

Versión
actualizada
y revisada

Este proyecto
cuenta con el
apoyo del

inet

Instituto Nacional de
Educación Tecnológica

DIANA DINES – LILIANA TOMASZEWSKI



MATEMÁTICA

PARA COMPRENDER Y APLICAR



Kapelusz

Cesarini Hnos Editores

Director editorial

Oswaldo Cesarini

Diseño de interior y diagramación

Silvia Ojeda

Corrección y producción editorial

Micaela Calderaro
María José Cesarini

Kapelusz Editora

Directora editorial

Celeste Salerno

Jefa de arte y gestión editorial

Valeria Bisutti

Jefa editorial

María José Lucero Belgrano

Responsable del departamento de matemática

Yanina Sousa

Diseño de tapa

Jimena Ara Contreras

Corrección de estilo

Santiago Luchilo

Gerenta de producción

Paula García

Jefe de producción

Elías Fortunato

© KAPELUSZ EDITORA S. A., 2019

Av. Leandro N. Alem 720 (C1001AAR)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Internet: www.editorialkapelusz.com

Teléfono: (54-11) 2152-5100

Obra registrada en la Dirección Nacional del Derecho de Autor.

Hecho el depósito que marca la Ley N.º 11.723.

Libro de edición argentina.

Impreso en la Argentina.

Printed in Argentina.

ISBN: 978-950-13-1487-8

© Cesarini Hnos. Editores, 2019

Domingo Faustino Sarmiento 3213, 1º A (C1196AAI)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

Teléfono: (54-11) 4861-1152 / 4863 / 8753

Email: cesarinihnoseditores@gmail.com

Dines, Diana

Matemática : para comprender y aplicar 1 : versión actualizada / Diana Dines ; Liliana Tomaszewski. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Kapelusz ; Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Cesarini Hnos. Editores, 2019.
208 p. ; 28 x 22 cm.

ISBN 978-950-13-1487-8

1. Matemática. I. Tomaszewski, Liliana. II. Título.
CDD 510.712

Agradecemos todo el apoyo y la colaboración del **Instituto Nacional de Educación Tecnológica - INET**. En especial a **Judit Schneider**, Responsable de Formación Docente Inicial y Continua. **Alejandro Anchava**, Coordinador de Secundaria Técnica. **Cristina Arceo**, Coordinadora de la Actualización en Matemática en la Escuela Técnica de *En FoCo*, programa de formación docente continua.

Primera edición.

Esta obra se terminó de imprimir en noviembre de 2019 en los talleres de Arcángel Maggio - División Libros, Lafayette 1695, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.

Ø PROHIBIDA LA FOTOCOPIA (Ley N.º 11.723). El editor se reserva todos los derechos sobre esta obra, la que no puede reproducirse total o parcialmente por ningún método gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo el de fotocopiado, el de registro magnetofónico o el de almacenamiento de datos, sin su expreso consentimiento.

Índice

Capítulo 1 Conjunto de números naturales	5
Operaciones con números naturales	5
Supresión de paréntesis, corchetes y llaves	9
Ecuaciones	13
Multiplicación de números naturales.....	16
División de números naturales	19
Ecuaciones con multiplicación y división	23
Potenciación de números naturales	32
Radicación de números naturales	37
Ecuaciones con potenciación y radicación	40
Divisibilidad de números naturales	44
Números primos	45
Números compuestos	45
Factorización de números naturales	46
Divisor Común Mayor (D.C.M.).....	47
Múltiplo común menor (m.c.m)	49
Diccionario matemático	54
Capítulo 2 Números fraccionarios racionales	55
Fracciones equivalentes	57
Comparación de fracciones	59
Representación en la recta numérica	61
Operaciones con números fraccionarios	62
Números decimales	76
Operaciones con números decimales	80
Porcentaje	87
Capítulo 3 Elementos de geometría	91
Semirrecta	92
Segmento	93
Posiciones relativas de dos rectas	93
Ángulos	94
Clasificación de ángulos	95
Sistema de mediciones de ángulos	97
Operaciones	97
Bisectriz de un ángulo	101
Clasificación de ángulos según su posición	101
Capítulo 4 Proporcionalidad	111
Razón	111
Proporción	111
Propiedad fundamental de las proporciones	112
Proporcionalidad simple directa (P.D.)	114

Proporcionalidad simple inversa (P.I.)	114
Aplicaciones	115
Aplicación en porcentaje	116
Capítulo 5 SIMELA	119
Medidas de longitud	120
Medidas de masa	122
Medidas de capacidad	124
Medidas de superficie	125
Medidas agrarias	126
Medidas de volumen	128
Equivalencias	129
Sistema inglés de medida	130
Capítulo 6 Figuras geométricas	133
Polígonos	133
Polígonos regulares	133
Triángulo	134
Cuadriláteros convexos	138
Circunferencia	139
Círculo	140
Capítulo 7 Cuerpos	151
Cuerpos geométricos	151
Cubo	153
Prisma de base cuadrada	153
Prisma de base rectangular	154
Prisma de base pentagonal	154
Pirámide de base cuadrada	155
Cilindro	156
Cono	156
Esfera	157
Capítulo 8 Construcciones geométricas	165
Construcción de una recta perpendicular a otra	165
Mediatriz de un segmento	165
Rectas paralelas	166
Construcción de un ángulo	167
Trazado de la bisectriz	167
Construcción de un hexágono regular	168
Construcción de triángulos	169
Construcción de paralelogramos	171
Capítulo 9 Combinatoria	179
Combinatoria	179
Nociones de estadística	183
Capítulo 10 Números enteros	187
Valor absoluto o módulo	187
Operaciones con números enteros	191

Conjunto de números naturales

- ▮ Operaciones con números naturales
- ▮ Supresión de paréntesis, corchetes y llaves
- ▮ Ecuaciones
- ▮ Multiplicación de números naturales
- ▮ División de números naturales
- ▮ Ecuaciones con multiplicación y división
- ▮ Potenciación de números naturales
- ▮ Radicación de números naturales
- ▮ Ecuaciones con potencia y radicación
- ▮ Divisibilidad de números naturales
- ▮ Números primos
- ▮ Números compuestos
- ▮ Factorización de números naturales
- ▮ Divisor Común Mayor (D.C.M)
- ▮ Múltiplo común menor (m.c.m.)
- ▮ Diccionario matemático

Los números naturales son los primeros números que se conocieron y se utilizan para contar. El primer elemento es el uno.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$


Si al conjunto de números naturales, le agregamos el cero, obtenemos un nuevo conjunto, Naturales con el cero.

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$


- Es un conjunto infinito.
- Tiene primer elemento.
- Todo número tiene siguiente o consecutivo.
- Entre dos números consecutivos no existe otro número natural.
- Es un conjunto ordenado.
- En lo sucesivo, cuando hablemos de números naturales estamos considerando naturales con el cero (N_0)

Operaciones con números naturales

Adición

El resultado de la adición se denomina suma.

$$a + b + c = s$$

Cada uno de los términos que forman la adición se denomina sumando.

La suma de dos números naturales es un número natural.

El orden de los sumandos no altera la suma: $a + b = b + a$.

Esta propiedad se denomina *propiedad conmutativa*.

La suma no depende de la forma en que se agrupen los sumandos:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Esta propiedad se denomina *propiedad asociativa*.

Si a todo número natural se le suma el cero, a la derecha o a la izquierda, el resultado es el mismo número: $0 + a = a + 0 = a$.

Esta propiedad se denomina *propiedad del elemento neutro*.

Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Esta propiedad se denomina *propiedad cancelativa*.

1 Nombrar en cada caso la propiedad aplicada.

a) $3 + 5 + 9 = 9 + 5 + 3$

b) $6 + (9 + 2) = (6 + 9) + 2$

c) $7 + 4 + 0 = 0 + 7 + 4$

2 Si $a + b = 5$ y $a + d = 7$, calcular y justificar indicando qué propiedad fue aplicada.

a) $b + 4 + a =$

b) $(3 + d) + (a + 1) =$

c) $a + (b + d + a) =$

d) $(a + d) + a + (d + b) + a =$

e) $(b + 3 + d) + (2 + a) + (a + 1) =$

f) $(d + a + 1) + (b + d) + (a + 3) + (1 + a) =$

Sustracción

$$9 - 5 = 4$$

¿Qué número hay que sumarle a 5 para que dé 9?
4 es la diferencia entre 9 y 5.

$$m - s = d$$

m: minuendo s: sustraendo d: diferencia

La diferencia entre dos números es el número que hay que sumarle al sustraendo para obtener el minuendo.

Conclusión:

a) Toda suma origina al menos dos diferencias.

$$a + b = c \begin{cases} a = c - b \\ b = c - a \end{cases}$$

$$7 + 3 = 10 \begin{cases} 7 = 10 - 3 \\ 3 = 10 - 7 \end{cases}$$

b) Si el minuendo es igual al sustraendo, la diferencia es igual a cero: $m - m = 0$.

c) Para que la diferencia entre dos números sea un número natural, el minuendo tiene que ser mayor al sustraendo.

La sustracción no cumple con la propiedad conmutativa: $7 - 3 \neq 3 - 7$.

La sustracción no cumple con la propiedad asociativa: $(7 - 3) - 2 \neq 7 - (3 - 2)$.

3 Operar por columna y colocar $<$, $>$, o $=$ según corresponda.

a) $10 \square 10$
 $+ 7 \square + 3$
 $2 \square 1$

 $\dots \square \dots$

c) $8 \square 3$
 $+ 2 \square + 1$
 $3 \square 0$

 $\dots \square \dots$

e) $9 \square 4$
 $+ 5 \square + 10$
 $2 \square 2$

 $\dots \square \dots$

g) $10 \square 6$
 $- 3 \square - 4$

 $\dots \square \dots$

b) $12 \square 14$
 $+ 3 \square + 3$
 $6 \square 10$

 $\dots \square \dots$

d) $3 \square 3$
 $+ 10 \square + 5$
 $1 \square 9$

 $\dots \square \dots$

f) $6 \square 8$
 $+ 4 \square + 1$

 $\dots \square \dots$

h) $12 \square 10$
 $- 3 \square - 3$

 $\dots \square \dots$

i)	$10 \square - 4$	j)	$10 \square - 9$	k)	$10 \square - 10$	l)	$10 \square - 9$
	$- 6 \square - 3$		$- 7 \square - 1$		$- 4 \square - 7$		$- 6 \square - 5$
	$\hline \square \dots$						

Suma algebraica

Es una sucesión de sumas y restas

$$9 + 3 - 7 + 5 - 2 + 8 =$$

Cualquier suma algebraica puede resolverse sumando los términos que figuran sumando, y restándoles la suma de los términos que figuran restando.

$$(9 + 3 + 5 + 8) - (7 + 2) = 25 - 9 = 16$$

NOTA: Hay que tener presente que si en una suma algebraica se tiene el mismo número con signos opuestos dichos términos pueden cancelarse.

$$9 + 4 - 4 + 6 = 9 + 6 \text{ pues } 4 - 4 = 0. \text{ entonces } 9 + 0 + 6 = 9 + 6$$

4 Resolver las siguientes sumas algebraicas usando las reglas prácticas vistas:

a) $180 - 20 + 135 - 200 - 15 =$

f) $21 - 3 - 7 + 20 + 9 - 10 + 15 - 25 + 10 =$

b) $45 + 15 - 31 - 1 + 8 =$

g) $18 - 9 + 7 + 9 - 5 - 6 =$

c) $348 + 25 - 22 - 15 + 9 - 3 =$

h) $8 + 15 - 8 + 5 - 6 + 3 - 2 =$

d) $145 - 30 + 48 - 31 + 5 - 3 - 9 + 120 =$

i) $8 + 7 - 4 - 1 + 32 + 5 - 12 =$

e) $81 - 9 + 48 + 9 - 32 - 31 + 2 - 4 =$

j) $7 - 17 + 1 + 3 + 10 + 17 - 9 + 11 =$

Supresión de paréntesis, corchetes y llaves

Hay sumas algebraicas que se presentan con signos de agrupación, ellos son los paréntesis, corchetes y llaves, estos signos indican en qué orden deben resolverse las operaciones que encierran. Primero se deben resolver las operaciones que están encerradas entre paréntesis, luego las que están entre corchetes y por último las operaciones encerradas entre llaves.

$$107 - \{32 + [15 - 9 + (24 - 10) - (35 - 20)]\} - [6 + (19 - 5)] =$$

Cuando dichas operaciones son la adición y la sustracción, conviene eliminar o suprimir los corchetes y los paréntesis, así queda una suma algebraica.

Se tiene que tener en cuenta lo siguiente:

- 1) Todo paréntesis, corchete y llave precedidos por el signo + pueden eliminarse manteniéndose los signos de los términos que encierran. Se conservan las operaciones de los términos encerrados en ellos.
- 2) Todo paréntesis, corchete y llave precedidos por el signo - pueden eliminarse cambiando de signos los términos que encierran. Se invierten las operaciones de suma y resta encerradas en ellos.
- 3) Primero se suprimen los paréntesis, en segundo lugar los corchetes y por último las llaves y luego se resuelve la suma algebraica.

$$\begin{aligned} 107 - \{32 + [15 - 9 + (24 - 10) - (35 - 20)]\} - [6 + (19 - 5)] &= \\ 107 - \{32 + [15 - 9 + 24 - 10 - 35 + 20]\} - [6 + 19 - 5] &= \\ 107 - \{32 + 15 - 9 + 24 - 10 - 35 + 20\} - 6 - 19 + 5 &= \\ 107 - 32 - 15 + 9 - 24 + 10 + 35 - 20 - 6 - 19 + 5 &= \\ (107 + 9 + 10 + 35 + 5) - (32 + 15 + 24 + 20 + 6 + 19) &= \\ 166 - 116 &= 50 \end{aligned}$$

5 Suprimir paréntesis, corchetes y llaves y luego resolver la suma algebraica.

a) $107 - \{32 + [15 - 9 + (24 - 10) - (35 - 20)]\} - [6 + (19 - 5)] =$

b) $3 + \{16 + 15 - [9 + (12 - 5) - (2 + 3)] + 8\} - (42 - 15) + (2 + 4) =$

c) $12 + 36 - 21 + 7 + [56 - (97 - 54)] - \{21 + [12 - (7 + 3)]\} =$

d) $\{31 + [27 - (16 + 41 - 50)] + (19 + 7 - 16)\} + [247 - (97 + 31)] =$

e) $\{21 + [39 - 27 - (4 + 16 - 12)]\} - [34 - (72 - 4)] =$

f) $891 - \{428 + [126 - (94 - 12) + 197 + (194 + 96)]\} =$

g) $15 - \{2 - [9 + (5 - 1) - (2 + 8 - 9) + 6] - 7\} =$

h) $26 + \{5 - [1 - (4 - 2) + 7] + (6 - 1 + 3)\} + 4 =$

i) $9 + 6 - \{4 - 1 + 9 - [1 + 2 + (5 - 3) - 1] - 3\} =$

j) $(15 - 3) - \{2 - [5 - (8 - 7 + 1) + 6 - 2] + 4\} =$

k) $\{26 + [54 - (9 + 7)] - [32 - (26 - 11)] + 3\} - (19 + 6) =$

l) $(12 - 6 - 3) - \{-[-8 + (5 - 2) + 3]\} =$

m) $\{63 - [24 + (18 - 13) - 4] + 3\} + [47 - (54 - 11)] =$

$$\mathbf{n)} \{16 + [9 - (15 - 10)]\} - \{18 - [12 - (6 + 3)]\} =$$

$$\mathbf{ñ)} \{15 + [16 - (25 - 19) + 4] - 18\} - [45 - (57 - 14)] =$$

$$\mathbf{o)} [26 + 32 - (15 + 14 + 13)] - \{9 + [15 - (7 + 5)]\} =$$

$$\mathbf{p)} -(15 - 43) - \{+ [-1 + (2 + 5) - 6] + 2\} =$$

$$\mathbf{q)} 1 - \{5 + [-15 - (9 + 3) + 1]\} =$$

$$\mathbf{r)} 47 + [38 - (6 + 27)] + \{5 + [4 - (3 + 1)]\} - [54 - (17 + 5)] =$$

$$\mathbf{s)} \{16 + [34 - (6 + 3)] - [41 - (15 - 12)] + 5\} - (20 + 5) =$$

$$\mathbf{t)} 195 + \{8 - [3 + 18 - (1 + 7 - 4)]\} =$$

6 Se sabe que $m - n = 19$ y $t = 2m$. Calcular y justificar.

a) $m - n - 3 =$

c) $m - (n - 2) =$

e) $m - 8 - n =$

b) $m - (n + 3) =$

d) $t - m - (n + 1) =$

7 Resolver los siguientes problemas.

- a) Un carpintero que tiene 250 tablas en su taller utiliza 142 para hacer un piso y 75 para construir un tabique. Compra 872 tablas, de las cuales sólo le dan 740. Utiliza 657; luego recibe el resto de las que compró más 121. ¿Cuántas utilizó para cercar un corral si le quedaron 77 tablas?
- b) El cajero de un negocio recibe \$420, paga \$450; luego recibe sucesivamente \$250; \$855; \$418; \$2606, y debe pagar a distintos proveedores \$560; \$297; \$2750. Si al comenzar el día ya había \$50 en la caja. ¿Cuánto habrá después de estas operaciones?
- c) En una habitación, el techo está a 375 cm. del piso. Una araña está colgada a 45 cm. del techo. ¿Cuánto hay que alargar la cadena de la araña para que quede a 250 cm del piso?
- d) Un corralón de materiales vende una maceta a \$450, una pala a \$60 más que la maceta, un pico que cuesta tanto como la maceta y la pala, una mezcladora que cuesta \$85 más que la pala y dos bolsas de cemento que salen como la maceta y la mezcladora.
- 1) ¿Cuál es el precio de venta de cada artículo vendido?
 - 2) ¿Cuánto recibió el corralón por las ventas?
 - 3) Si se paga con \$1500 le dan vuelto o le falta dinero. ¿Cuánto?
- e) Alumnos de una escuela técnica van a una ferretería y realizan las siguientes compras: 20 jóvenes compran rosca corriente, 26 jóvenes compran roscas finas, y 12 compran roscas de gas. Hay 14 jóvenes que compran roscas corrientes y finas, 8 compran roscas finas y de gas, 5 compran roscas corrientes y de gas y por último 3 jóvenes compran las roscas de las tres clases.
- 1) ¿Qué cantidad de jóvenes compran roscas corrientes y no roscas finas?
 - 2) Calcular el número de jóvenes que compran una sola clase de roscas.
 - 3) Calcular el número total de alumnos que concurrieron a la ferretería.
- f) Los estudiantes de enseñanza técnica concurren a tres secciones: 30 toman clases de tornería, 20 de carpintería y 20 toman clases de electricidad. También se sabe que 14 alumnos toman clases de carpintería y de electricidad, 8 van a carpintería y tornería, 6 van a electricidad y tornería y 2 alumnos concurren a las tres secciones.
- 1) ¿Qué cantidad de alumnos hay en total?
 - 2) ¿Qué cantidad de alumnos van sólo a una sección?
 - 3) ¿Cuántos alumnos toman clases en dos secciones?

- g)** Watt inventó la primera máquina a vapor completa en 1784 y Davy obtuvo la luz eléctrica en 1801. ¿Cuántos años pasaron entre los dos acontecimientos?
- h)** Un padre tenía 30 años cuando nació su hijo. ¿Cuál será la edad del hijo cuando el padre tenga 53 años?
- i)** Con los números del 1 al 9, formar una cruz de manera que el brazo horizontal y el vertical sumen lo mismo, sin repetir los números.
- j)** ¿Qué número se debe sumar a 27 para obtener 27 como resultado?

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad con una o más incógnita. En este capítulo nosotros trabajaremos con ecuaciones con una sola incógnita.

Resolver una ecuación significa calcular el valor de la incógnita que verifica la igualdad. La incógnita se representa con una letra.

$x + 2 = 6$, el resultado de sumar 2 a un determinado número es 6.

$7 = x - 3$, 7 es el resultado de restarle 3 a un determinado número.

$1 + x = 9$, 1 más un determinado número da por resultado 9.

$16 = 7 + x$, 16 es el resultado de sumarle a 7 un determinado número.

$11 = 13 - x$, 11 es el resultado de restarle a 13 un determinado número.

¿Cómo se resuelve una ecuación?

$$x + 2 = 6$$

Se debe despejar la incógnita de modo que siempre quede precedida por el signo +.

$$a + b = c \begin{cases} a = c - b \\ b = c - a \end{cases}$$

Teniendo en cuenta una de las diferencias que genera la suma.

a) $x + 2 = 6$

$x = 6 - 2$ (el 2 que está sumando en el primer miembro pasa restando al segundo miembro)

$x = 4$

b) $7 = x - 3$

$x = 7 + 3$

$x = 10$ (el 3 que está restando en el segundo miembro pasa al otro miembro sumando)

Todo número que está sumando en un miembro de una igualdad pasa al otro miembro restando.
 Todo número que está restando en un miembro de una igualdad pasa al otro miembro sumando.

$$+ \longleftrightarrow -$$

c) $11 = 13 - x$ ¿Qué suma originó esta diferencia?

$$11 + x = 13$$

$$x = 13 - 11$$

$$x = 2$$

Si la x está precedida con el signo ($-$) pasa al otro miembro con el signo ($+$) para buscar la suma que la genera.

8 Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x - 13 = 32$

f) $9 - x - 5 = 2$

k) $13 - x = 9$

b) $45 - x = 12$

g) $x + 79 - 51 = 48$

l) $21 - (12 - x) = 20$

c) $40 = x - 8$

h) $45 - x = 2$

m) $x + 76 - 13 = 178$

d) $12 + x - 3 = 14$

i) $18 - x = 7$

n) $13 - x = 8$

e) $(13 - 4) + x = 16$

j) $x - 131 = 32$

ñ) $18 = 80 - x$

o) $x - 3 = 25$

t) $9 + x - 5 + 7 = 70$

y) $13 - (4 - x) = 16$

p) $120 = 150 - x$

u) $12 + x - 3 - 2 = 10$

z) $9 - (x - 5) = 2$

q) $2 + (x - 2) = 5$

v) $40 - 25 + x = 20$

aa) $(x + 5) - 6 = 17$

r) $14 - x = 9$

w) $35 - 10 + x = 30$

ab) $12 - (3 - x) = 20$

s) $12 - x = 2$

x) $12 + (x - 3) = 14$

ac) $12 - (x + 4) = 5$

9

Plantear la ecuación y resolver las siguientes situaciones problemáticas.

- a)** ¿Cuál es el número que supera en 728 unidades a 2343?
- b)** ¿En qué año falleció una persona que murió a los 78 años si nació en 1858?
- c)** Dos hermanas tienen 15 y 18 años respectivamente. ¿Cuánto tendrán dentro de 23 años y cuál será la suma de sus edades?
- d)** Un comercio vendió \$153800 más que el mes pasado, en el cual vendió \$732950. ¿Cuánto vendió en total en ambos meses?

Multiplicación de números naturales

La multiplicación es la forma abreviada de una adición de términos iguales.

$$\begin{aligned} 8 + 8 + 8 &= 8 \cdot 3 \\ 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 &= 3 \cdot 8 \end{aligned}$$

En el primer caso el 8 se repite tres veces, en el segundo el 3 se repite ocho veces. El 3 y el 8 se denominan factores y el resultado 24 se denomina producto.

$$a \cdot b = p$$

a y b son los factores de la multiplicación y p , el resultado llamado producto.

Propiedades de la multiplicación

I) Todo número multiplicado por cero es igual a cero: $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ (el cero es el elemento absorbente de la multiplicación).

II) Todo número multiplicado por uno es el mismo número: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ (el 1 es el elemento neutro de la multiplicación).

III) El orden de los factores no altera el producto, propiedad conmutativa.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 8 &= 8 \cdot 3 \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

IV) El producto no depende de la forma en que se asocian los factores, propiedad asociativa.

$$\begin{aligned} (5 \cdot 2) \cdot 3 &= 5 \cdot (2 \cdot 3) \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \end{aligned}$$

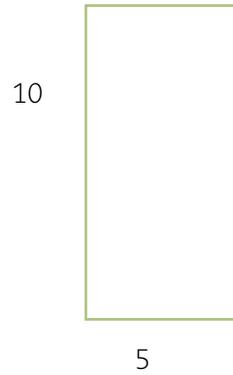
V) La multiplicación es distributiva con la adición y sustracción tanto a la derecha como a la izquierda, propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (b + c) \cdot a \longleftrightarrow a \cdot b + a \cdot c = b \cdot a + c \cdot a \\ a \cdot (b - c) &= (b - c) \cdot a \longleftrightarrow a \cdot b - a \cdot c = b \cdot a - c \cdot a \\ (7 + 8 - 5) \cdot 4 &= 7 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \\ 10 \cdot 4 &= 28 + 32 - 20 \\ 40 &= 40 \end{aligned}$$

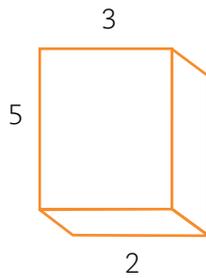
VI) Factor común es la propiedad simétrica de la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 21 + 15 - 18 &= \\ 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 6 &= 3 \cdot (7 + 5 - 6) = \\ a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d &= a \cdot (b + c - d) \\ m \cdot a - n \cdot a + c \cdot a &= (m - n + c) \cdot a \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de la multiplicación



$10 \cdot 5 = 50$ representa el área que encierra el rectángulo.



$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ representa el volumen que encierra el cuerpo.

10 Aplicar la propiedad que se indica en cada caso

a) (asociativa y conmutativa) $9 \cdot 5 \cdot 20 =$

c) (factor común) $25 - 15 + 40 - 55 =$

b) (distributiva) $8 \cdot (5 + 9 - 3) =$

d) (distributiva) $(100 - 50 + 40) \cdot 3 =$

11 Nombrar las propiedades que se aplicaron en cada caso.

a) $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$

c) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

b) $a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b$

d) $m \cdot 1 = m$

e) $0 \cdot x = 0$

f) $p \cdot k - f \cdot k + b \cdot k = k \cdot (p - f + b)$

12 $m \cdot n = 13$ y $p = 5$ Calcular y justificar.

a) $m \cdot (n \cdot p) =$

e) $n \cdot (2 \cdot m + m \cdot p) =$

b) $n \cdot (4 \cdot m \cdot p) =$

f) $2 m \cdot n \cdot (p + 1) =$

c) $n \cdot (3 \cdot p \cdot m) + 4 =$

g) $p - m \cdot n \cdot (m \cdot n - 1) =$

d) $4 \cdot m \cdot n + 8 \cdot p =$

13 Expresar como una multiplicación, es decir, sacar factor común.

a) $5mn - 2xn + mxn =$

c) $26xy + 13ym - 39y =$

b) $6bc - 9ab + 3b =$

d) $4abc - 5bya + 7abz =$

14 Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) Se venden 16 docenas de huevos a \$24 cada una. ¿Cuánto se abonó? ¿Cuál es el importe por una decena de huevos?

b) Un comerciante compra 5 piezas de tela de 20 metros cada una, a razón de \$15 el metro. ¿Cuánto tiene que abonar?

- c) Un automóvil recorre 85 km cada hora. ¿Cuántos km recorrerá en 9 h?
- d) En un depósito de una ferretería hay 1750 cajas de roscas, cada caja contiene 12 roscas. El precio de compra de cada rosca es de \$3, y el de venta al público, justo el doble. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene si se venden todas?
- e) Un grupo de 15 varones y 13 chicas van juntos a bailar. Los días de semana, la entrada cuesta \$200. Los sábados, los varones pagan \$300 y las chicas \$200. ¿Cuánto gastan si van todos a bailar el viernes y el sábado?

División de números naturales

Se llama cociente o división entre dos números naturales a y b , al número natural c que multiplicado por b da por resultado a :

$$a : b = c \leftrightarrow c \cdot b = a$$

La división entre números naturales no siempre resulta un número natural, por lo tanto, puede no estar definida en el conjunto de los números naturales.

En $a : b = c$, a es el dividendo, b es el divisor y c es el cociente.

Condición: El divisor tiene que ser distinto de cero.

$$0 : d = 0 \text{ porque } 0 = d \cdot 0.$$

$d : 0 =$ no tiene solución, porque no hay ningún número que multiplicado por 0 sea igual a d salvo el cero.

$$0 : 0 = \text{infinitas soluciones, porque todo número multiplicado por 0 es igual a 0.}$$

Propiedades de la división

- I) No cumple con la propiedad conmutativa: $36 : 9 \neq 9 : 36$
- II) No cumple con la propiedad asociativa: $(48 : 6) : 3 \neq 48 : (6 : 3)$
- III) La división es distributiva a derecha de la suma o resta:

$$(18 - 9 + 36) : 9 = 18 : 9 - 9 : 9 + 36 : 9$$

$$45 : 9 = 2 - 1 + 4$$

$$5 = 5$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

15 Colocar el signo = o ≠ según corresponda.

a) $(4 + 6) : 5$ $40 : 4 - 8$

e) $(32 - 16) : 8$ $32 : 8 - 16 : 8$

b) $100 : 20$ $90 : 30$

f) $24 : (6 + 2)$ $24 : 6 + 24 : 2$

c) $1000 : 50$ $10000 : 50$

g) $24 : (6 - 2)$ $24 : 6 - 24 : 2$

d) $(12 + 24) : 6$ $12 : 6 + 24 : 6$

Operaciones combinadas, ¿cómo las resolvemos?

- 1) Primero hay que separar en términos, con los signos (+) y (-).
Luego se resuelven las operaciones en cada uno de los términos.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 8 : 2 + 9 : 3 - 8 : 4 \cdot 8 + 5 &= \\ 40 : 2 + 3 - 2 \cdot 8 + 5 &= \\ 20 + 3 - 16 + 5 &= 12 \end{aligned}$$

- 2) Cuando hay signos de agrupación, primero se resuelven las operaciones entre paréntesis (), luego las que están encerradas entre corchetes [] y por último entre llaves { }. Teniendo siempre presente la separación de términos dentro de cada paréntesis, llave o corchete: primero se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, luego, las sumas y las restas.

$$\begin{aligned} [9 - 3 \cdot (7 - 5 + 1) + 2] : [3 \cdot 4 - 5 \cdot (8 - 6)] &= \\ [9 - 3 \cdot 3 + 2] : [12 - 5 \cdot 2] &= \\ [9 - 9 + 2] : [12 - 10] &= \\ 2 : 2 &= 1 \end{aligned}$$

16 Resolver las siguientes operaciones combinadas.

a) $(10 + 2) : 6 - 1 =$

d) $(30 + 6) : 9 - 2 \cdot 1 =$

b) $2 + 10 : 5 + (4 : 2 - 1) =$

e) $(35 - 5) \cdot 0 + 14 \cdot 8 =$

c) $(15 - 8 + 26) : 33 - (15 - 3) : 4 =$

f) $15 - 8 - 2 \cdot 1 + 5 \cdot (4 - 12 : 6) =$

g) $35 - [6 \cdot (5 + 3) : (12 : 2) + 13] =$

l) $12 : 2 : 3 \cdot 5 + (24 - 9 : 3) : 7 =$

h) $(24 : 3 + 6 \cdot 5) \cdot 2 - 8 + 25 : 5 =$

m) $(5 \cdot 2 - 3) \cdot 4 - [22 + 3 - (9 + 2 \cdot 3) : 5] : 11 =$

i) $3 \cdot 9 - 4 \cdot (12 - 4 \cdot 2) + (9 - 7) \cdot (6 - 4) =$

n) $[9 + 10 : (3 + 2) - 6 \cdot 3 : 9] \cdot 5 + 4 =$

j) $3 \cdot 9 - 4 \cdot (12 - 4 \cdot 2) + (9 - 7) \cdot (6 - 4) =$

ñ) $18 - 0 : (7 + 8) \cdot 4 - 18 : 3 =$

k) $40 + (10 \cdot 5 - 20 : 5 + 10 : 5 \cdot 4) : 3 =$

o) $(8 \cdot 6 - 5) + 10 \cdot 215 : 43 \cdot 2 - (86 \cdot 5 - 100 \cdot 3) =$

17 Resolver por dos formas diferentes.

a) $(4 + 3 + 1) \cdot 9 =$

f) $(90 - 3 + 5) \cdot 7 =$

b) $(6 + 3 + 1) \cdot 2 =$

g) $(60 - 12) : 6 =$

c) $(8 - 4) \cdot 3 =$

h) $(30 + 90 - 9) : 3 =$

d) $(12 + 6) \cdot 10 =$

i) $(100 - 50) : 10 =$

e) $(16 - 3) \cdot 5 =$

j) $(14 + 7) : 7 =$

18 Extraer factor común.

a) $32 - 8 + 16 + 80 =$

b) $12 - 16 + 4 =$

c) $40 - 10 + 5 =$

d) $16x - 2y =$

f) $36 - 12 + 18 - 24 =$

h) $10x - 4 =$

e) $30a - 15 =$

g) $4x - 6bx - 2xw =$

i) $50m - 10m =$

19 Expresar en forma simbólica y resolver. Utilizar el diccionario matemático al final del capítulo 1.

a) El cociente entre cincuenta y cuatro y la diferencia entre diez y uno aumentada en cinco unidades.

d) La diferencia entre 74 y la mitad de 24.

b) El producto entre 19 y la diferencia entre 122 y 15.

e) La suma entre la mitad de 144 y el triple de 15.

c) La mitad de la diferencia entre 74 y 24.

f) La diferencia entre el cociente de 169 y 13, y el producto entre 4 y 2.

20 Resolver los siguientes problemas.

a) ¿Cuántos paquetes de 13 kg se puede llenar con el azúcar de una bolsa de 195 kg?

b) Un señor cuyo sueldo es de \$13300 gana cuatro veces más que su hijo. ¿Qué sueldo tiene el hijo?

c) En un camión se cargan 96 piezas mecánicas iguales, de 3 kg de peso cada una, 148 repuestos de 12 kg cada uno y 12 cajas de bulones de 32 kg cada una. Al salir de la planta industrial se lo pesa en una báscula y marca 4648 kg. ¿Cuál es el peso del camión vacío?

Ecuaciones con multiplicación y división

Para resolver una ecuación hay que despejar la incógnita.

- 1) Todo número que está multiplicando en un miembro de una igualdad que contiene un solo término pasa al otro miembro dividiendo.

$$\begin{aligned} 15 \cdot x &= 45 \\ x &= 45 : 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- 2) Todo número que está dividiendo en un miembro de una igualdad que contiene un solo término pasa al otro miembro multiplicando.

$$\begin{aligned} x : 6 &= 13 \\ x &= 13 \cdot 6 \\ x &= 78 \end{aligned}$$

- 3) Ecuaciones con las cuatro operaciones Se resuelven las operaciones, despejando, hasta que en un miembro de la igualdad nos queda solo el término que contiene a la incógnita

$$\begin{aligned} x : 4 - 5 &= 8 \\ x : 4 &= 8 + 5 \\ x &= 13 \cdot 4 \\ x &= 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot x + 10 &= 26 \\ 8 \cdot x &= 26 - 10 \\ 8 \cdot x &= 16 \\ x &= 16 : 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

¿Qué pasa cuando en un miembro nos ha quedado solo el término que contiene a la incógnita pero la incógnita está dividiendo?

Cuando la incógnita está como divisor, se la debe pasar al otro miembro multiplicando y luego despejarla.

a)

$$\begin{aligned} 12 : x &= 6 \\ 12 &= 6 \cdot x \\ 12 : 6 &= x \\ 2 &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} &= 6 \\ 12 &= 6 \cdot x \\ 12 : 6 &= x \\ 2 &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

21 Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4x - 16 = 4$

h) $5 - x : 3 = 3$

ñ) $15 : 3 + x : 10 = 3 \cdot 8$

b) $10 - 3x = 7$

i) $16 - 3x = 4$

o) $x + 76 - 13 = 178$

c) $x : 2 - 3 = 12$

j) $x : 6 + 1 - 3 = 5$

p) $12 : x - 3 = 3$

d) $8 + x : 4 = 10$

k) $8x - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 13 = 2$

q) $x + 10 : 5 = 5$

e) $25 - 7x = 4$

l) $2 \cdot 5 + x : 5 - 3 = 9 + 1$

r) $9 - 5x = 4$

f) $\frac{20}{x} - 7 = 3$

m) $10 - \frac{8}{x} = 2$

s) $17 - 4 : x = 5$

g) $5 = 14 : x - 2$

n) $12 + 16 + 6x = 40$

t) $25 + x : 3 + 12 - 24 = 108$

u) $a : 8 = 5$

ab) $10x : 5 = 8$

ai) $(6 - x) : 4 = 1$

v) $125 : x = 25$

ac) $5 = 10 : 2x$

aj) $3x + 5 = 17$

w) $m : 3 = 42$

ad) $15 = 30 : 2x$

ak) $7 - 2x = 3$

x) $15 : z = 1$

ae) $4x = 80$

al) $15 = 3x - 6$

y) $y : 4 = 5$

af) $v : 4 = 0$

am) $26 = (2x - 8) : 11$

z) $18 : x = 9$

ag) $2y : 4 = 10$

an) $x : 30 = 36$

aa) $x : 5 = 1$

ah) $2 \cdot (x + 5) = 40$

añ) $164 : v = 4$

$$\text{ao) } \frac{2x}{3} - 8 = 6$$

$$\text{ar) } 12x : 5 = 25$$

$$\text{au) } 3 = \frac{18}{x}$$

$$\text{ap) } 14 - \frac{3x}{2} = 5$$

$$\text{as) } 2 = \frac{x-3}{4}$$

$$\text{av) } \frac{8}{x} = 2$$

$$\text{aq) } 3 - x : 2 = 1$$

$$\text{at) } \frac{5x-2}{3} = 6$$

$$\text{aw) } 14x - 10 = 32$$

- 1) Cuando la incógnita está en más de un término se reduce a uno solo sumando o restando los coeficientes, y luego se resuelve la ecuación.

$$4x - 4 + 5x - 3x = 8$$

$$6x - 4 = 8$$

$$6x = 8 + 4$$

$$6x = 12$$

$$x = 12 : 6$$

$$x = 2$$

- 2) Si en ambos miembros hay incógnitas, se debe agrupar los términos con la incógnita en un solo miembro, y luego se procede como en los casos anteriores.

$$7x + 3x - 5 = 4x + 2x + 25$$

$$7x + 3x - 4x - 2x - 5 = 25$$

$$4x = 25 + 5$$

$$4x = 30$$

$$x = 30 : 4$$

$$x = 7$$

22 Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x + 6 = 3x + 10$

f) $3x - 2 = x$

k) $3x - 2x + 9 = 15$

b) $9x + 2x - 5 = 7x + 15$

g) $x + 5 + 4 + 2 = 3x + 7 + 2$

l) $x + 3x + 2x + 4 = 3x + 13$

c) $5x - 4x - 1 = 9$

h) $3x + x - 2 = 22$

m) $x + 3 + x = 7$

d) $x + x + x - x = 12$

i) $3x - 2 = 3 - 2x$

n) $x + 2x + 2 + 3x + 6 = 5x + 14$

e) $2 + x = 2x$

j) $x + 5 = 11 - x$

ñ) $6x - 4x - x = 18 - x$

Ecuaciones aplicando propiedad distributiva

Dada la siguiente ecuación: $(2x - 3) \cdot 6 = 30$, se puede resolver aplicando la propiedad distributiva, o, no aplicándola.

► Ejemplo 1

Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} (2x - 3) \cdot 6 &= 30 \\ 2x \cdot 6 - 3 \cdot 6 &= 30 \\ 12x - 18 &= 30 \\ 12x &= 30 + 18 \\ 12x &= 48 \\ x &= 48 : 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

No aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(2x - 3) \cdot 6 &= 30 \\ 2x - 3 &= 30 : 6 \\ 2x - 3 &= 5 \\ 2x &= 5 + 3 \\ 2x &= 8 \\ x &= 8 : 2 \\ \boxed{x = 4}\end{aligned}$$

► Ejemplo 2

Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(4x + 8) : 4 &= 9 \\ 4x : 4 + 8 : 4 &= 9 \\ x + 2 &= 9 \\ x &= 9 - 2 \\ \boxed{x = 7}\end{aligned}$$

No aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}(4x + 8) : 4 &= 9 \\ 4x + 8 &= 9 \cdot 4 \\ 4x + 8 &= 36 \\ 4x &= 36 - 8 \\ 4x &= 28 \\ x &= 28 : 4 \\ \boxed{x = 7}\end{aligned}$$

En otras ecuaciones sólo se puede resolver aplicando la propiedad distributiva, como por ejemplo:

$$\begin{aligned}1) \quad & 3 \cdot (x - 2) + 2x + 9 = 23 \\ & 3x - 3 \cdot 2 + 2x + 9 = 23 \\ & 3x - 6 + 2x + 9 = 23 \\ & 5x - 6 + 9 = 23 \\ & 5x = 20 \\ & x = 20 : 5 \\ & \boxed{x = 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad & (9x - 12) : 3 + 4x = 5x + 8 \\ & 9x : 3 - 12 : 3 + 4x = 5x + 8 \\ & 3x - 4 + 4x = 5x + 8 \\ & 7x - 4 = 5x + 8 \\ & 7x - 5x - 4 = 8 \\ & 2x = 8 + 4 \\ & 2x = 12 \\ & x = 12 : 2 \\ & \boxed{x = 6}\end{aligned}$$

23 Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4(x - 2) + 3(1 - x) = 0$

e) $5(2x + 2) = 2(2x + 9)$

i) $3(2x - 1) = 11 - 8x$

b) $5(x - 3) = 4(x + 4) - 2$

f) $4(2x - 4) - 6x = 12$

j) $4 + x = (4 - 2x) \cdot 2 + 6$

c) $4(x - 1) + 2 = 2(x + 3) + 10$

g) $6(x - 2) = 3(x - 15) + 18$

k) $9 + (6x - 4) : 2 = 2(x - 3) + 6$

d) $5(2x + 2) = 2(2x + 9)$

h) $(10x - 25) : 5 + 8 = x + 10$

l) $7x - 3 + (5 - 2) = 6(x + 2)$

24 Expresar en lenguaje simbólico. Utilizar el diccionario matemático al final del capítulo.

- a) Un número par.
- b) El siguiente de un número par.
- c) Un número impar.
- d) La suma de tres números consecutivos.
- e) La suma de tres números pares consecutivos.
- f) El triple del siguiente de un número.
- g) El siguiente del triple de un número.
- h) La mitad del anterior de un número.
- i) El anterior de la mitad de un número.
- j) El doble de un número disminuido en 1.

25 Plantear la ecuación y resolver.

- a) Hallar un número tal que su doble más 5 es igual a su triple más 4.
- b) Hallar un número sabiendo que el doble de la diferencia entre dicho número y 2 es igual al cociente entre la suma de dicho número con 7 y 2.

- c)** La edad de Inés es el triple de la edad de Sofía. Si dentro de 5 años Inés tendrá 23 años. ¿Cuál es la edad de Sofía?
- d)** El gasto mensual promedio de insumos de computación durante el año pasado fue de \$50. ¿Cuánto gasté en este ítem en todo el año?
- e)** El triple del anterior de un número es igual al doble de su siguiente. ¿Cuál es ese número?
- f)** Se reparte cierto número de figuritas entre 7 alumnos, correspondiendo 30 figuritas a cada uno y sobran 17. ¿Cuántas figuritas habrá?
- g)** Se reparten 129 pelotas de tenis entre cierto número de niños, correspondiendo 6 a cada uno de ellos sobran 13. ¿Cuántos niños había?
- h)** Se reparten 225 caramelos entre 8 niños, dando a cada uno de ellos 22. ¿Cuántos sobrarán?
- i)** Juan tiene \$250, Pedro tiene el doble, José tiene el triple que Pedro y Antonio la mitad del doble de Juan. ¿Cuánto dinero tienen en total?
- j)** Un sujeto compra herramientas por valor de \$24775 y las vende a \$34050. ¿Cuánto ha ganado?
- k)** ¿Cuántas veces está contenido el número 56 en 28616?
- l)** En un hospital hay cierto número de guardapolvos, que se reparten entre 120 médicos, sobrando 66 guardapolvos. ¿Cuántos había?
- m)** La mitad del consecutivo de un número es 11. ¿Cuál es el número?

26 Completar la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje matemático
	$3x - 1$
<i>El cuadrado de un número</i>	
	$(3x + 1) : 2$
<i>La mitad del quíntuplo del anterior de un número</i>	
	$6(x - 1)$
	$6x - 1$
<i>La mitad del doble de un número</i>	
	$5(x + 4)$

Potenciación de números naturales

La potenciación es una forma abreviada de la multiplicación donde todos los factores son iguales.

$$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8$$

Exponente

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$$

Base n factores

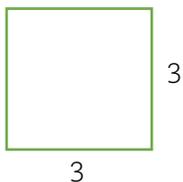
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

se lee "tres al cuadrado"

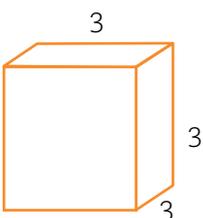
$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

se lee "tres al cubo" o "tres a la tercera"

Interpretación geométrica



$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ representa el área de un cuadrado de lado 3 en el plano.



$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ en el espacio representa el volumen de un cubo de lado 3.

27 Escribir en forma de potencia.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

d) $(3 + a) \cdot (3 + a) \cdot (3 + a) =$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$

e) $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n =$

c) $10 \cdot 10 \cdot 10 =$

28 Calcular las siguientes potencias.

a) $2^5 =$

e) $3^6 =$

b) $3^4 =$

f) $20^1 =$

c) $13^2 =$

g) $5^3 =$

d) $10^5 =$

h) $7^3 =$

29 Completar la tabla.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X^2																					
X^3																					

30 Calcular las siguientes potencias de 10. Deducir la regla que te ayude.

a) $10^0 =$

f) $10^5 =$

b) $10^1 =$

g) $10^6 =$

c) $10^2 =$

h) $10^7 =$

d) $10^3 =$

i) $10^8 =$

e) $10^4 =$

Propiedades de la potenciación

1) Todo número distinto de cero elevado a la cero es igual a 1.

$$a^0 = 1$$

2) Todo número elevado a la uno es igual al mismo número.

$$a^1 = a$$

3) Propiedad uniforme:

$$a = b \Rightarrow a^n = b^n$$

4) Propiedad cancelativa:

$$a^n = b^n \Rightarrow a = b \text{ con } n \neq 0,$$

$$a^n = a^s \Rightarrow n = s \text{ con } a \neq 1$$

5) La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y la división.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(4 \cdot 2)^2 = 4^2 \cdot 2^2$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$(9 : 3)^2 = 9^2 : 3^2$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$12^2 : 3^2 = (12 : 3)^2$$

6) Producto de potencias de igual base

En el producto de potencias de igual base se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

$$4^3 \cdot 4^2 \cdot 4 = 4^{3+2+1} = 4^6$$

7) Cociente de potencias de igual base.

En el cociente de potencias de igual base se mantiene la base y se restan los exponentes. Si m es mayor que n, en caso contrario, no hay solución en el conjunto de los números naturales.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$4^{12} : 4^{10} = \frac{4^{12}}{4^{10}} = 4^{12-10} = 4^2 = 16$$

8) Potencia de otra potencia.

En la potencia de otra potencia se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(5^3)^2 = 5^6$$

La potencia de un número perteneciente al conjunto de los naturales con en cero, (\mathbb{N}_0), siempre es un número perteneciente a ese conjunto.

31 Unir con flechas las expresiones equivalentes teniendo en cuenta las propiedades.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| a) $3^3 \cdot 2^3 =$ | 1) 3^6 |
| b) $6^2 : 2^2 =$ | 2) 3 |
| c) $4^0 =$ | 3) 2^5 |
| d) $3^1 =$ | 4) $(3 \cdot 2)^3$ |
| e) $3^2 + 4^2 =$ | 5) 25 |
| f) $2^2 \cdot 2^3 =$ | 6) $(6 : 2)^2$ |
| g) $3^8 : 3^2 =$ | 7) 2^6 |
| h) $(2^3)^2 =$ | 8) 1 |

32 Completar con el signo $=$ o \neq según corresponda.

- a) 3^2 2^3 b) $(5 + 2)^2$ $5^2 + 2^2$ c) $(8 - 2)^2$ $8^2 - 2^2$

Tachar lo que no corresponda

- d) La potenciación **SI** / **NO** cumple con la propiedad conmutativa.
 e) La potenciación **SI** / **NO** es distributiva con respecto a la suma y a la resta.

33 Expresar como potencia las siguientes situaciones problemáticas.

- a) En un taller hicieron una pila de 10 pisos de cajas de tuercas; en cada piso hay 10 cajas. ¿Cuántas cajas hay en la pila?
 b) En un depósito hay 6 estanterías, cada estantería tiene 6 estantes y en cada estante hay 6 cajas que contienen 6 latas cada una. ¿Cuántas latas hay en el depósito?

34 Resolver las siguientes operaciones combinadas.

a) $6^3 : 3^2 - 2^4 =$

f) $(9 + 3)^2 : 4 + (4 \cdot 5 - 10)^0 =$

b) $[(2 + 1)^3 + 1^7] : 2^2 =$

g) $(10 - 6 : 2)^3 =$

c) $[(2^3 \cdot 3^2) : 2^2 - 3]^2 : 5^2 =$

h) $(3 \cdot 10 - 20 : 4)^2 =$

d) $4^3 - 4^2 + 10^{12} : 10^{10} =$

i) $10^5 \cdot 10 : (10^2)^2 + (5^3 \cdot 5 : 5^3)^2 =$

e) $(9^3)^2 \cdot 9^4 : 9^8 + (10 + 15 : 3) : 5 - 8^0 =$

j) $(128 \cdot 3^{23} + 7^9)^0 =$

35 Aplicar las propiedades de la potenciación.

a) $10 \cdot 10^2 \cdot 10^3 =$

g) $10^3 : 10 =$

m) $(2^3)^2 =$

b) $2^3 \cdot 2^2 =$

h) $2^5 : 2^2 =$

n) $(10^3)^2 =$

c) $x^3 \cdot x^4 \cdot x =$

i) $2^4 : 2^3 =$

ñ) $(2^3)^0 =$

d) $2^3 \cdot 2^0 \cdot 2 \cdot 2^4 =$

j) $3^5 : 3 =$

o) $(4^2)^2 =$

e) $10^0 \cdot 10 \cdot 10^3 =$

k) $x^5 : x^2 =$

p) $(5^2)^2 =$

f) $x \cdot x =$

l) $h^7 : h =$

q) $(a^5)^6 =$

r) $8^4 \cdot 8 \cdot 8^3 =$

w) $(10^6 : 10^5)^2 \cdot 10^3 =$

ab) $(7^4)^3 : (7^5)^2 \cdot 7^2 =$

s) $(m^4)^3 =$

x) $m^9 : m^3 : m^2 =$

ac) $(a^2 \cdot b)^3 \cdot (a \cdot b^2)^2 =$

t) $b^{10} : b^8 =$

y) $(6^7 : 6^3 : 6)^2 =$

ad) $(x^3 \cdot y^4)^3 \cdot (x \cdot y^2)^3 =$

u) $5^{10} : (5^2 \cdot 5^4) =$

z) $4^{10} : (4^2 \cdot 4^4) =$

ae) $(a^7 \cdot b^3) : (a^3 \cdot b^0) =$

v) $(2^2)^3 \cdot 2 \cdot (2^7 : 2^5) =$

aa) $(9^5 : 9^2)^2 : (9^6 : 9^5)^3 =$

af) $[(x^7)^8 : x^5] =$

Radicación de números naturales

¿Qué número hay que elevar al cubo para que dé 64? $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3 = 64$.

¿Qué número hay que elevar a la cuarta para que dé 81? $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$.

$\sqrt[n]{b} = a \Rightarrow a^n = b$ "a es el número que hay que elevar a la n para que dé el número b".

n: índice de la raíz

b: radicando

a: raíz enésima

36 Calcular las siguientes raíces.

a) $\sqrt{4} =$

e) $\sqrt[7]{1} =$

i) $\sqrt[3]{0} =$

b) $\sqrt[3]{27} =$

f) $\sqrt{144} =$

j) $\sqrt[4]{16} =$

c) $\sqrt[3]{216} =$

g) $\sqrt{25} =$

k) $\sqrt[6]{64} =$

d) $\sqrt[5]{243} =$

h) $\sqrt{9} =$

l) $\sqrt[3]{343} =$

Propiedades de la radicación de números naturales

La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

1) La radicación es distributiva con respecto a la división.

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad \sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4} = 4 : 2 = 2$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad \sqrt{125} : \sqrt{5} = \sqrt{125 : 5} = \sqrt{25} = 5$$

2) Raíz de otra raíz.

Se multiplican los índices $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64}$

3) Propiedad uniforme:

$$a = b \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

4) Propiedad cancelativa:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Rightarrow a = b$$

5) Si el índice de la raíz es igual al exponente del radicando pueden simplificarse.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

La raíz enésima de un número natural no siempre es un número natural.

37 Completar con el signo = o ≠ según corresponda.

a) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ $\sqrt{9 + 16}$

c) $\sqrt{169} - \sqrt{25}$ $\sqrt{169 - 25}$

b) $\sqrt{25 - 16}$ $\sqrt{25} - \sqrt{16}$

d) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ $\sqrt{144 + 25}$

Tachar lo que no corresponda.

“La radicación **SI** / **NO** es distributiva con respecto a la suma ni a la resta”.

38 Aplicar la propiedad distributiva cuando sea posible, y resolver.

a) $\sqrt{144 \cdot 25} =$

h) $\sqrt[4]{10000 : 625} =$

b) $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt[3]{36}} =$

i) $\sqrt{144 + 81} =$

c) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{4} =$

j) $\sqrt{100 - 36} =$

d) $\sqrt{36} + \sqrt{64} =$

k) $\sqrt{144 : 4} =$

e) $\sqrt{225} - \sqrt{81} =$

l) $\sqrt{36 \cdot 25} =$

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

m) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2} =$

g) $\sqrt[5]{128} : \sqrt[5]{4} =$

39 Resolver las siguientes operaciones combinadas.

a) $7^{21} : 7^{19} + \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{2 - 5}} : (4 + 7 - 6) =$

d) $\sqrt{2^3 \cdot \sqrt{4}} : \sqrt[5]{2^6 : 2} =$

b) $(7 + 2)^2 : 3 - \sqrt[3]{2 + 6} + \sqrt{100} : 5 =$

e) $(3 \cdot 2 - 3 + 1)^2 + \sqrt[3]{(8 - 5)^2 - 1} + \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{36}} =$

c) $\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5 + 8^{25}} : 8^{23} - 18 : (7 + 5 - 6) =$

f) $9^{10} : 9^8 + 12^3 : 4^3 - \sqrt{5 \cdot \sqrt{5}} =$

$$\text{g)} \sqrt{80 + 9} : 9 =$$

$$\text{ñ)} \sqrt{4 + 21} - \sqrt[3]{27} : 3 + (2 + 3)^2 \cdot 3 =$$

$$\text{h)} \sqrt[3]{2 + 5 \cdot 5} =$$

$$\text{o)} \sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{25 + 8^{25}} : 8^{24} - 18 : (7 + 5 - 6) =$$

$$\text{i)} 7^9 : 7^7 + \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{2}} - 10^4 : 5^4 =$$

$$\text{j)} \sqrt{13^2 - 12^2} : (2^2 + 1^7) - 16^0 =$$

$$\text{k)} (\sqrt{25} + \sqrt[3]{8} + \sqrt{81}) \cdot 3 + \sqrt[3]{64} : (2^5 : 2^3) + 2^{15} : 2^{11} =$$

$$\text{l)} \sqrt{121} \cdot 3 + (2^6 : 2^4 - 8^0) \cdot 5 + \sqrt{64} : 2^2 + 9^2 =$$

$$\text{m)} (\sqrt{100} + \sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{125}) \cdot \sqrt[3]{1000} + 3^{17} : 3^{15} + 7^2 \cdot 1^{12} =$$

$$\text{n)} \sqrt{144} \cdot 3 - 3^9 : 3^7 + (\sqrt{36} + \sqrt{49} - \sqrt[3]{27}) \cdot 3 + 2^5 =$$

Ecuaciones con potenciación y radicación

$$1) \sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow x = 4^3 \Rightarrow x = 64$$

El índice de una raíz pasa al otro miembro como exponente de una potencia.

$$2) x^2 = 400 \Rightarrow x = \sqrt{400} \Rightarrow x = 20$$

El exponente de una potencia pasa al otro miembro como índice de una raíz.

Prestá atención en la resolución de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1) 2\sqrt{x+1} &= 7 \\ 2\sqrt{x} &= 7-1 \\ 2\sqrt{x} &= 6 \\ \sqrt{x} &= 6:2 \\ \sqrt{x} &= 3 \\ x &= 3^2 \Rightarrow x = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) 3x^2 - 2 &= 25 \\ 3x^2 &= 25 + 2 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 27:3 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \sqrt{9} \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{2x+1} &= 7 \\ \sqrt{2x} &= 7-1 \\ 2x &= 6 \\ 2x &= 6^2 \\ 2x &= 36 \\ x &= 36:2 \Rightarrow x = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (3x)^2 - 2 &= 34 \\ (3x)^2 &= 34 + 2 \\ (3x)^2 &= 36 \\ 3x &= \sqrt{36} \\ 3x &= 6 \\ x &= 6:3 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \sqrt{2x+1} &= 7 \\ 2x+1 &= 7^2 \\ 2x+1 &= 49 \\ 2x &= 49-1 \\ 2x &= 48 \\ x &= 48:2 \Rightarrow x = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) (3x+2)^2 &= 25 \\ 3x+2 &= \sqrt{25} \\ 3x+2 &= 5 \\ 3x &= 5-2 \\ 3x &= 3 \\ x &= 3:3 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

40 Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $(x+1)^5 - 1 = 31$

d) $2 + \sqrt{x} = 7$

b) $\sqrt[3]{3x-1} = 2$

e) $(x^2+1):2 = 25$

c) $x^2 - 4 = 5$

f) $\sqrt{x}:3 + 4 = 9$

g) $3x^2 - 4 = 23$

o) $5\sqrt[3]{x-2} = 18$

h) $3\sqrt[3]{x+2} = 14$

p) $121 - 4x^2 = 21$

i) $(x : 3 + 5)^2 = 25$

q) $\frac{3x^2 - 8}{2} = 20$

j) $\sqrt[4]{2x-6} = 2$

r) $(x^3 - 1) \cdot 2 : 3 = 660$

k) $\sqrt{x : 2 - 4} = \sqrt[3]{27 - 3} \sqrt{2} \cdot \sqrt{16}$

s) $(1000 : x^3) : 125 = 1$

l) $3 \cdot \sqrt[3]{x-2} = 8 - 6$

t) $2y^2 - 3 = 15$

m) $9 + x^2 : 8 + 5 = 16$

u) $\sqrt{2h+1} = 3$

n) $\sqrt[3]{2x^2+6} = 2$

v) $\sqrt[3]{3y-1} = 2$

ñ) $(3x^2 + 5) : 4 = 2$

w) $\sqrt{y-3} = 8$

41 Plantear la ecuación y resolver.

- a) La raíz cuadrada del siguiente de un número es igual al cociente entre el cuadrado de 2 y 2. c) El cociente entre el cuadrado de un número y 8 es igual a la raíz cuarta de 16.
- b) El anterior del doble del cubo de un número es igual a 53. d) La diferencia entre el cubo de un número y 1 es igual a 7.

- e) El cuadrado de la suma entre un número y 8 es igual a 100. h) La diferencia entre el cubo del doble de un número y 5 es igual a 3.
- f) La raíz cúbica de la diferencia entre la mitad de un número y 4 es igual a 3. i) La diferencia entre el cubo del anterior de un número y 2 es igual a 6.
- g) La mitad del cuadrado de un número aumentado en 3 unidades es igual a 21. j) La suma entre la raíz cuadrada del doble de un número y 4 es igual a 6.

42 Unir con flechas las ecuaciones con el enunciado que les corresponde y resolver.

- a) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado aumentado en 27 da 388?

- b) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado disminuido en 19 da 422?

- c) La raíz cuadrada de la suma entre 10 y un número es igual a cinco.

- d) La suma entre 10 y la raíz cuadrada de un número es 12. ¿Cuál es el número?

- e) El cuadrado de la diferencia entre un número y 8 es igual a 169. ¿Cuál es el número?

1) $(x - 8)^2 = 169$

2) $10 + \sqrt{x} = 12$

3) $\sqrt{10 + x} = 5$

4) $x^2 + 27 = 388$

5) $x^2 - 19 = 422$

43 Hallar x , teniendo en cuenta $a^x = a^4 \Rightarrow x = 4$

a) $2^3 + 2^3 = 2^x$

c) $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 2^x$

e) $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^{3x}$

b) $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^x$

d) $2^6 + 4^3 + 8^2 + 2 \cdot 2^5 = 2^{2x}$

f) $4^2 + 2^4 + 2 \cdot 2^3 = 2^{2x}$

Divisibilidad de números naturales

$$c = a \cdot b \begin{cases} \rightarrow c : b = a \\ \rightarrow c : a = b \end{cases} \begin{array}{l} c \text{ es múltiplo de } a \text{ y de } b; c \text{ es divisible por } a \text{ y por } b. \\ a \text{ es divisor de } c; a \text{ divide a } c. \\ b \text{ es divisor de } c; b \text{ divide a } c. \end{array}$$

$$3 \cdot 5 = 15 \begin{cases} \rightarrow 15 : 3 = 5 \\ \rightarrow 15 : 5 = 3 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \text{ y } 5 \text{ son divisores de } 15 \\ 15 \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y de } 5 \end{array}$$

Un número natural es múltiplo de otro cuando la división del primero por el segundo es exacta, es decir el resto de la división es igual a cero.

El número a es múltiplo de b y b es divisor de a si:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 0 & c \end{array}$$

Un múltiplo de un número natural se obtiene calculando el producto de este número por otro número natural.

Múltiplos de 8.

$$8 \cdot 1 = 8 ; 8 \cdot 2 = 16 ; 8 \cdot 3 = 24 ; 8 \cdot 4 = 32 ; 8 \cdot 5 = 40 ; 8 \cdot 6 = 48 ; 8 \cdot 7 = 56 ; 8 \cdot 8 = 64 ; 8 \cdot 9 = 72 ; \text{ etc.}$$

Los resultados de la tabla de multiplicar son múltiplos de cada uno de los factores.

I) El cero es múltiplo de todo número natural.

II) Cualquier número natural es múltiplo de sí mismo.

III) Un número es divisor de otro número o divide a otro número cuando la división de éste por el primero es exacta.

b es divisor de a porque:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 0 & c \end{array}$$

9 es divisor de 36 porque $36 : 9 = 4$.

El uno es divisor de todos los números naturales.

IV) Cualquier número natural, excepto el cero, es divisor de sí mismo.

44 Dar dos ejemplos de las cuatro propiedades enunciadas en el párrafo anterior; I); II); III) y IV).

45 Escribir:

- a) Los divisores de 6. ¿Cuántos son? d) Los múltiplos de 10. ¿Cuántos son?
- b) Los múltiplos de 6. ¿Cuántos son? e) Los divisores de 17. ¿Cuántos son?
- c) Los divisores de 10. ¿Cuántos son? f) Los múltiplos de 17. ¿Cuántos son?

Números primos

Un número natural es primo cuando admite exactamente dos divisores: el 1 y sí mismo.

► Ejemplo:

13 es un número primo, sus únicos divisores son: 1 y 13.

18 no es número primo, pues sus divisores son: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

46 Indicar los números primos menores que 100.

47 Marcar con una X lo que corresponda.

- a) El 1 es número primo. SÍ / NO
- b) Existe un número primo par. SÍ / NO
- c) La suma de dos o más números múltiplo de un número es múltiplo de dicho número. SÍ / NO
- d) La diferencia de dos múltiplos de un número es múltiplo de dicho número. SÍ / NO

Números compuestos

Un número que no es primo admite más de dos divisores, es decir que también tiene divisores distintos a él y a 1, se denomina compuesto. El cero admite infinitos divisores pero no es compuesto.

► Ejemplo:

36 es un número compuesto, sus divisores son 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.

Criterios de divisibilidad

Son las condiciones mínimas que debe cumplir un número para saber si es o no divisible por otro. Nos ayuda a calcular los divisores más rápido.

Un número es divisible por:

- 2 : Cuando termina en 0 o en número par.
- 3 : Cuando la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.
- 4 : Cuando termina en doble 0 o sus dos últimas cifras son múltiplos de cuatro.
- 5 : Cuando termina en 0 o en 5.
- 6 : Cuando es múltiplo de 2 y de 3.
- 8 : Cuando sus tres últimas cifras son 0 o múltiplo de 8.
- 9 : Cuando la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
- 10 : Cuando termina en cero o es múltiplo de 2 y de 5.

48 Completar con la cifra que corresponda para que sea múltiplo del número que se indica.

a) 949 es múltiplo de 2.

f) 472 es múltiplo de 8.

b) 1 9345 es múltiplo de 3.

g) 27 4 es múltiplo de 9.

c) 1111 es múltiplo de 4.

h) 750 es múltiplo de 10.

d) 9935 es múltiplo de 5.

i) 41 12 es múltiplo de 8.

e) 43 es múltiplo de 6.

j) 59 2 es múltiplo de 12.

Factorización de números naturales

Factorizar un número es expresarlo como el producto de sus factores primos.

► Ejemplo:

$12 = 6 \cdot 2$ no está factorizado porque 6 no es un número primo.

$12 = 2^2 \cdot 3$ sí está factorizado porque 2 y 3 son números primos.

¿Cómo se factoriza un número? Se descompone el número en un producto de sus factores primos.

90	2	90 es divisible por 2 $\rightarrow 90 = 2 \cdot 45$
45	3	45 es divisible por 3 $\rightarrow 45 = 3 \cdot 15$
15	3	15 es divisible por 3 $\rightarrow 15 = 3 \cdot 5$
5	5	5 es divisible por 5 $\rightarrow 5 = 5 \cdot 1$, 5 es un factor primo
1		$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

49 Factorizar los siguientes números.

a) 14

e) 60

i) 180

b) 23

f) 81

j) 225

c) 32

g) 144

k) 252

d) 45

h) 88

l) 1304

50 Teniendo en cuenta la siguiente factorización de los números, indicar cuáles son algunos de sus divisores:

a) $3^2 \cdot 2^3 =$

b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 =$

c) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11 =$

51 Se tienen 210 litros de aceite para máquina. Descomponer 210 en el producto de factores primos y contestar.

a) ¿Se podrá envasar el aceite en frascos de 3 litros sin que sobre aceite?

b) ¿Se podrá envasar en frascos de 15 litros sin que sobre nada?

c) ¿Se podrá envasar en frascos de 12 litros sin que sobre nada?

Divisor Común Mayor (D.C.M)

El divisor común mayor de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

D.C.M (24; 60).

Divisores de 24: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

Divisores de 60: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60.

Divisores comunes de 24 y 60: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

El mayor de los divisores comunes es 12 por lo tanto D.C.M (24 ; 60) = 12

Regla práctica para calcular D.C.M

Se factorizan los números y el D.C.M es igual al producto de los factores primos que se repiten elevados cada uno de ellos con su menor exponente.

$$\begin{array}{l|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\text{D.C.M (60 ; 24)} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

52 Calcular D.C.M de los siguientes conjuntos de números.

a) 24 y 80

d) 8; 9 y 15

b) 35 y 60

e) 17 y 31

c) 25; 40 y 65

f) 3 y 5

NOTA: Si el D.C.M de dos números es igual a 1 dichos números se denominan coprimos.

53 a) El piso de una habitación tiene 1620 cm de largo por 1400 cm de ancho. Se quiere embaldosar con baldosas cuadradas iguales que sean lo más grandes posible. ¿Cuál será la longitud del lado de la baldosa?

Resolución

Se pide que las baldosas sean cuadradas y lo más grandes posible para comprar la menor cantidad de baldosas; por lo tanto se tiene que calcular el D.C.M. de las medidas del ancho y del largo de la habitación.

1620	2
810	2
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

$$1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\text{D.C.M}(1620; 1400) = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$$

La medida de la baldosa es de 20 cm

b) Resolver.

Queremos cuadrricular una cartulina de 32 cm de largo por 22 cm de ancho. ¿Cuánto puede medir como máximo el lado de cada cuadradito?

Múltiplo común menor (m.c.m)

El múltiplo común menor (m.c.m) entre dos o más números es el menor de los múltiplos comunes entre dichos números (exceptuando el cero).

► Ejemplo:

$$\text{m.c.m (10; 60)} =$$

Múltiplos de 10: 10; 20; 30; 40; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160; 170; 180;.....

Múltiplos de 60: 60; 120; 180; 240; 300;.....

Múltiplos comunes entre 10 y 60: 60; 120; 180;.....

60 es el menor de los múltiplos comunes, es decir, m.c.m (10; 60) = 60

Regla práctica para calcular m.c.m

Se factorizan los números y el m.c.m de dos o más es igual al producto de todos los factores primos, se repitan o no, con su mayor exponente.

$$\text{m.c.m (10; 60)}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m (10; 60)} = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

54 Calcular el m.c.m de cada uno de los siguientes conjuntos de números.

a) 24 y 80

c) 25 ; 40 y 65

e) 17 y 31

b) 35 y 60

d) 8 ; 9 y 15

f) 3 y 5

55 a) Cuatro buques parten para un mismo destino: el primero, cada 10 días; el segundo, cada 8; el tercero, cada 9, y el cuarto, cada 15. ¿Cuántos días transcurren entre dos salidas simultáneas consecutivas?

Resolución

Para saber cuántos días deben pasar para que los 4 buques partan juntos nuevamente, hay que calcular el m.c.m. entre los datos.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$8 = 2^3$$

$$9 = 3^2$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m (10 ; 8 ; 9 ; 15)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Los cuatro buques juntos parten cada 360 días.

b) Resolver.

Dos hermanos se encuentran en casa de sus padres. Uno va cada 25 días y el otro cada 35 días. ¿Dentro de cuánto tiempo volverán a encontrarse en casa de sus padres?

56 Hallar D.C.M. y m.c.m. de cada uno de los siguientes conjuntos de números.

a) 1320 ; 900 y 1260

f) 420 ; 336 ; 140

b) 48 ; 280 y 720

g) 190 ; 95 ; 285

c) 81 ; 540 ; 162 y 243

h) $3^2 \cdot 5 \cdot 11$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 11^2$

d) $2^3 \cdot 7^2 \cdot 5$; $3 \cdot 7$; $2^2 \cdot 7^2 \cdot 5$

i) 35 ; 26 ; 12

e) 135 ; 150 y 45

j) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$; $2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$; $2^2 \cdot 3 \cdot 7^3$

57 Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) Un día sábado, en un entrenamiento de vóley el entrenador separa a los jugadores en 3 grupos. El primer grupo entrenará todos los sábados; el segundo grupo entrenará cada 6 días y el tercer grupo entrenará cada 3 días.

i) ¿Cada cuántos días entrenarán todos juntos?

ii) ¿Cuántas veces habrá entrenado cada grupo antes de reunirse todos nuevamente?

iii) ¿El segundo grupo entrena solo, alguna vez?

b) Se quiere comprar la menor cantidad posible de varillas de madera, todas de igual longitud, para adornar tres paredes de una habitación, sin tener que cortar las varillas.

i) ¿Cuánto debe medir cada varilla si las paredes miden 350 cm, 420 cm, y 455 cm?

ii) ¿Cuántas varillas se usarán en cada pared?

c) Se desea repartir 180 hachuelas, 240 cucharas, y 360 fratachos, entre un cierto número de escuelas técnicas que tengan la especialidad construcción, de tal modo que cada una reciba un número exacto de hachuelas, de cucharas, y de fratachos. ¿Cuál es el mayor número de escuelas que puede beneficiarse en esa forma? ¿Cuántos elementos de cada clase recibe cada escuela?

d) Una pista circular es recorrida por tres autos que parten juntos. El primero tarda 20 segundos, el segundo 15 segundos y el tercero 24 segundos en dar una vuelta completa. ¿Al cabo de cuánto tiempo pasarán juntos por la línea de largada y cuántas vueltas dio cada uno?

e) Una finca rectangular de los alrededores de San Vicente, de 162 metros de ancho y 270 metros de largo, se quiere dividir en parcelas cuadradas que sean lo más grandes posible y todas ellas del mismo tamaño

para hacer una urbanización. ¿De qué medidas deberá ser cada parcela? ¿En cuántas parcelas quedará dividida la finca?

- f)** Un taller de electricidad está elaborando un juego de luces para árboles navideños. El juego consta de tres sectores. El primer sector se enciende cada 12 segundos, el segundo cada 18 segundos y el tercero cada 32 segundos. Si al conectar el juego de luces se encienden todas a la vez, ¿cuántos segundos pasarán hasta que vuelvan a coincidir todas encendidas?
- g)** Un marinerero tiene tres cuerdas que miden 88 ; 42 y 84 metros. El capitán del barco le ha dicho que las corte en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada trozo? ¿Cuántos trozos obtendrá?
- h)** Una empresa de informática fabrica dos tipos de microprocesadores. Disponen en el almacén 2025 unidades de la clase A y 3465 unidades de la clase B. Quieren distribuirlos en cajas de forma tal que no sobre ninguno, haya en cada caja la misma cantidad de unidades de clase A y la misma cantidad de unidades de clase B y que estas cantidades sean las máximas posibles. ¿Cuántos microprocesadores debe contener cada caja? ¿Cuántas cajas de cada tipo habrá?
- i)** Una empresa de instalaciones eléctricas ha sido contratada para llevar a cabo la iluminación de una discoteca. Se van a distribuir cinco juegos de luces de modo que si todas estuviesen conectadas al mismo tiempo, el primero se encendería cada segundo, el segundo cada 5 segundos, el tercero cada 20 segundos, el cuarto cada 35 segundos y el último cada minuto. ¿Cada cuántos minutos coincidirán los cinco juegos encendidos?
- j)** Las instrucciones de mantenimiento especifican que deben cambiarse el aceite de motor cada 7500 km, el filtro de aire cada 15000 km y las bujías a los 20000 km. ¿Cada cuántos kilómetros tendrán que realizarse los tres cambios a la vez?

58 ¿Qué número o números cumplen con las condiciones indicadas? Justificar la respuesta.

- a)** Es coprimo con 48 y divisible por 5.
- b)** Es coprimo con 38 y múltiplo de 2.
- c)** Es coprimo con 26 y menor que 5.
- d)** Es múltiplo de 4 y de 6 pero no es múltiplo de 24.
- e)** Es divisor de 45 y compuesto y menor que 12.
- f)** Un número que sea múltiplo de 8 y no de 4.

59 Sabiendo que $24 \cdot 22 = 528$, resolver.

a) $48 \cdot 22 =$

d) $24 \cdot 11 =$

b) $48 \cdot 11 =$

e) $24 \cdot 44 =$

c) $48 \cdot 44 =$

f) $24 \cdot 22 =$

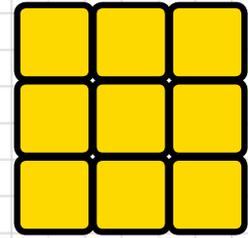
60 Sabiendo que $18 \cdot 15 = 270$, buscar 5 nuevos divisores de 270.

61 Matías y Juan tienen la misma edad. Son menores que María, que tiene 35 años. Si la edad de Matías es múltiplo de 8 y la edad de Juan es múltiplo de 12, ¿qué edad tienen Matías y Juan?

62 Hallar un número de 4 cifras que dividido por 8 ; 9 ; 10 y 15 de, en todos los casos igual a cinco.

63 Un libro tiene entre 400 y 450 páginas. Si las contamos de dos en dos no sobra ninguna, si las contamos de siete en siete tampoco sobra ninguna. ¿Cuántas páginas podría tener?

64 Cuadrados mágicos.
Escriban en el siguiente cuadrado los dígitos numéricos del 1 al 9; de manera que la suma de los dígitos de cada fila, columna y diagonal sean iguales. Obtendrán lo que se conoce como cuadrado mágico.



65 En una academia hay 30 alumnos, entre varones y mujeres. Hay 12 mujeres, de las cuales 7 estudian inglés, y entre los varones, 8 no estudian inglés.

a) ¿Cuántos alumnos no estudian inglés?

b) ¿Cuántos varones estudian inglés?

66 Escribir cada uno de los siguientes números como producto de números primos.
a) 4200 b) 4120 c) 3267 d) 5250

67 Con los dígitos 1; 2; 6 y 7, usando todos o algunos se arman números impares que no tienen cifras repetidas. Escribirlos y decir cuántos son.

68 Cambiar el orden de las cifras del número 4859 para obtener un múltiplo de 11.

69 Completar el cuadro, sacar conclusión y enunciar la propiedad, indicando qué propiedad o propiedades se han utilizado en las últimas columnas. ¿Podrías concluir algo sobre los resultados de las dos últimas columnas? Justifica.

m	n	p	$m \cdot n - n \cdot p$	$m \cdot (n - p)$
1500	2000	1000		
1500	2000	500		
1000	2200	500		
750	1000	500		

Diccionario matemático

LENGUAJE COLOQUIAL	LENGUAJE MATEMÁTICO
1 Dado un número.	1 ... x, y, z
2 El siguiente de un número o el consecutivo de un número.	2 $x + 1$
3 El anterior de un número.	3 $x - 1$
4 El duplo o doble de un número.	4 $2 \cdot x$
5 El siguiente del duplo de un número.	5 $2x + 1$
6 El duplo del siguiente de un número.	6 $2 \cdot (x + 1)$
7 La mitad de un número.	7 $\frac{1}{2}x$; $x : 2$; $\frac{x}{2}$
8 La mitad del anterior de un número.	8 $\frac{1}{2} \cdot (x - 1)$
9 El anterior de la mitad de un número.	9 $\frac{1}{2}x - 1$
10 Adición; aumentado.	10 +
11 Sustracción; diferencia.	11 -
12 Razón; cociente.	12 :
13 Producto.	13 .
14 La cuarta parte de un número.	14 $\frac{1}{4}x$; $x : 4$; $\frac{x}{4}$
15 El cuadrado de un número.	15 x^2
16 La raíz cuadrada de un número.	16 \sqrt{x}
17 La raíz cuarta de un número.	17 $\sqrt[4]{x}$