tus croquis con los de tus compañeros.

3. Escriban entre todos un párrafo que dé cuenta de la solución del problema.

c) Copiá en tu carpeta la siguiente observación debajo del párrafo anterior.

Establecida una condición referida a distancias, se llama **lugar geométrico** a la figura cuyos puntos cumplen con la condición dada y, a la vez, si un punto cumple con la condición, ese punto pertenece al lugar geométrico.

d) Ahora que ya sabés qué es un lugar geométrico, vas a aplicar ese concepto a la definición de figuras que ya estudiaste. Los siguientes listados se refieren a lugares geométricos que ya conocés. Están desordenados. Copiá en tu carpeta cada definición completándola como corresponde e ilustrá cada una con una construcción apropiada.

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento…	…es la base media.
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno llamado centro…	…es la bisectriz.
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo…	…es la mediatriz.
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados opuestos de un rectángulo…	…es una circunferencia.

En las actividades que siguen vas a aplicar el concepto de lugar geométrico a situaciones de la vida cotidiana. Debés usar los útiles de Geometría con la mayor precisión posible.

A

2. Lugares geométricos en espacios reales

a) Teniendo en cuenta el siguiente problema, realizá lo que se indica.

Los alumnos de una escuela han decidido ubicar una planta en una maceta para observarla en el rincón de ciencias. Para que reciba suficiente luz, la pueden colocar hasta a 2 m de distancia de la ventana. El siguiente es el plano del aula:

Escala: 1,5 cm = 1 m

1. Copiá el dibujo en tu carpeta y resolvé el problema gráficamente.

2. Sombreá la zona en la que los chicos pueden colocar la planta.

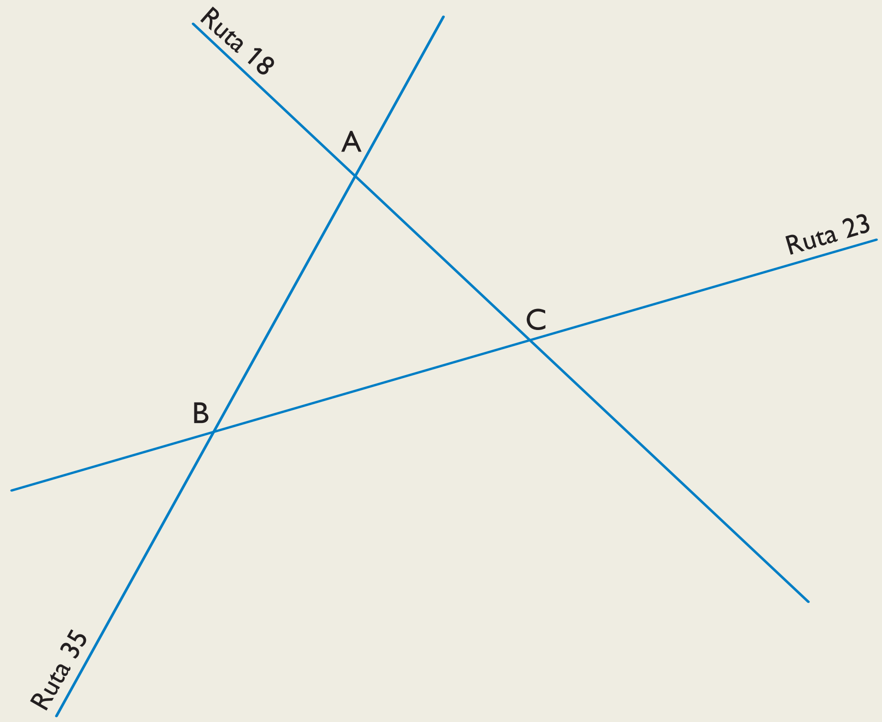
3. Dibujala con la mayor precisión posible.

4. Describí el lugar geométrico que queda determinado.

Matematica 8-unidad16-4as 17/7/08 11:42 Página 188

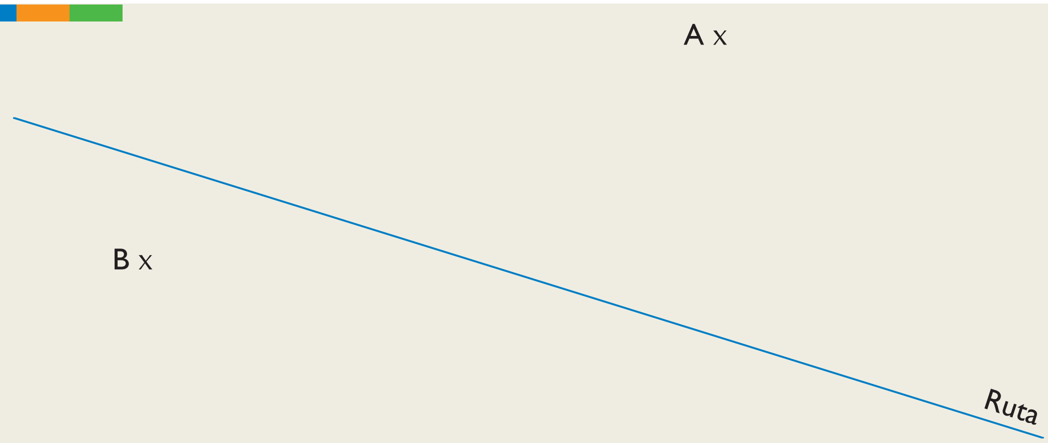
b) Buscá la solución para el siguiente problema.

¿Dónde debe colocarse una antena para que esté a la misma distancia de las rutas provinciales 23, 35 y 18, que unen los tres pueblos A, B y C representados en el esquema?



- Copiá el dibujo en tu carpeta y resolvé el problema gráficamente. Dibujá con la mayor precisión posible.
- Explicá detalladamente cómo resolviste el problema y describí el lugar geométrico que quedó determinado.

c) ¿En qué punto de una ruta hay que ubicar una estación de servicio de modo que se encuentre a la misma distancia de los pueblos A y B?



1. Copiá el dibujo en tu carpeta y resolvelo gráficamente. Dibujá con precisión.

2. Explicá en detalle cómo resolviste el problema y describí el lugar geométrico que quedó determinado.

A

3. Otros problemas con lugares geométricos

a) Resolvé la siguiente situación.

Juan está dibujando un plano en un papel rectangular de 12 cm de largo por 8 cm de ancho. A cada vértice le puso un nombre, A, B, C y D. Juan dibujó el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de AD que de BC. Luego, dibujó el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de AB que de AD.

1. Dibujá el rectángulo, con una escala adecuada.

2. Mostrá los dibujos que hizo Juan. Describí los lugares geométricos que determinó con sus dibujos.

3. Indicá con color, claramente, el punto *P* del rectángulo ABCD que equidista de los lados AB, AD y BC y respondé:

- El punto *P* ¿equidista de todos los vértices del rectángulo? ¿Por qué?

4. Medí AP y escribí su medida aproximada al milímetro. Comparala con la mitad de una diagonal de ABCD.

5. El punto de intersección de las diagonales ¿a qué lugares geométricos pertenece?

b) Dibujá un rectángulo ABCD, de 8 cm · 12 cm.

1. Marcá el lugar geométrico de los puntos que están a 5 cm del punto D.

2. Señalá el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia del lado AB que del lado DC.

3. Sombreá el lugar geométrico que contiene los puntos que están a más de 5 cm de D y más cerca de DC que de AB.

4. Nombrá un punto del rectángulo que no pertenezca a ese lugar geométrico y explicá por qué no posee la propiedad característica de ese lugar.

c) Trazá una circunferencia y luego un segmento tangente a la circunferencia de modo que su punto medio sea el punto de tangencia.

1. Hallá el lugar geométrico de los extremos de los segmentos que cumplen la misma condición de tangencia y tienen igual longitud que el segmento que dibujaste.

2. Explicá paso a paso cómo resolviste el problema y describí el lugar geométrico que quedó determinado.

A través de las actividades que realizaste pudiste vincular muchos conocimientos de Geometría que ya poseías con problemas que se presentan en la vida real y con otros nuevos problemas geométricos. Ahora leé la sección "Para finalizar" para estar seguro de haber comprendido todos los conceptos.

Para finalizar

En esta unidad aprendiste que un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano que satisfacen una propiedad determinada. Por lo tanto, si *L* es un lugar geométrico definido por la propiedad *P*, se verifica que:

- **Todo punto de *L* posee la propiedad *P*.**
- **Todo punto que posee la propiedad *P* pertenece a *L*.**

La segunda condición se puede sustituir por otra expresión equivalente:

- **Todo punto que no pertenece a *L* no posee la propiedad *P*.**

Establecida una propiedad y para determinar cuál es el lugar geométrico, esto es, cuál es el conjunto de puntos que satisface esa propiedad, juega un rol muy importante la construcción con útiles de Geometría. Para solucionar problemas referidos a lugares geométricos, tené presente siempre realizar la tarea con la siguiente secuencia:

1. **Comprender bien la condición que se debe satisfacer.**
2. **Trazar cuatro o cinco puntos que satisfacen esa condición.**
3. **Predecir la figura geométrica cuyos puntos satisfacen la condición.**
4. **Constatar si esa predicción es verdadera o no.**
5. **Restringir, si fuera necesario, la figura encontrada a las condiciones del problema; por ejemplo, limitar la recta a un segmento o la circunferencia, a un arco.**

La aplicación de esta secuencia te habrá permitido encontrar, por ejemplo, que el lugar geométrico de los extremos de los segmentos de igual longitud que son tangentes a una circunferencia es otra circunferencia exterior que tiene el mismo centro.

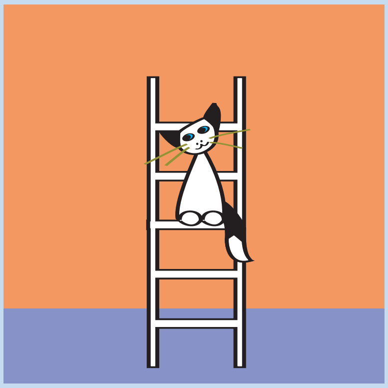
Con esta unidad termina tu trabajo con los temas del Cuaderno de estudio 2; muchos de ellos se retomarán en el Cuaderno de estudio 3 para que, sobre la base de lo que ya sabés, puedas ampliar tus conocimientos de Matemática y así comprender y explicar mejor el mundo que te rodea, encontrar soluciones a problemas prácticos que tengas que resolver y mejorar tu capacidad para comunicar situaciones en lenguaje simbólico.

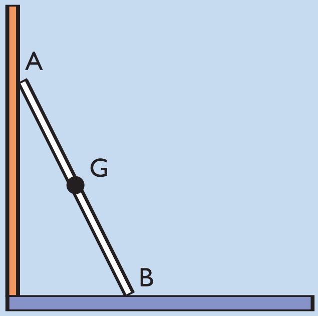
A continuación, podrás resolver los últimos desafíos de este año. Volverás sobre lugares geométricos y también encontrarás juegos con números y letras.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El gato

Una escalera está situada sobre el piso, apoyada en la pared y se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve el gato sentado en el centro de la escalera?
El esquema muestra los apoyos A en la pared, B en el suelo y la posición G del gato. El desafío consiste en encontrar la trayectoria del gato.





2. Triángulos

Considerá un segmento *AB* de 4,5 cm. Dibujá un punto *R* tal que el triángulo *ARB* tenga área 9 cm^2; ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que cumplen con esa condición?

3. Un juego con números

Este es un juego para jugar con un amigo. Cada uno escribirá en un papel, sin que el otro lo vea, un número de 4 cifras diferentes (del 0 al 9) en cualquier orden. El objetivo del juego es descubrir el número que escribió el otro. El jugador que empieza intenta adivinar y dice, o escribe, un número de 4 cifras. Si acierta alguna de las cifras en el lugar en que está, el oponente le contesta “1 (2, 3 o 4) bien”; si alguna cifra está, pero en otra posición, le dirá “1(2, 3 o 4) regular”. Si no hubiera acertado ningún número, le dirá “todos mal”. Los jugadores siguen escribiendo, a su turno, números de 4 cifras hasta que alguno tenga “todos bien”.

El juego termina cuando uno de los dos acierta el número del otro, pero tengan en cuenta que si acierta el que empezó primero, el segundo tiene todavía un turno y puede empatar.